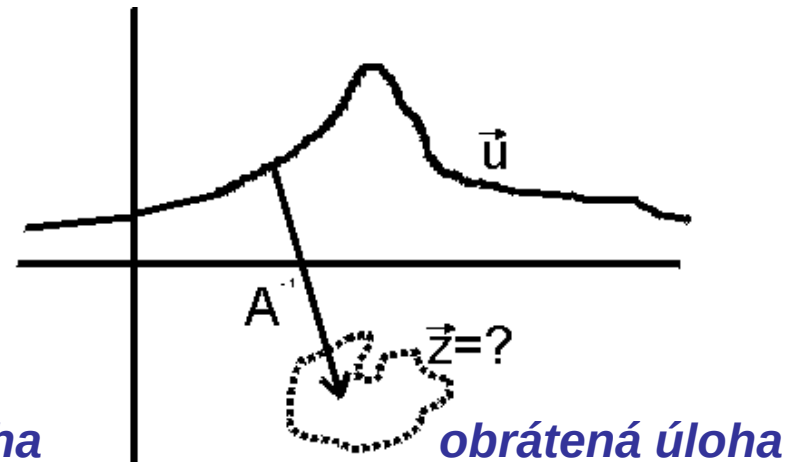
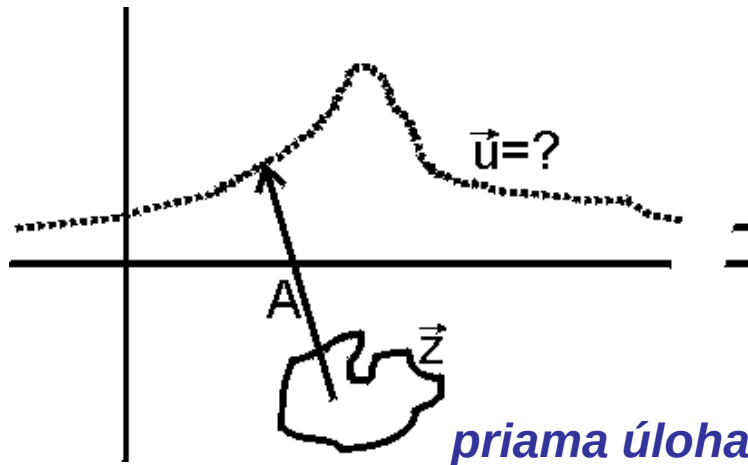


priama úloha v gravimetrii

priama vs. obrátená úloha v geofyzike (direct, inverse problem in geophysics)

priama úloha:

známy súbor (vektor) parametrov zdroja $\mathbf{z} \rightarrow$ vypočítavame pole (vektor) $\mathbf{u}$
 $\mathbf{u} = A(\mathbf{z})$, kde $A()$ – je tzv. operátor priamej úlohy

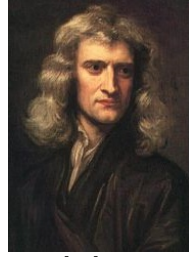


obrátená úloha:

známe pole (vektor) $\mathbf{u} \rightarrow$ určujeme súbor (vektor) parametrov zdroja $\mathbf{z}$
(hĺbka, rozmery, tvar, fyzikálne parametre)

$\mathbf{z} = A^{-1}(\mathbf{u})$, kde $A^{-1}()$ – je tzv. operátor obrátenej úlohy

je omnoho omnoho náročnejšia, ako priama úloha



priama úloha v gravimetrii – základné odvodenia

odvodenie gravitačného potenciálu V

vychádzame z Newtonovho zákona: $F = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^2}$

F – gravitačná sila, pôsobiaca medzi dvoma telesami s hmotnosťami m_1 a m_2 ,
 r – je ich vzdialenosť,
 κ – univerzálna gravitačná konštanta

pre intenzitu sily f platí: $f = \frac{F}{m_1} = \kappa \frac{m_2}{r^2} = \kappa \frac{m}{r^2}$

tu sme položili $m_2 = m$

a pre malý element hmotnosti dm platí: $f = \kappa \frac{dm}{r^2}$

Uvažujme teraz, akú potenciálnu energiu získa tento malý element hmotnosti dm , keď ho umiestnime do určitého bodu v gravitačnom poli. Táto energia sa dá vyjadriť Pomocou práce A premiestnime dm v gravitačnom poli z miesta **1** do miesta **2**:

$$A = - \int_1^2 f \, dr = - \int_1^2 \kappa \frac{dm}{r^2} \, dr = - \left[-\kappa \frac{dm}{r} \right]_1^2 = \kappa \left[\frac{dm}{r} \right]_1^2 .$$

pozn.: znamienko mínus pred integrálom vyjadruje skutočnosť, že práca pôsobí proti pôsobeniu gravitačného poľa (potenciálna energia sa získava).

Uvažujme, že bod **1** je v nekonečne – čiže akú prácu musíme vynaložiť, aby sme hmotnosť dm preniesli z nekonečna do jeho súčasnej pozície (čiže do bodu **2**).

Potom bude pre prácu A platiť:

priama úloha v gravimetrii – základné odvodenia

odvodenie gravitačného potenciálu V

Potom bude pre prácu A platiť:

$$A = \kappa \left[\frac{dm}{r} \right]_{\infty}^2 .$$

Dosadenie spodnej hranice vedie k nule a teda získame:

$$A = \kappa \left[\frac{dm}{r} \right]_{\infty}^2 = \kappa \frac{dm}{r_2} = \kappa \frac{dm}{r} .$$

Pričom sme položili $r_2 = r$.

Pre teleso s hmotnosťou m (a objemom τ) vieme túto potenciálnu energiu vyjadriť integrálom cez celkovú hmotnosť:

$$A = V = \kappa \int_m \frac{dm}{r}$$

Alebo integrovaním cez 3D objem τ (pri uplatnení vzťahu $dm = \sigma d\tau$, kde σ je hustota):

$$V = \kappa \iiint_{\tau} \frac{\sigma d\tau}{r}$$

- základný vzťah pre
gravitačný potenciál

priama úloha v gravimetrii – základné odvodenia

vyššie derivácie potenciálu V:

Pri reálnych meraniach však potenciál V (v súčasnosti) však merať nevieme. namiesto toho meriame zrýchlenie g , ktoré vyjadrujeme ako vertikálnu deriváciu potenciálu V_z (veľmi malá zmena pozdĺž osi z):

$$g \approx V_z = \frac{\partial V}{\partial z}$$

Zo zrýchlenia V_z vychádzajú všetky ďalšie vyššie derivácie (gradienty) potenciálu: V_{xz} , V_{yz} , V_{zz} a V_{xx} , V_{yy} , V_{zz} , V_{xz} , V_{yz} , V_{xy} .

Tieto tvoria tzv. tenzor vyšších derivácií:

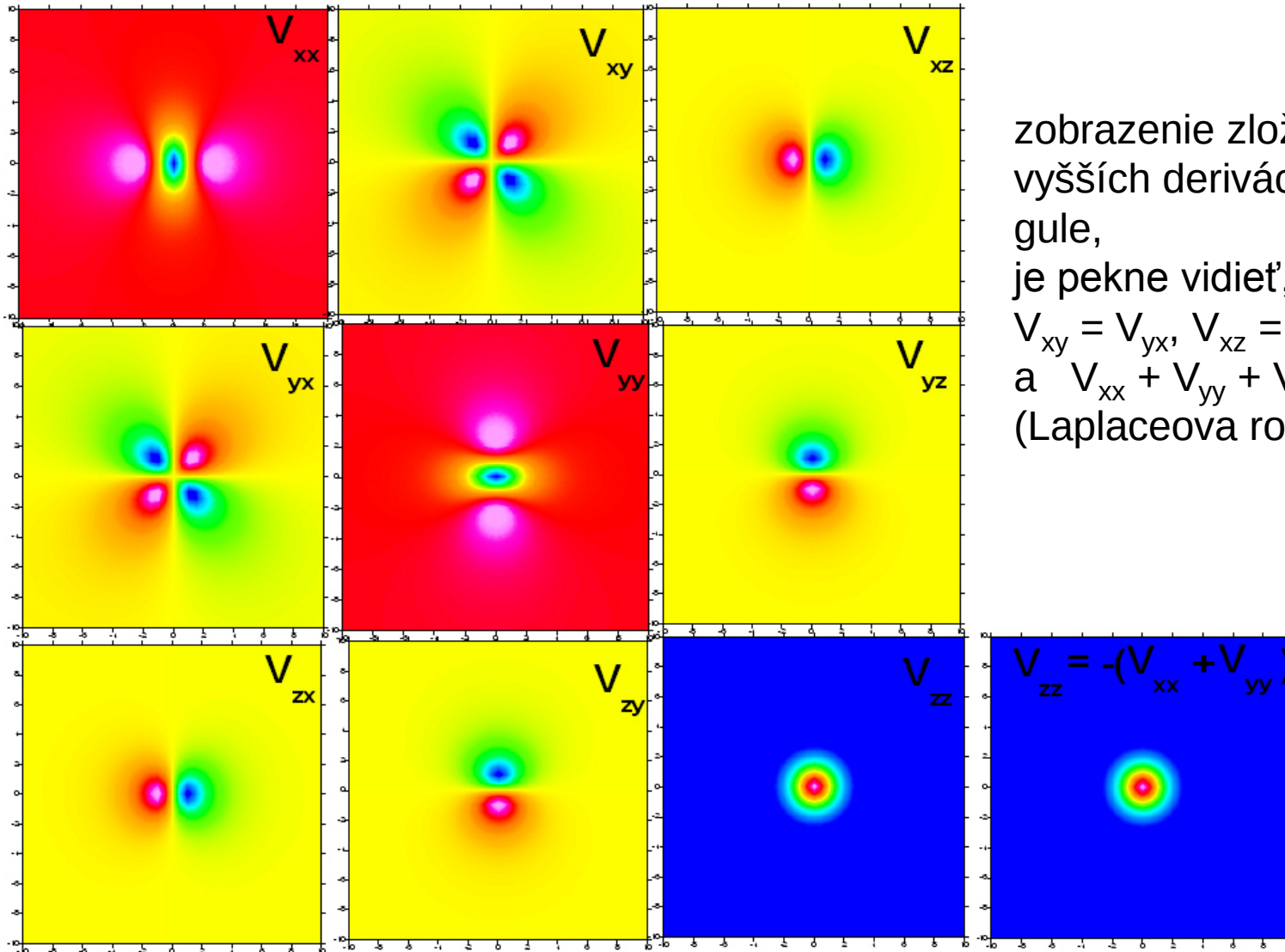
$$\begin{pmatrix} V_{xx} & V_{xy} & V_{xz} \\ V_{yx} & V_{yy} & V_{yz} \\ V_{zx} & V_{zy} & V_{zz} \end{pmatrix}$$

