

# Priama úloha v magnetometrii

- magnetický potenciál
- potenciál magnetického dipólu
- magnetický potenciál pre 3D teleso
- výpočet zložiek magnetickej indukcie
- Poissonov teorém
- vzťahy pre jednoduché geometrické tvary
- parametre ovplyvňujúce tvar anomálie  $\Delta T$
- demagnetizačný faktor

# magnetický potenciál

Magnetické pole patrí (tak ako gravitačné) medzi tzv. potenciálové polia, to sú take pri ktorých vieme vyjadriť ich intenzitu pomocou gradient potenciálu:

$$\mathbf{H} = -\text{grad } W, \quad (1)$$

kde  $\mathbf{H}$  je intenzita magnetického poľa (v tomto prípade nie horiz. zložka  $\mathbf{T}$ ).  $W$  sa tiež nazýva ako skalárny magnetický potenciál (existuje aj vektorový), fyz. jednotka [A], (pri vektore  $\mathbf{H}$  to bolo [A.m<sup>-1</sup>]).

Magnetický potenciál je hypotetická veličina, nedá sa merať. Slúži na matematický popis magnetických polí.

Na zopakovanie:  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \quad (1b)$

kde  $\mu = \mu_r \cdot \mu_0$

$\mu_0$  – permeabilita vákua ( $4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$ )

V priamych úlohách v magnetometrii sa často používajú aj parametre  $c$  a  $c'$ :

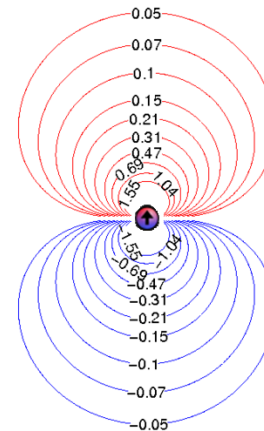
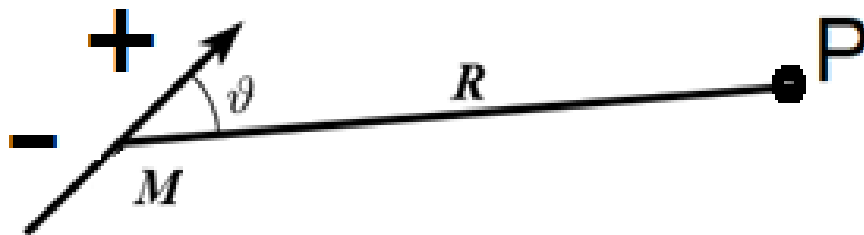
$$c = \mu_0 c', \quad c' = 1/4\pi.$$

# potenciál magnetického dipólu

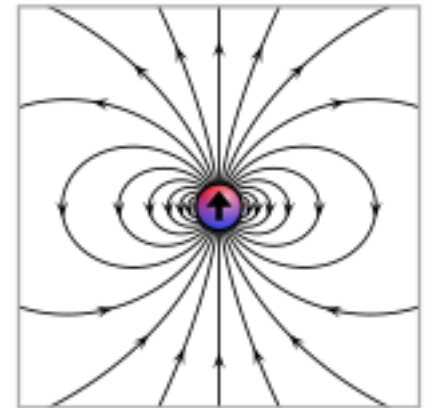
Potenciál magnetického dipólu je možné odvodiť veľmi podobne, ako to bolo v prípade elektrického dipólu (skriptá z Matem. základov..., I. diel, 3. ročník, str. 14-16) – ako limitný prípad dvoch hypotetických magnetických množstiev, priblížených veľmi blízko ku sebe. Výsledkom takéhoto odvodu je vzťah:

$$W = c' \frac{M \cos \theta}{R^2}, \quad (2)$$

kde  $R$  je vzdialenosť bodu výpočtu  $P$  od stredu dipólu,  $M$  je tzv. **magnetický dipólový moment**,  $\theta$  je uhol medzi smerom  $R$  a smerom dipólu.



ekvipotenciálne čiary



siločiary

Pozn.: Snažte sa pochopiť význam funkcie  $\cos(\theta)$  vo vzorci (2). Pre akú polohu bodu  $P$  nadobudne nulovú hodnotu, hodnotu  $+1$  a hodnotu  $-1$ ?