Tieto dokážeme v súčasnosti merať pomocou gradientometrov (letecky a na mori). Z celého tenzora je nezávislých 5 zložiek: V_{xy} , V_{xz} , V_{yz} , V_{zz} a V_{yy} , nakoľko platí $V_{xy} = V_{yx}$, $V_{xz} = V_{zx}$, $V_{yz} = V_{zy}$ a $V_{xx} + V_{yy} + V_{zz} = 0$ (Laplaceova rovnica).

priama úloha v gravimetrii – základné odvodenia

vyššie derivácie potenciálu V :

$$V_{xx}, V_{xy}, V_{xz}, V_{yx}, V_{yy}, V_{yz}, V_{zx}, V_{zy}, V_{zz}$$



zobrazenie zložiek tenzora vyšších derivácií pre prípad gule,

je pekne vidieť, že platí:

$$V_{xy} = V_{yx}, V_{xz} = V_{zx}, V_{yz} = V_{zy}$$

a $V_{xx} + V_{yy} + V_{zz} = 0$
(Laplaceova rovnica).

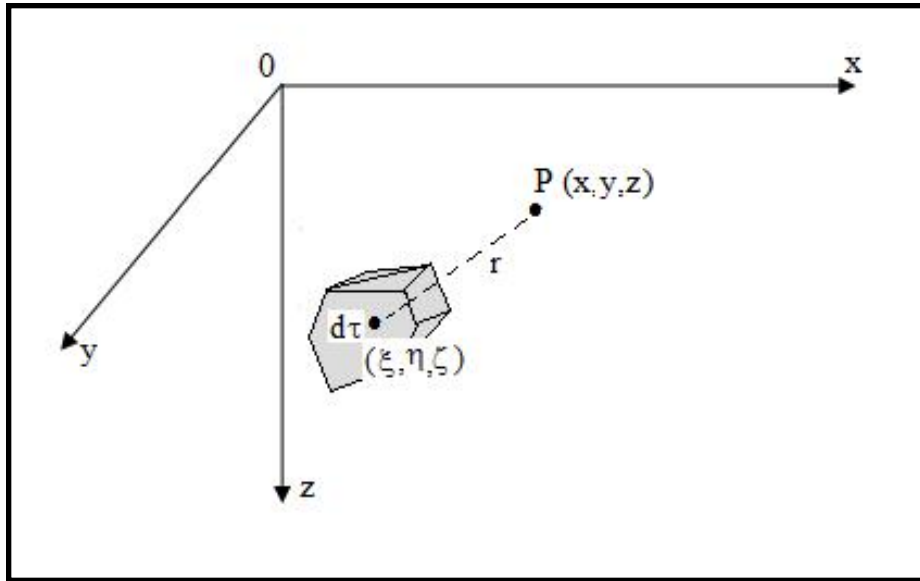
priama úloha v gravimetrii – základné odvodenia

vyjadrenie vzťahu pre potenciál V v kartézskych súradniciach:

bod výpočtu: $P(x, y, z)$

element objemu: $d\tau(\xi, \eta, \zeta)$

vzdialenosť medzi nimi: $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$



$$V = \kappa \iiint_{\tau} \frac{\sigma d\tau}{r} = \kappa \iiint_{\tau} \frac{\sigma(\xi, \eta, \zeta)}{\left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} d\xi d\eta d\zeta$$

priama úloha v gravimetrii – základné odvodenia

vyjadrenie vzťahov pre vyššie derivácie potenciálu V v kartézskych súradniciach:

$$V_x = \frac{\partial V}{\partial x} = \kappa \iiint \frac{\sigma(\xi, \eta, \zeta)(\xi - x)}{\left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} d\xi d\eta d\zeta$$

$$V_y = \frac{\partial V}{\partial y} = \kappa \iiint \frac{\sigma(\xi, \eta, \zeta)(\eta - y)}{\left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} d\xi d\eta d\zeta$$

$$V_z = \frac{\partial V}{\partial z} = \kappa \iiint \frac{\sigma(\xi, \eta, \zeta)(\zeta - z)}{\left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} d\xi d\eta d\zeta$$

najpoužívanejší vzťah v odvádzaniach vzťahov pre priamu úlohu v gravimetrii (tzv. 3D prípad)

priama úloha v gravimetrii – základné odvodenia

vyjadrenie vzťahov pre vyššie derivácie potenciálu V v kartézskych súradniciach:

$$V_{xx} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \kappa \iiint \frac{\sigma(\xi, \eta, \zeta) \left[2(\xi - x)^2 - (\eta - y)^2 - (\zeta - z)^2 \right]}{\left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 \right]^{\frac{5}{2}}} d\xi d\eta d\zeta$$

$$V_{yy} = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \kappa \iiint \frac{\sigma(\xi, \eta, \zeta) \left[2(\eta - y)^2 - (\xi - x)^2 - (\zeta - z)^2 \right]}{\left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 \right]^{\frac{5}{2}}} d\xi d\eta d\zeta$$

$$V_{zz} = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \kappa \iiint \frac{\sigma(\xi, \eta, \zeta) \left[2(\zeta - z)^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2 \right]}{\left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 \right]^{\frac{5}{2}}} d\xi d\eta d\zeta$$

priama úloha v gravimetrii – základné odvodenia

**vyjadrenie vzťahov pre vyššie derivácie potenciálu V
v kartézskych súradniciach:**

$$V_{xz} = \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} = 3\kappa \iiint \frac{\sigma(\xi, \eta, \zeta)(\xi - x)(\zeta - z)}{\left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 \right]^{\frac{5}{2}}} d\xi d\eta d\zeta$$

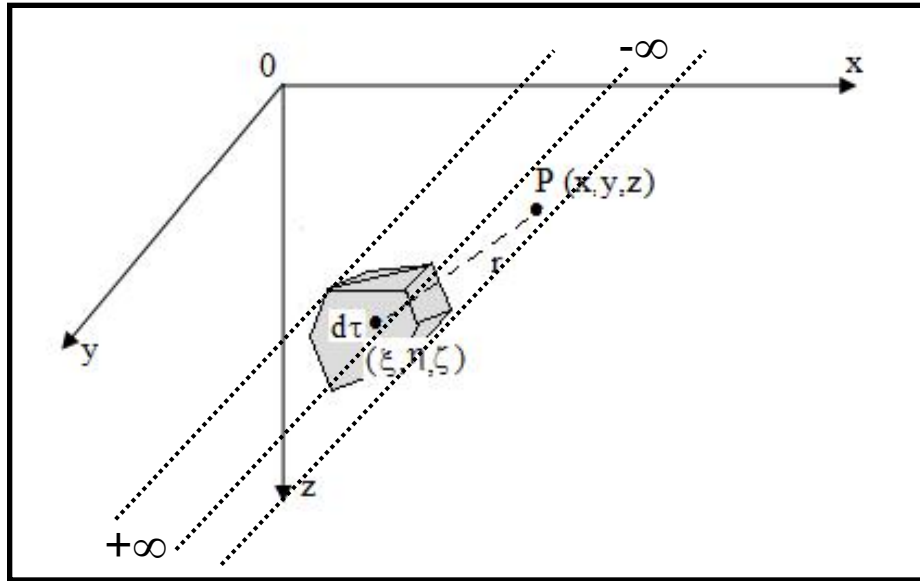
$$V_{yz} = \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y} = 3\kappa \iiint \frac{\sigma(\xi, \eta, \zeta)(\eta - y)(\zeta - z)}{\left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 \right]^{\frac{5}{2}}} d\xi d\eta d\zeta$$

$$V_{xy} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = 3\kappa \iiint \frac{\sigma(\xi, \eta, \zeta)(\xi - x)(\eta - y)}{\left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 \right]^{\frac{5}{2}}} d\xi d\eta d\zeta$$

$$V_{zzz} = \frac{\partial^3 V}{\partial z^3} = 3\kappa \iiint \frac{\sigma(\xi, \eta, \zeta)(\zeta - z) \left[2(\zeta - z)^2 - 3(\xi - x)^2 - 3(\eta - y)^2 \right]}{\left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 \right]^{\frac{7}{2}}} d\xi d\eta d\zeta$$

priama úloha v gravimetrii – základné odvodenia

vyjadrenie vzťahov pre V_z – tzv. 2D prípad:



teleso je natiahnuté v smere osi y (parameter η) od $-\infty$ do $+\infty$ a vo vzťahu pre V_z zo slajdu č.8 je riešený integrál pre η :

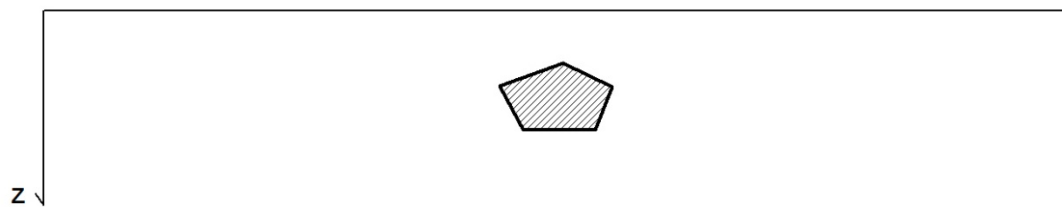
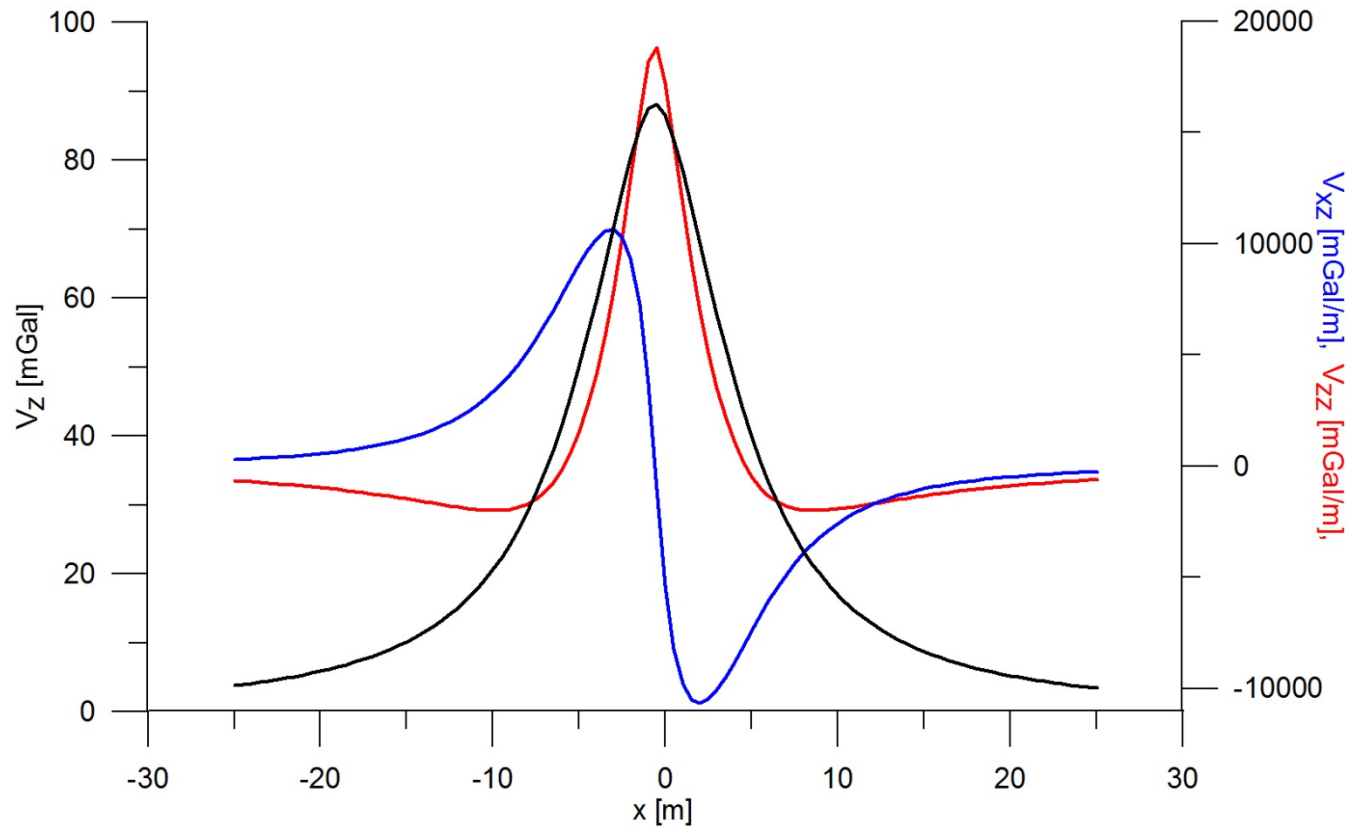
$$V_z = \kappa \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma(\xi, \eta, \zeta)(\zeta - z)}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{3/2}} d\xi d\eta d\zeta$$

(postup riešenia integrálu pre η je načrtnutý v skriptách na str. 72 a 73)

$$V_z^{(2D)} = 2\kappa \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma(\xi, \zeta)(\zeta - z)}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2} d\xi d\zeta$$

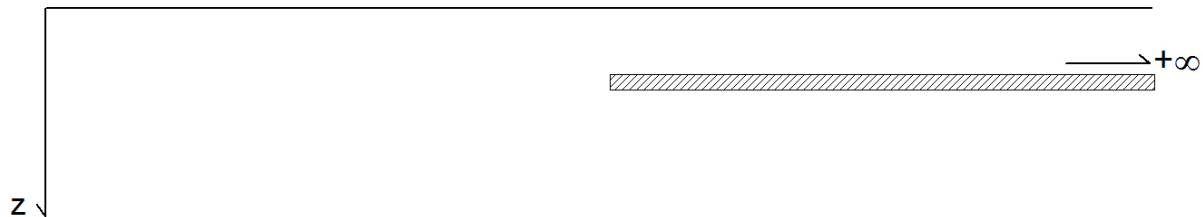
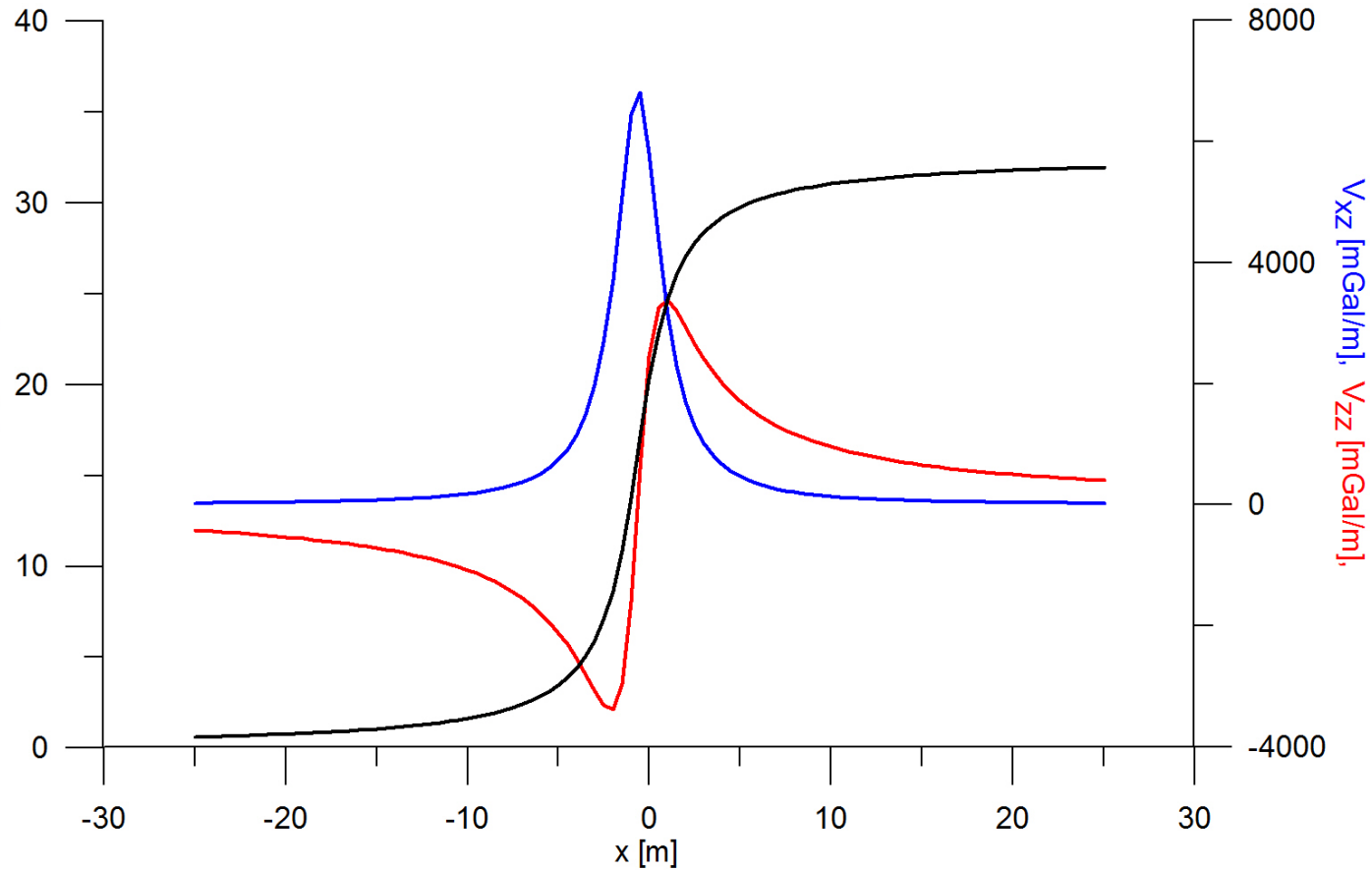
druhý najpoužívanější vzťah v odvádzaniach vzťahov pre priamu úlohu v gravimetrii (2D prípad)