# magnetický potenciál pre 3D teleso – všeobecný zápis

Magnetický potenciál pre všeobecné teleso sa dá odvodiť podobným spôsobom, ako tomu bolo v gravimetrii ( $V$  – gravitačný potenciál):

$$V = \kappa \iiint_{\tau} \frac{\sigma}{r} d\tau$$

(viď prednášky z predmetu Gravimetria 1).

Porovnaním vzťahov pre gravitačný potenciál hmotného bodu (skriptá z Matem. základov..., I. diel, 3. ročník, str. 13) a magnetický potenciál dipólu (predchádzajúca snímka, vzťah (2)) môžeme na základe analógie písať základný vzťah pre **magnetický potenciál  $W$**  pre 3D teleso:

$$W = c' \iiint_{\tau} \frac{M \cos \theta}{r^2} d\tau \quad , \quad (3)$$

kde  $\tau$  je objem daného 3D telesa a vyjadruje sa rôznym spôsobom (s využitím Lamého parametrov) pre rôzne súradnicové systémy. Väčšina našich odvození bude realizovaná v kartézskom pravouhlom systéme.

## zložky vektora magnetickej indukcie (odvodené z magnetického potenciálu)

Pri vyjadrení zložiek anomálnej časti vektora magnetickej indukcie  $\Delta T$  ( $\Delta T = T - T_n$ ) vychádzame zo vzťahov (1) a (1b):

$$X = -\mu_0 \partial W / \partial x, \quad Y = -\mu_0 \partial W / \partial y, \quad Z = -\mu_0 \partial W / \partial z, \quad (4)$$

(kvôli zjednodušeniu uvádzame iba veľkosti zložiek, bez vektorového zápisu).

$$H = \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad (5a) \quad \Delta T = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}. \quad (5b)$$

Po viacerých matematických úpravách (skriptá V. Pašteka, Magnetometrický prieskum, str. 82-83) získame (pri uvážení prípadu  $D = 0^\circ$ ):

$$\Delta T = H \cos(I) \cos(D) + Z \sin(I) \quad (6)$$

kde  $I$  je inklinácia a  $D$  deklinácia vektora celkovej magnetizácie.

Pri uvážení iba indukovanej magnetizácie je smer celkovej magnetizácie identický so smerom vektora magnetickej indukcie  $T$ .

# Poissonov teorém – vzťah medzi magnetickým a gravitačným potenciálom

V teórii potenciálu je možné odvodiť nasledujúci vzťah (tzv. Poissonov teorém), ktorý popisuje vzťah medzi prvými deriváciami gravitačného potenciálu a magnetickým potenciálom:

$$W = -\frac{c'}{\kappa\sigma} (M_x V_x + M_y V_y + M_z V_z), \quad (7)$$

kde  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  sú zložky vektora celkovej magnetizácie a  $V_x$ ,  $V_y$ ,  $V_z$  sú parciálne derivácie gravitačného potenciálu  $V$  podľa  $x$ ,  $y$  a  $z$ .

$\kappa$  je gravitačná konštanta,  $\sigma$  je hustota a  $c' = 1/4\pi$ .

# vzťahy pre jednoduché geometrické tvary(1/2)

Vo viacerých učebniciach je možné nájsť vzťahy pre rôzne jednoduché geometrické telesá, pre ktoré je možné analyticky riešiť integral (3) pre magnetický potenciál  $W$  a potom z neho pomocou parciálnych derivácií určiť zložky  $X$ ,  $Y$ ,  $H$  a  $Z$  (vzťahy 4 a 5a) a napokon anomálie  $\Delta T$  pomocou vzťahu (6).

Bežne dostupné telesá:

- guľa (dipól),
- vertikálna tyč (hĺbkovo neobmedzená a aj obmedzená),
- horizontálny valec (2D prípad),
- tenká vertikálna doska (2D prípad),
- hrubá vertikálna doska (2D prípad),
- hrubá šikmá doska (2D prípad),
- pravouhlý stupeň (2D prípad),
- šikmý stupeň (2D prípad),
- horizontálny 2D hranol s polygonálnym prierezom (“Talwani”),
- 3D polyéder (“Pohánka”).