priama úloha v gravimetrii – typické účinky



priebehy V_z , V_{xz} a V_{zz} pre symetrické 2D teleso

priama úloha v gravimetrii – typické účinky



priebehy V_z , V_{xz} a V_{zz} pre asymetrické 2D teleso

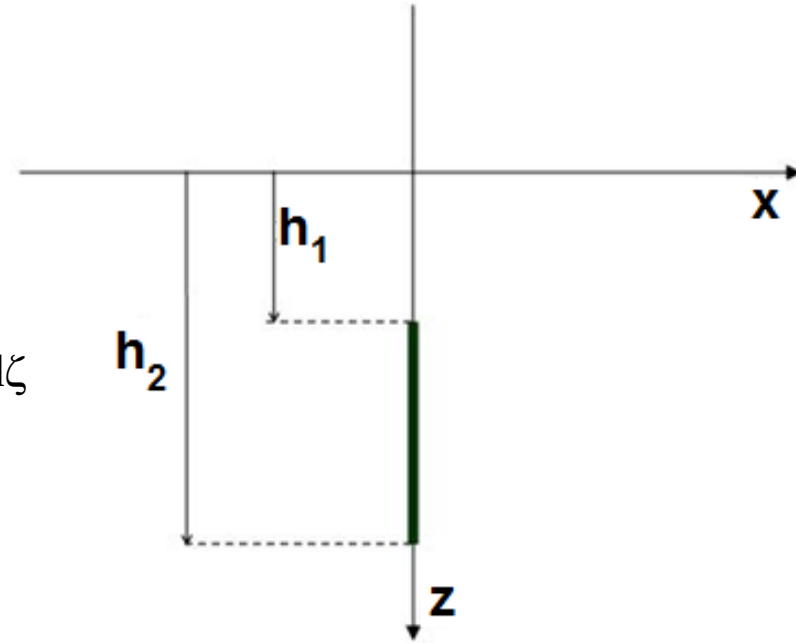
priama úloha v gravimetrii – príklad odvodu V_z pre jednoduché teleso

tenká vertikálna tyč (1/2)

Vychádzame zo všeobecného vzťahu pre V_z pre 3D telesá (slajd č. 8):

$$V_z = \frac{\partial V}{\partial z} = \kappa \iiint \frac{\sigma(\xi, \eta, \zeta)(\zeta - z)}{\left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} d\xi d\eta d\zeta$$

s tým, že uvažujeme konštantnú hustotu (vyjde pre integrál) a položíme $y = 0$ a $z = 0$ (zaujíma nás účinok na profile pozdĺž osi x) a $\xi = 0$ a $\eta = 0$ (tyč je presne pod počiatkom systému). Potom máme:



$$V_z(x, 0, 0) = \kappa \sigma \int_{\xi} \int_{\eta} \int_{\zeta} \frac{\zeta}{\left[x^2 + \zeta^2 \right]^{\frac{3}{2}}} d\xi d\eta d\zeta = \kappa \underbrace{\sigma \int_{\xi} \int_{\eta} d\xi d\eta}_{\lambda} \int_{\zeta} \frac{\zeta}{\left[x^2 + \zeta^2 \right]^{\frac{3}{2}}} d\zeta = \kappa \lambda \int_{\zeta} \frac{\zeta}{\left[x^2 + \zeta^2 \right]^{\frac{3}{2}}} d\zeta$$

kde sme využili koncept tzv. dĺžkovej hustoty (λ), čo je vlastne hmotnosť jednotkovej dĺžky tyče (môžeme si to dovoliť, nakoľko teleso je tenké a jeho prierez v smere x a y je veľmi malý – integrovanie v týchto smeroch je malé)

priama úloha v gravimetrii – príklad odvodenia V_z pre jednoduché teleso

tenká vertikálna tyč (2/2)

Pokračujeme riešením integrálu z predošlého slajdu (použitím substitúcie – zavedením premennej t):

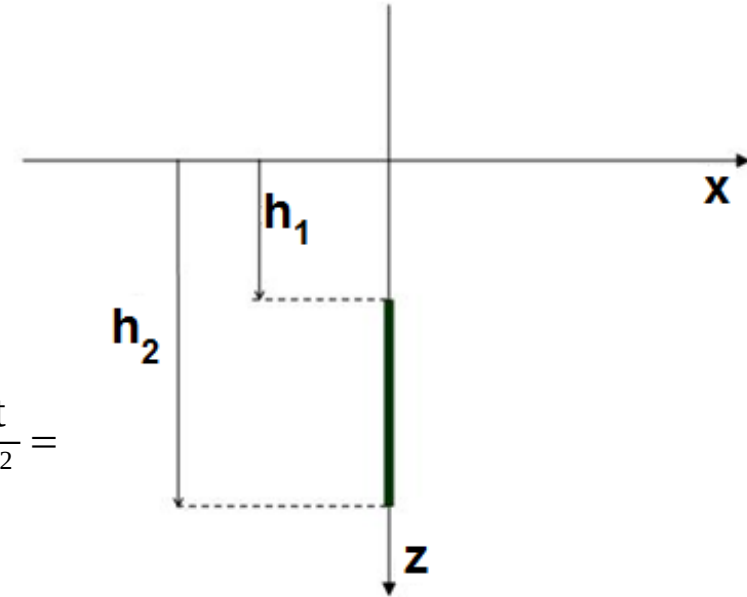
$$V_z(x, 0, 0) = \kappa\lambda \int_{h_1}^{h_2} \frac{\zeta}{[x^2 + \zeta^2]^{\frac{3}{2}}} d\zeta \left[\begin{matrix} t = x^2 + \zeta^2 \\ dt = 2\zeta d\zeta \end{matrix} \right] = \kappa\lambda \frac{1}{2} \int_{x^2+h_1^2}^{x^2+h_2^2} \frac{dt}{t^{3/2}} =$$

$$= \kappa\lambda \frac{1}{2} \left[-2t^{-\frac{1}{2}} \right]_{x^2+h_1^2}^{x^2+h_2^2} = -\kappa\lambda \left[\frac{1}{\sqrt{t}} \right]_{x^2+h_1^2}^{x^2+h_2^2} = \kappa\lambda \left[\frac{1}{\sqrt{x^2+h_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+h_2^2}} \right]$$

výsledok

Pre hĺbkovo neobmedzenú tyč ($h_1 = h$, $h_2 = \infty$) platí:

$$V_z(x, 0, 0) = \kappa\lambda \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + h^2}} \right]$$

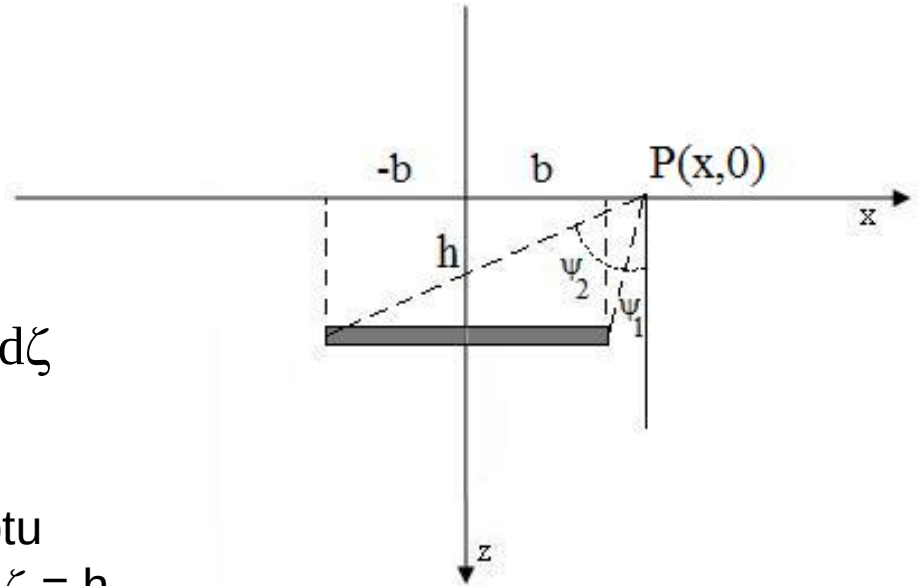


priama úloha v gravimetrii – príklad odvodu V_z pre jednoduché teleso

horizontálny pás (1/3)

Vychádzame zo všeobecného vzťahu pre V_z pre 2D telesá (slajd č. 11):

$$V_z^{(2D)} = 2\kappa \int_{\xi} \int_{\zeta} \frac{\sigma(\xi, \zeta)(\zeta - z)}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2} d\xi d\zeta$$



s tým, že uvažujeme konštantnú hustotu (vyjde pre integrál) a položíme $z = 0$ a $\zeta = h$ (zaujíma nás účinok na povrchu pozdĺž osi x). Potom máme:

$$V_z = 2\kappa\sigma \int_{\xi} \int_{\zeta} \left[\frac{h}{(\xi - x)^2 + h^2} \right] d\xi d\zeta = 2\kappa h \underbrace{\sigma}_{\mu} \int_{\xi} d\zeta \int_{\xi} \left[\frac{d\xi}{(\xi - x)^2 + h^2} \right] = 2\kappa h \mu \int_{-b}^{+b} \left[\frac{d\xi}{(\xi - x)^2 + h^2} \right]$$

kde sme využili koncept tzv. plošnej hustoty (μ), čo je vlastne hmotnosť jednotkovej plochy pásu (môžeme si to dovoliť, nakoľko teleso je tenké a jeho rozmer v smere z veľmi malý – integrovanie v tomto smere je veľmi malé)

priama úloha v gravimetrii – príklad odvodu V_z pre jednoduché teleso

horizontálny pás (2/3)

Pokračujeme riešením integrálu z predošlého slajdu
(použitím substitúcie – zavedením premennej t):

$$\begin{aligned} V_z(x,0) &= 2\kappa\mu h \int_{-b}^{+b} \frac{\frac{d\xi}{h^2}}{\left[\frac{(\xi-x)^2}{h^2} + \frac{h^2}{h^2}\right]} = 2\kappa\mu \frac{h}{h^2} \int_{-b}^{+b} \frac{d\xi}{\left[\left(\frac{\xi-x}{h}\right)^2 + 1\right]} \left[\begin{array}{l} t = (\xi-x)/h \\ dt = d\xi/h \\ d\xi = h dt \end{array} \right] = \\ &= 2\kappa\mu \frac{1}{h} \int_{\frac{-b-x}{h}}^{\frac{b-x}{h}} \frac{h dt}{[t^2 + 1]} = 2\kappa\mu \left[\text{artctg}(t) \right]_{\frac{-b-x}{h}}^{\frac{b-x}{h}} = 2\kappa\mu \left[\text{artctg}\left(\frac{b-x}{h}\right) - \text{artctg}\left(\frac{-b-x}{h}\right) \right] = \end{aligned}$$

Pri nasledujúcej úprave využijeme nepárnosť funkcie artctg : $\text{artctg}(-t) = -\text{artctg}(t)$

$$= 2\kappa\mu \left[\text{artctg}\left(\frac{x+b}{h}\right) - \text{artctg}\left(\frac{x-b}{h}\right) \right] = 2\kappa\mu(\psi_2 - \psi_1) = 2\kappa\mu\theta \quad \text{výsledok}$$

Prechod k uhlom ψ_1 a ψ_2 je zrejmý z geometrie na obrázku (predchádzajúci slajd).

priama úloha v gravimetrii – príklad odvodu V_z pre jednoduché teleso

horizontálny pás (3/3)

Zo získaného výsledku je zrejmé, že gravitačné zrýchlenie spôsobené prítomnosťou horizontálneho pásu je úmerné uhlu, pod ktorým „vidíme“ pás z bodu $P(x,0)$:

$$V_z(x,0) = 2\kappa\mu\theta$$

Uvedená skutočnosť sa dá využiť pri odvodení vzťahov pre:

polonekonečnú dosku (tzv. sill) so začiatkom presne pod bodom $x = 0$:

$$\dots = 2\kappa\mu \left[\text{artctg}(t) \right]_{\frac{-b-x}{h}}^{\frac{+b-x}{h}} = 2\kappa\mu \left[\text{artctg}(t) \right]_{\frac{-x}{h}}^{\infty} = 2\kappa\mu \left[\frac{\pi}{2} - \text{artctg}\left(\frac{-x}{h}\right) \right] = 2\kappa\mu \left[\frac{\pi}{2} + \text{artctg}\left(\frac{x}{h}\right) \right]$$

a nekonečnú (tzv. Bouguerovu) dosku:

$$\dots = 2\kappa\mu \left[\text{artctg}(t) \right]_{\frac{-b-x}{h}}^{\frac{+b-x}{h}} = 2\kappa\mu \left[\text{artctg}(t) \right]_{-\infty}^{\infty} = 2\kappa\mu \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right] = 2\kappa\pi\mu = 2\kappa\pi\sigma\Delta h = ?$$

kde Δh je vertikálny rozmer dosky.

priama úloha v gravimetrii – príklad odvodenia V_z pre jednoduché teleso

horizontálny pás (3/3)

Zo získaného výsledku je zrejmé, že gravitačné zrýchlenie spôsobené prítomnosťou horizontálneho pásu je úmerné uhlu, pod ktorým „vidíme“ pás z bodu $P(x,0)$:

$$V_z(x,0) = 2\kappa\mu\theta$$

Uvedená skutočnosť sa dá využiť pri odvodení vzťahov pre:

polonekonečnú dosku (tzv. sill) so začiatkom presne pod bodom $x = 0$:

$$\dots = 2\kappa\mu \left[\operatorname{artctg}(t) \right]_{\frac{-b-x}{h}}^{\frac{+b-x}{h}} = 2\kappa\mu \left[\operatorname{artctg}(t) \right]_{-\infty}^{\infty} = 2\kappa\mu \left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{artctg}\left(\frac{-x}{h}\right) \right] = 2\kappa\mu \left[\frac{\pi}{2} + \operatorname{artctg}\left(\frac{x}{h}\right) \right]$$

a nekonečnú (Bouguerovu) dosku:

$$\dots = 2\kappa\mu \left[\operatorname{artctg}(t) \right]_{\frac{-b-x}{h}}^{\frac{+b-x}{h}} = 2\kappa\mu \left[\operatorname{artctg}(t) \right]_{-\infty}^{\infty} = 2\kappa\mu \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right] = 2\kappa\pi\sigma\Delta h = 0.0419\sigma\Delta h$$

kde Δh je vertikálny rozmer dosky.

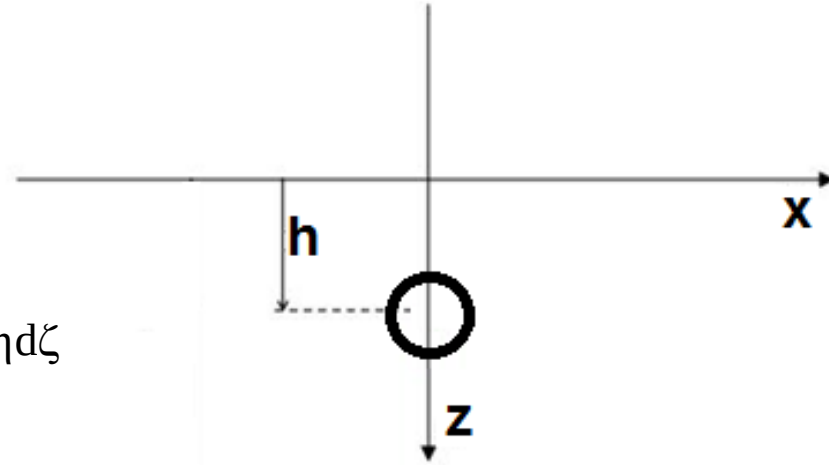
(Pozor! Vzťah s konštantou 0.0419 platí len vtedy, keď je hustota σ dosadzovaná v jednotkách $[g \cdot cm^{-3}]$ a výsledok je potom v jednotkách $[mGal]$).

priama úloha v gravimetrii – príklad odvodu V_z pre jednoduché teleso

horizontálny valec (1/2)

Vychádzame zo všeobecného vzťahu pre V_z pre 3D telesá (slajd č. 8):

$$V_z = \frac{\partial V}{\partial z} = \kappa \iiint \frac{\sigma(\xi, \eta, \zeta)(\zeta - z)}{\left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} d\xi d\eta d\zeta$$



s tým, že uvažujeme konštantnú hustotu (vyjde pre integrál) a položíme $z = 0$ a $y = 0$, $\xi = 0$, $\zeta = h$ a valec je rozťahnutý v smere osi y na každú stranu o dĺžku A . Zaujímá nás účinok na povrchu pozdĺž osi x .