## vzťahy pre jednoduché geometrické tvary(2/2)

guľa (M je veľkosť celkovej magnetizácie v nT):

$$\Delta T(x, y, z) = \frac{M}{(x^2 + z^2)^{5/2}} \left[ (z^2 - x^2) \cos 2I - 3xz \sin 2I + x^2 \cos^2 I + z^2 \sin^2 I \right]$$

---

2D horizontálny valec:

$$\Delta T(x, z) = \frac{M}{(x^2 + z^2)^2} \left[ (z^2 - x^2) \cos 2I - 4xz \sin 2I \right],$$

---

2D šikmá doska (dajka):

$$\Delta T(x, z) = \frac{Ax + Bz}{x^2 + z^2},$$

kde  $A = -2b(M_x \sin I + M_z \cos I \sin \alpha)$  a

$B = 2b(-M_x \cos I \sin \alpha + M_z \sin I)$ ,

$M_x$  a  $M_z$  sú zložky magnetizačného vektora,

$2b$  je mocnosť (hrúbka) dosky v x-ovom smere,

$\alpha$  je azimut profilu.



# parametre ovplyvňujúce tvar anomálie $\Delta T$

(dôležité pre kvalitatívnu/kvantitatívnu interpretáciu)

Situácia s rôznorodosťou tvarov anomálií je v magnetometrii omnoho zložitejšia, ako to bolo v gravimetrii.

Tvary anomálií  $\Delta T$  závisia najmä od nasledujúcich skutočností:

1. Parametrov indukujúceho poľa a celkovej magnetizácie telesa.
2. Magnetickej susceptibility (najmä pri indukovanej magnetizácii).
3. Hĺbky uloženia telesa.
4. Tvaru telesa a orientácie jeho dlhšej osi.
5. Orientácii interpretačného profilu (pri profilových zobrazeniach).

## Tvary anomálií $\Delta T$ závisia najmä od nasledujúcich skutočností:

1. Parametrov indukujúceho poľa a celkovej magnetizácie telesa (aj remanentnej).

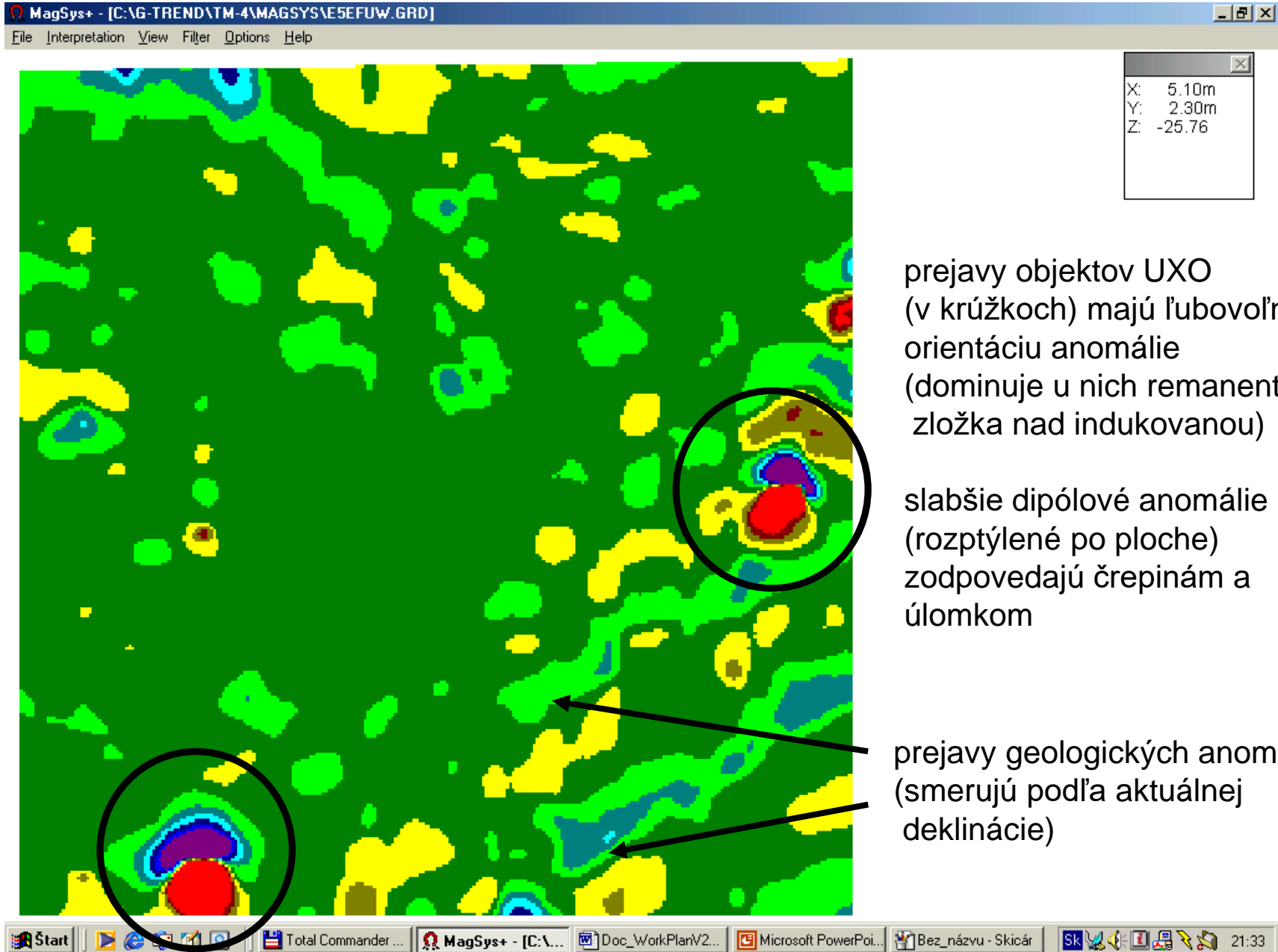
Tvar anomálie  $\Delta T$  má vždy **dipólový charakter** (aj keď niekedy môže budiť dojem iba monopolárneho charakteru).