Potom máme:

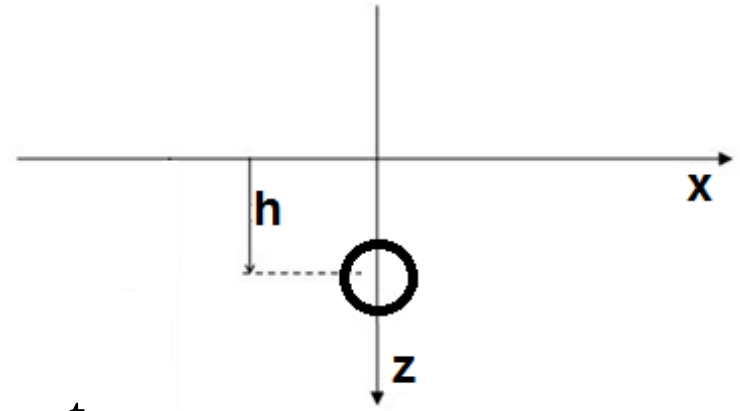
$$V_z(x, 0, 0) = \kappa \sigma \int_{\xi} \int_{\eta} \int_{\zeta} \frac{h}{\left[x^2 + \eta^2 + h^2 \right]^{3/2}} d\xi d\eta d\zeta = \kappa \sigma \underbrace{\int_{\xi} \int_{\zeta} d\xi d\zeta}_{\lambda} \int_{\eta} \frac{h}{\left[x^2 + \eta^2 + h^2 \right]^{3/2}} d\eta$$

kde sme opäť využili koncept tzv. dĺžkovej hustoty (λ) - môžeme si to dovoliť, nakoľko teleso je tenké a jeho prierez v smere x a z je veľmi malý – integrovanie v týchto smeroch je malé)

priama úloha v gravimetrii – príklad odvodu V_z pre jednoduché teleso

horizontálny valec (2/2)

$$V_z(x,0,0) = \kappa\lambda h \int_{-A}^{+A} \frac{d\eta}{[x^2 + \eta^2 + h^2]^{3/2}} =$$



Uvedený integrál je možné riešiť pomocou nasledujúceho tabuľkového integrálu: $\int \frac{dt}{\sqrt{a^2 + t^2}^3} = \frac{t}{a^2 \sqrt{a^2 + t^2}}$, kde $a^2 = x^2 + h^2$, $t = \eta$

$$V_z(x,0,0) = \kappa\lambda h \left[\frac{\eta}{(x^2 + h^2) \sqrt{x^2 + \eta^2 + h^2}} \right]_{-A}^{+A} = 2\kappa\lambda h \frac{A}{(x^2 + h^2) \sqrt{x^2 + A^2 + h^2}}$$

priebežný výsledok

V prípade 2D horizontálneho valca ($A \rightarrow \infty$) treba riešiť limitu:

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{A}{\sqrt{x^2 + A^2 + h^2}} = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{\frac{A}{A}}{\sqrt{\frac{x^2}{A^2} + \frac{A^2}{A^2} + \frac{h^2}{A^2}}} = 1$$

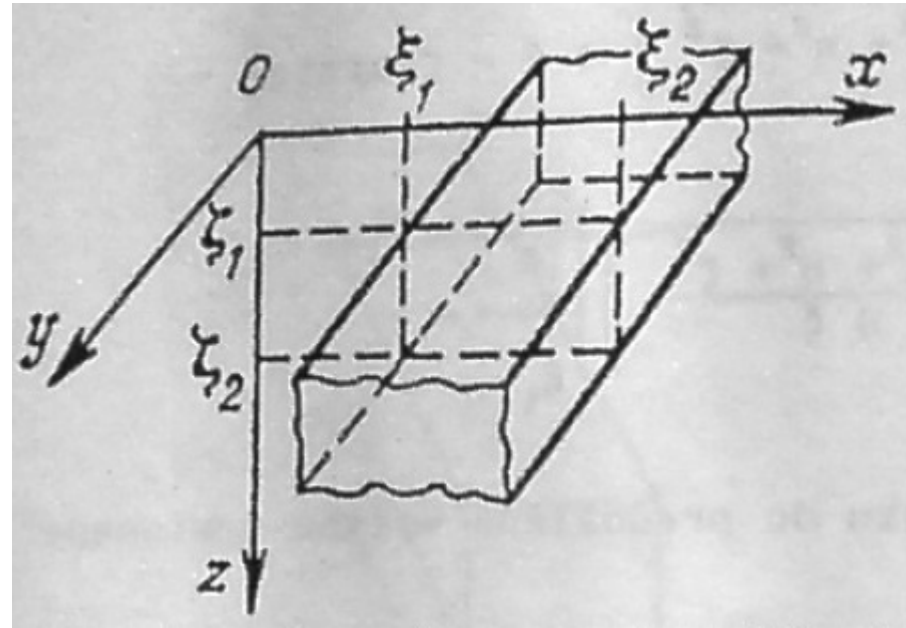
Potom: $V^{(2D)}_z(x,0,0) = 2\kappa\lambda \frac{h}{x^2 + h^2}$ **výsledok**

priama úloha v gravimetrii – príklad odvodu V_z pre jednoduché teleso

2D pravouhlý hranol (2D prism)

Vychádzame zo všeobecného vzťahu pre V_z pre 2D telesá (slajd č. 11):

$$V_z^{(2D)} = 2\kappa \int_{\xi} \int_{\zeta} \frac{\sigma(\xi, \zeta)(\zeta - z)}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2} d\xi d\zeta$$

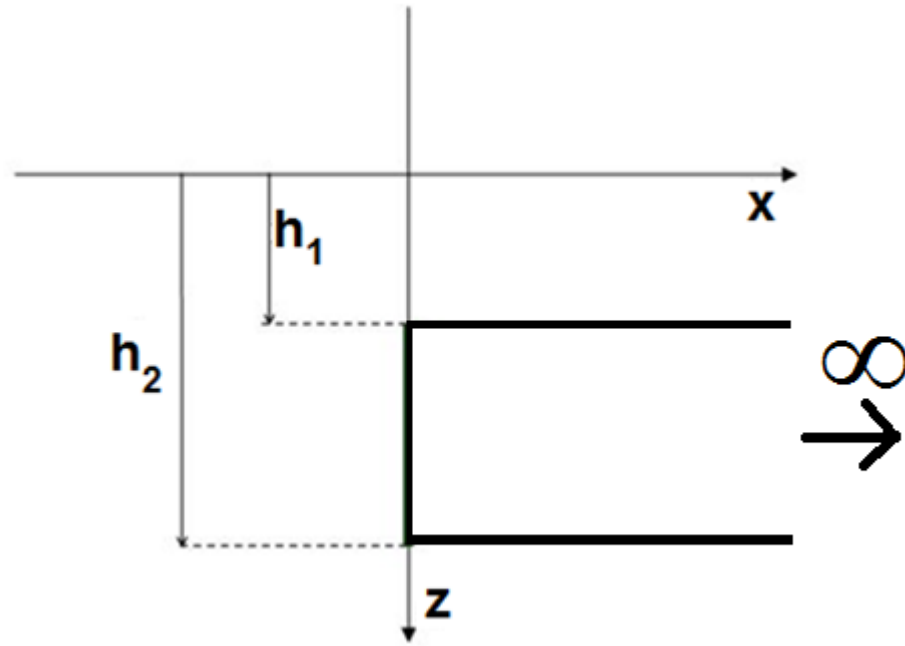


Po integrácii vo všetkých dvoch smeroch (napr. skriptá Gravimetria, str. 106 - 107) dostaneme nasledujúci vzťah (najprv sa integruje v z-ovom smere):

$$V_z(x, 0) = \kappa \sigma \left[(\xi_1 - x) \ln \frac{(\xi_1 - x)^2 + \zeta_1^2}{(\xi_1 - x)^2 + \zeta_2^2} - (\xi_2 - x) \ln \frac{(\xi_2 - x)^2 + \zeta_1^2}{(\xi_2 - x)^2 + \zeta_2^2} + \right. \\ \left. + 2\zeta_2 \left(\arctg \frac{\xi_2 - x}{\zeta_2} - \arctg \frac{\xi_1 - x}{\zeta_2} \right) + 2\zeta_1 \left(\arctg \frac{\xi_1 - x}{\zeta_1} - \arctg \frac{\xi_2 - x}{\zeta_1} \right) \right]$$

priama úloha v gravimetrii – príklad odvodu V_z pre jednoduché teleso

pravouhlý stupeň (step)



Vychádza sa zo vzťahu pre 2D-hranol (napr. učebnica Mudrecova, Veselov, 1990), pričom sa jedna x-ová súradnica berie rovná nule a druhá ide do nekonečna, napokon sa získa nasledujúci vzťah:

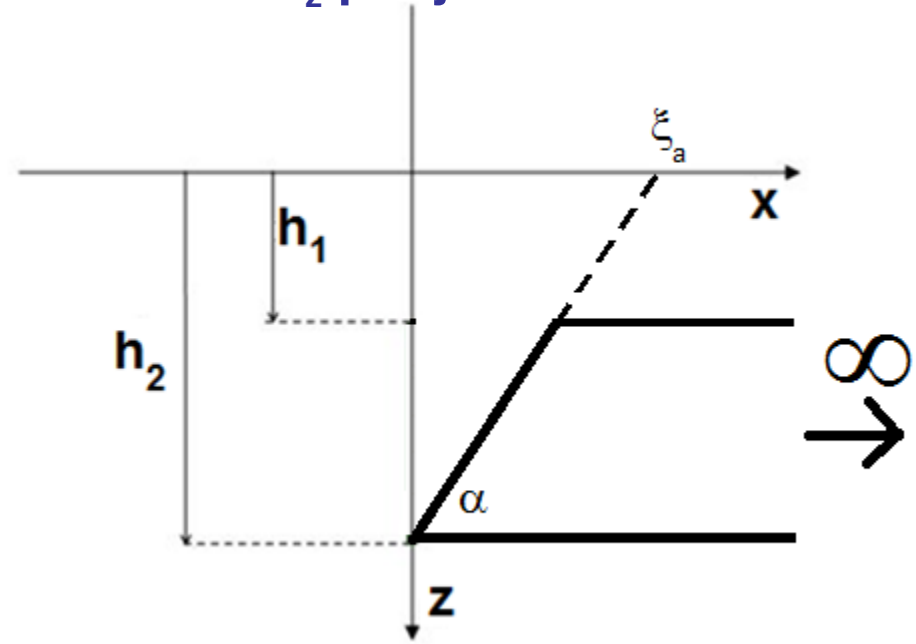
$$V_z(x,0) = \kappa\sigma \left[-(\xi - x) \ln \frac{(\xi - x)^2 + h_2^2}{(\xi - x)^2 + h_1^2} \right] + h_2 \left(\pi - 2 \operatorname{arctg} \frac{\xi - x}{h_2} \right) - h_1 \left(\pi - 2 \operatorname{arctg} \frac{\xi - x}{h_1} \right)$$

priama úloha v gravimetrii – príklad odvodu V_z pre jednoduché teleso

šikmý stupeň (inclined step)

Vychádzame zo všeobecného vzťahu pre V_z pre 2D telesá (slajd č. 11):

$$V_z^{(2D)} = 2\kappa \int_{\xi} \int_{\zeta} \frac{\sigma(\xi, \zeta)(\zeta - z)}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2} d\xi d\zeta$$



Vezmeme polonekonečnú dosku a túto integrujeme tak, aby sme ňou „vyplnili“ objem tohto šikmého stupňa (mení sa jej vzdialenosť od osi z).

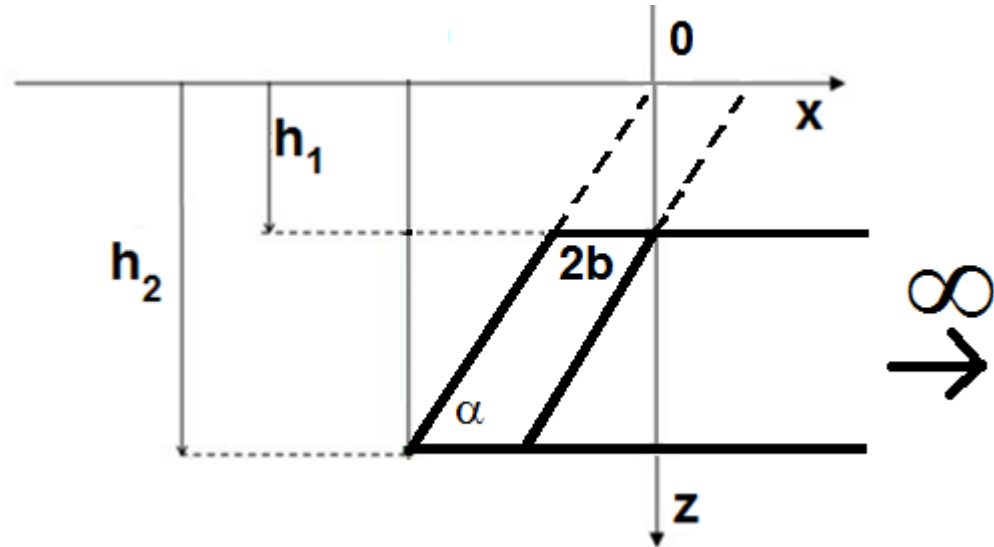
Po integrácii (napr. skriptá Gravimetria, str. 110) dostaneme nasledujúci vzťah:

$$V_z(x, 0) = 2\kappa\sigma \left[\zeta \left(\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{\xi_a - \zeta \cot g\alpha}{\zeta} \right) - \frac{\xi_a \sin^2 \alpha}{2} \ln(\zeta^2 - 2\xi_a \zeta \sin \alpha \cos \alpha + \xi_a^2 \sin^2 \alpha) - \xi_a \sin \alpha \cos \alpha \arctg \frac{\zeta - \xi_a \cos \alpha \sin \alpha}{\xi_a \sin^2 \alpha} \right] \Bigg|_{h_1}^{h_2}$$

priama úloha v gravimetrii – príklad odvodu V_z pre jednoduché teleso

šikmá doska (dyke)

Vznikne odčítaním účinkov dvoch šikmých stupňov:



Získame koncový vzťah napr. skriptá Gravimetria, str. 113 :

$$V_z(x,0) = 2\kappa\sigma[h_2\psi_2 - h_1\psi_1 - h_2\psi_{2'} + h_1\psi_{1'} + \sin^2 \alpha \left(x \ln \frac{r_2}{r_1} - (x - 2b) \ln \frac{r_{2'}}{r_{1'}} \right) + \\ + [x(\psi_2 - \psi_1) - (x - 2b)(\psi_{2'} - \psi_{1'})] \sin \alpha \cos \alpha]$$

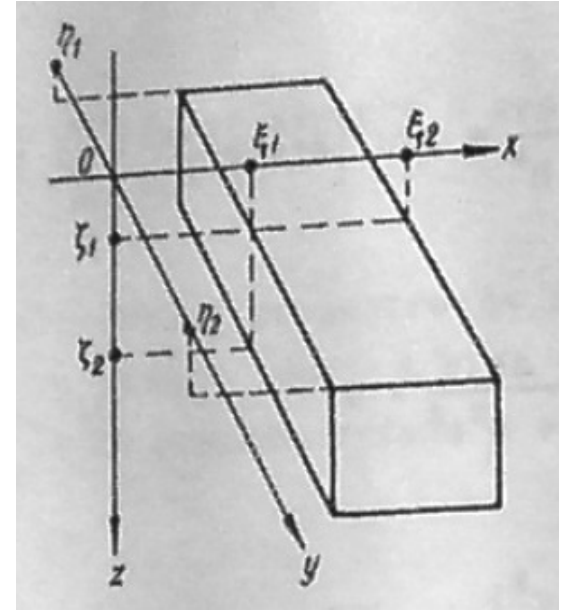
kde ψ je skrátенý zápis pre typ výrazu $\arctg()$

priama úloha v gravimetrii – príklad odvodenia V_z pre jednoduché teleso

3D pravouhlý hranol (3D prism)

Vychádzame zo všeobecného vzťahu pre V_z pre 3D telesá (slajd č. 8):

$$V_z = \frac{\partial V}{\partial z} = \kappa \iiint \frac{\sigma(\xi, \eta, \zeta)(\zeta - z)}{\left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} d\xi d\eta d\zeta$$



Po integrácii vo všetkých troch smeroch (napr. skriptá Gravimetria, str. 103 - 105) dostaneme nasledujúci vzťah:

$$V_z(0,0,0) = -\kappa\sigma \left[\xi \ln\left(\eta + \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}\right) + \eta \ln\left(\xi + \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}\right) + \right. \\ \left. + \zeta \operatorname{arctg} \frac{\zeta \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}}{\eta \xi} \right] \bigg|_{\zeta_1}^{\zeta_2} \bigg|_{\eta_1}^{\eta_2} \bigg|_{\xi_1}^{\xi_2}$$

Pozn.: Tento vzťah pravdepodobne odvodil už Everest (1830), avšak v praxi je na mnohých miestach citovaný nesprávny vzorec Nagy (1966), my zvykneme citovať ruského autora Sorokina (1951).

priama úloha v gravimetrii – príklad odvodu V_z pre jednoduché teleso

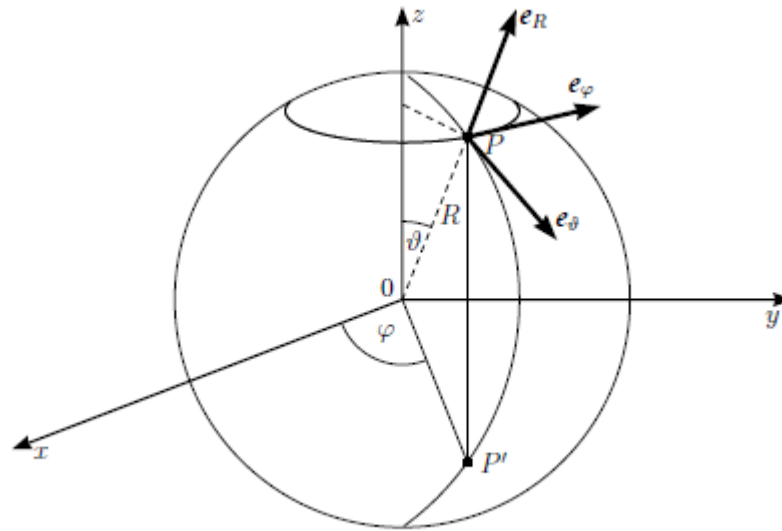
guľa, guľová vrstva (sphere, spherical layer)

1/2

Vychádza sa zo základného vzťahu pre potenciál V pre 3D teleso (snímok č.4):

$$V = \kappa \iiint_{\tau} \frac{\sigma d\tau}{r}$$

Ale vzťah sa vyjadrí nie pre kartézske ale sférické súradnice (skriptá, str. 86-87).