Ak je v našich zemepisných dĺžkach a najmä šírkach minimum anomálie orientované približne smerom na geografický sever, tak ide s najvyššou pravdepodobnosťou o iba indukovanú magnetickú anomáliu.

Pri dominantnej remanentnej zložke (napr. pri bázických horninách alebo oceli môže byť orientácia anomálie ľubovoľná (viď ďalší snímok).

Vplyv inklinácie a deklinácie na výslednú anomáliu (napr. od gule) si môžete vyskúšať pri realizácii zadaní (modelovanie v softvéri Potent).

# príklad z UXO prieskumu aj s geologickými anomáliami (Montana, USA)



X: 5.10m  
Y: 2.30m  
Z: -25.76

prejavy objektov UXO  
(v krúžkoch) majú ľubovoľnú  
orientáciu anomálie  
(dominuje u nich remanentn.  
zložka nad indukovanou)

slabšie dipólové anomálie  
(rozptýlené po ploche)  
zodpovedajú črepinám a  
úlomkom

prejavy geologických anomálií  
(smerujú podľa aktuálnej  
deklinácie)

## Tvary anomálií $\Delta T$ závisia najmä od nasledujúcich skutočností:

### 2. Magnetickej susceptibility (najmä pri indukovanej magnetizácii)

A) Pre nižšie hodnoty objemovej mag. susceptibility platí viac menej lineárny vzťah: čím vyššia hodnota suscept. – tým vyššia magnetizácia, a v konečnom dôsledku aj tým väčšia amplitúda anomálie:

$$M_i = \kappa T ,$$

kde  $M_i$  je indukovaná magnetizácia,  $\kappa$  je objem. magn. susc. a  $T$  indukujúce pole.

Bežné anomálie od geologických útvarov sa pohybujú rádovo v **desiatkách až stovkách nanoTesla**.

Najdominantnejšie anomálie sú od bázických magmatických hornín.

Pri archeologických objektoch to môžu byť iba **jednotky [nT]**,

pri detekcii oceľových objektov (potrubia, konštrukcie, zasypané, pažnice vrtov, nevybuchnutá munícia) to môžu byť až **tisícky [nT]**.

B) Pri vyšších hodnotách objemovej mag. susceptibility (nad 0.1 [SI]) sa však prejavuje tzv. demagnetizačný efekt:

$$M_i = \kappa' T = \kappa / (1 + \kappa N) T ,$$

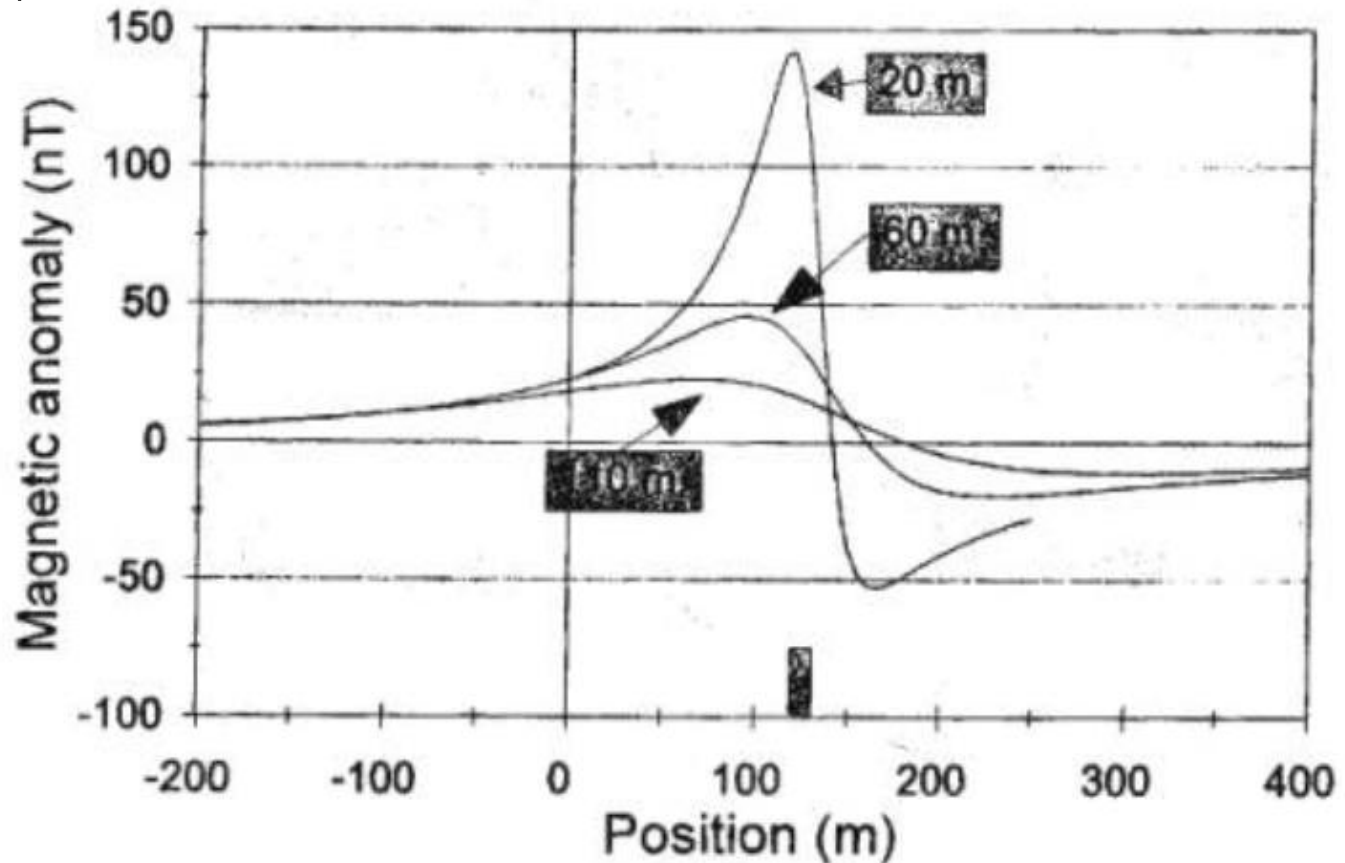
kde  $\kappa'$  je tzv. zdanlivá magn. susceptibilita a  $N$  tzv. demagnetizačný faktor.

Viac o tomto faktore ďalej...

## Tvary anomálií $\Delta T$ závisia najmä od nasledujúcich skutočností:

### 3. Hĺbky uloženia telesa

Podobne, ako v gravimetrii aj tu platí, že čím hlbšie je uložený zdroj anomálie, tak tým má daná anomália nižšiu amplitúdu a väčšiu šírku (vlnovú dĺžku).



## **Tvary anomálií $\Delta T$ závisia najmä od nasledujúcich skutočností:**

### 4. Tvaru telesa a orientácie jeho dlhšej osi

Tvar anomálie je výrazne ovplyvnený tvarom telesa – najmä jeho natiahnutím v jednom smere.