Obr. 2.3

Integrácia pozdĺž súradnice φ je jednoduchá (výsledkom je násobenie konštantou), potom sa integruje pozdĺž súradnice ϑ a až na záver pozdĺž R . A práve táto integrácia je zaujímavá, nakoľko tu sa dá rozlíšiť, či sa bod výpočtu nachádza mimo gule alebo v jej vnútri.

priama úloha v gravimetrii – príklad odvodu V_z pre jednoduché teleso

guľa, guľová vrstva (sphere, spherical layer)

2/2

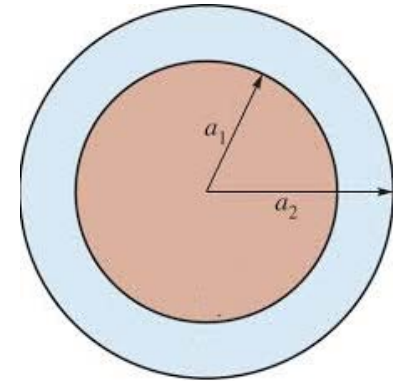
Výsledkom je pre bod mimo gule známy vzťah:

$$V = \kappa \frac{M}{R} = \kappa \frac{4}{3} \pi a^3 \sigma \frac{1}{R}$$

kde M je hmotnosť gule a R je vzdialenosť bodu výpočtu od jej stredu.

Veľmi zaujímavý je výsledok pre bod vo vnútri gule (úplne z neho vypadla radiálna súradnica R !):

$$V = \frac{2}{3} \pi \kappa \sigma (3a_2^2 - a_1^2)$$



Vzťah pre V_z získame prechodom do kartézskych súradníc a derivovaním podľa z .

$$V_z = \kappa M \frac{\zeta - z}{R^3}$$

bod mimo gule

$$V_z = 0$$

bod vo vnútri gule
(kdekoľvek, nie len v jej strede)

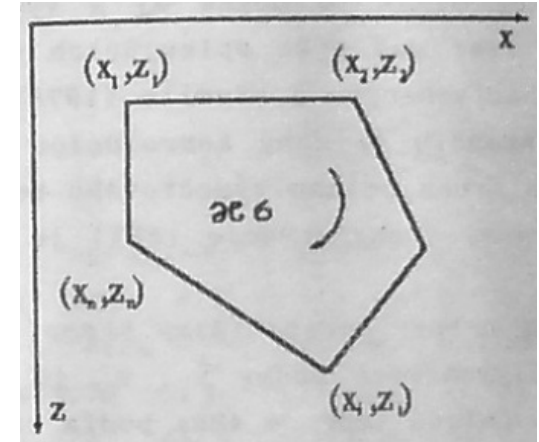
priama úloha v gravimetrii – príklad odvodu V_z pre jednoduché teleso

asi najdôležitejší vzťah – tzv. 2D polygonálny hranol, presnejšie
presnejšie: 2D horizontálny hranol s polygon. prierezom (polyg. prism),
slangovo – „Talwaniho vzťah“

Odvodili Talwani and Ewing (1960), pričom vychádzali z konceptu komplexného potenciálu a fundamentálne teleso bol hranol s trojuholníkovým prierezom.

Dôležité sú súradnice rohov (x_i, z_i) polygonálneho prierezu.

Výsledný vzťah (napr. skriptá Gravimetria, str. 124):



$$V_z(0,0) = 2\pi\sigma \sum_{i=1}^N \frac{x_i z_{i+1} - z_i x_{i+1}}{(x_{i+1} - x_i)^2 + (z_{i+1} - z_i)^2} \left[(x_{i+1} - x_i) \cdot \left(\arctg \frac{x_{i+1}}{z_{i+1}} - \arctg \frac{x_i}{z_i} \right) + (z_{i+1} - z_i) \ln \sqrt{\frac{x_{i+1}^2 + z_{i+1}^2}{x_i^2 + z_i^2}} \right]$$

priama úloha v gravimetrii – príklad odvodu V_z pre jednoduché teleso

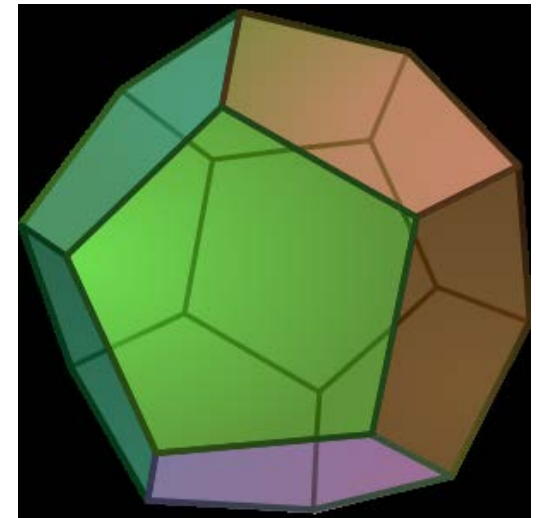
a najmodernejší vzťah – tzv. 3D polyhedrálny hranol (polyhéder)

Odvodili viacerí autori koncom 80ich a v 90ich rokoch 20. Storočia – napr. Götze a Lahmayer (1988), Pohánka (1988) pričom vychádzali z 3D ekvivalentu Gauss-Ostrogradského vety (prvé vydokladovanie publikovania tohto vzťahu: Sludsky (1863) a Mehler (1866)).



Výsledný vzťah (napr. skriptá Gravimetria, str. 128):

$$\begin{aligned} &= \ln \left(s + \sqrt{s^2 + a_{i,j}^2 + \xi_i^2} \right) + \frac{\xi_i}{a_{i,j}} \left[\operatorname{arctg} \frac{s^2 + a_{i,j}^2 + s \sqrt{s^2 + a_{i,j}^2 + \xi_i^2}}{a_{i,j} \xi_i} - \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{arctg} \frac{s}{a_{i,j}} \right] \Bigg|_{p_{i,j}}^{g_{i,j} + v_{i,j}} = \ln \frac{g_{i,j} + v_{i,j}}{p_{i,j} + u_{i,j}} + \frac{\xi_i}{a_{i,j}} \cdot \\ &\quad \cdot \left[\operatorname{atg}_2(a_{i,j}(v_{i,j} + \xi_i + g_{i,j}), g_{i,j}(v_{i,j} + \xi_i + g_{i,j}) + \xi_i(v_{i,j} + \xi_i)) - \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{atg}_2(a_{i,j}(u_{i,j} + \xi_i + p_{i,j}), p_{i,j}(u_{i,j} + \xi_i + p_{i,j}) + \xi_i(u_{i,j} + \xi_i)) \right] = \end{aligned}$$



priama úloha v gravimetrii – príklad odvodu V_z pre jednoduché teleso

a najmodernejší vzťah – tzv. 3D polyhedrálny hranol (polyhéder)

General 3D polyhedra			
Density contrast	Singularity-free	Components	References
Constant	–	g^z	Paul (1974)
Constant	–	g^z, ϕ	Barnett (1976)
Constant	–	$\nabla\phi, \nabla\nabla\phi$	Okabe (1979)
Constant	✓	ϕ	Waldvogel (1979)
Constant	✓	$\nabla\phi$	Pohanka (1988) Götze and Lahmayer (1988)
Constant	✓	$\nabla\nabla\phi$	Kwok (1991)
Constant	✓	$\nabla\phi$	Holstein and Ketteridge (1996)
Constant	✓	$\phi, \nabla\phi, \nabla\nabla\phi$	D'Urso (2013, 2014a)
Constant	✓	$\nabla\phi$	Conway (2015)
Linear	✓	$\nabla\phi$	Hansen (1999)
Linear	✓	$\phi, \nabla\phi, \nabla\nabla\phi$	Holstein (2003)
Linear	✓	ϕ	Hamayun and Tenzer (2009)
Linear	✓	$\phi, \nabla\phi, \nabla\nabla\phi$	D'Urso (2014b)
Constant	✓	$\phi, \nabla\phi$	Our approach
Linear	✓	$\phi, \nabla\phi$	Our approach
Quadratic	✓	ϕ	Our approach

Symbols ✓ and – indicate the availability and non-availability of a singularity-free analytic formula. Symbol ϕ denotes the gravitational potential, $\nabla\phi$ denotes the gravitational field and $\nabla\nabla\phi$ denotes the gravity gradient tensor (e.g., Beiki and Pedersen 2010; Abtahi et al. 2016)

Fotka z diskusie Nemeckej geofyzikálnej konferencie (2009):

Prof. Götze

prof. Talwani