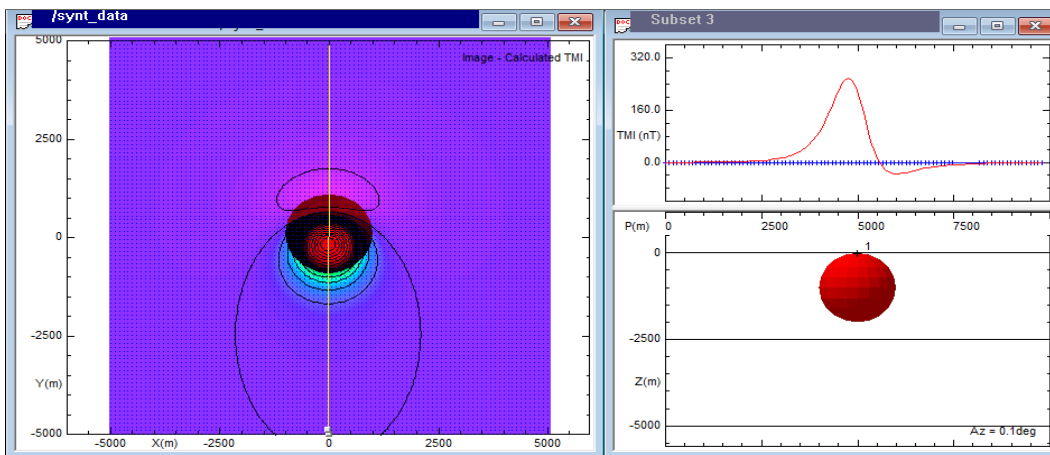
Kým pri symetrických telesách (napr. guľa) hrajú najdôležitejšiu úlohu Parametre indukujúceho poľa, pri natiahnutých telesách (napr. doska) sú to geometrické parameter daného telesa.

Vplyv geometrie telesa na výslednú anomáliu si môžete vyskúšať pri realizácii zadaní (modelovanie v softvéri Potent) pri orovnaní anomálií od gule a dosky (pri tých istých hodnotách I a D).

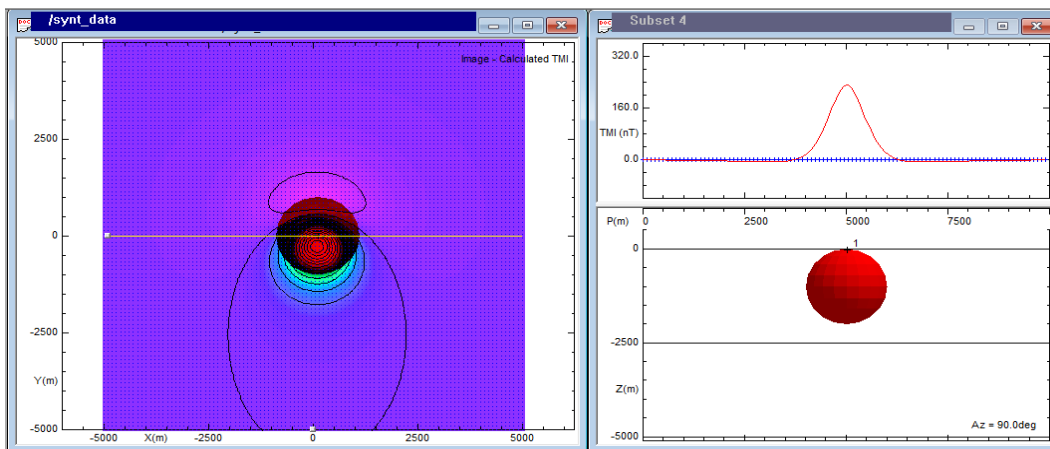
## Tvary anomálií $\Delta T$ závisia najmä od nasledujúcich skutočností:

5. Orientácii interpretačného profilu (pri profilových zobrazeniach)

Táto skutočnosť sa dá pekne overiť počas realizácie zadání s modelovaním (softvér Potent).



$I = 65^\circ$ ,  $D = 0^\circ$   
profil v J-S smere



$I = 65^\circ$ ,  $D = 0^\circ$   
profil v Z-V smere

# demagnetizačný faktor N

Pri vysokých hodnotách objemovej magnetickej susceptibility ( $>0.1$  [SI]) vzniká vnútorné pole v telese, ktoré zoslabuje celkové anomálne pole. Táto situácia sa opisuje pomocou tzv. zdanlivej objem. mag. susceptibility:

$$\kappa' = \kappa / (1 + \kappa N).$$

N je tzv. demagnetizačný faktor, ktorý vyjadruje “silu demagnetizácie”. Jeho hodnota sa pohybuje od 0 do 1.

Pre niektoré geometrické tvary je možné ho matematicky odvodiť.

Napr. pre guľu má hodnotu  $1/3$ .

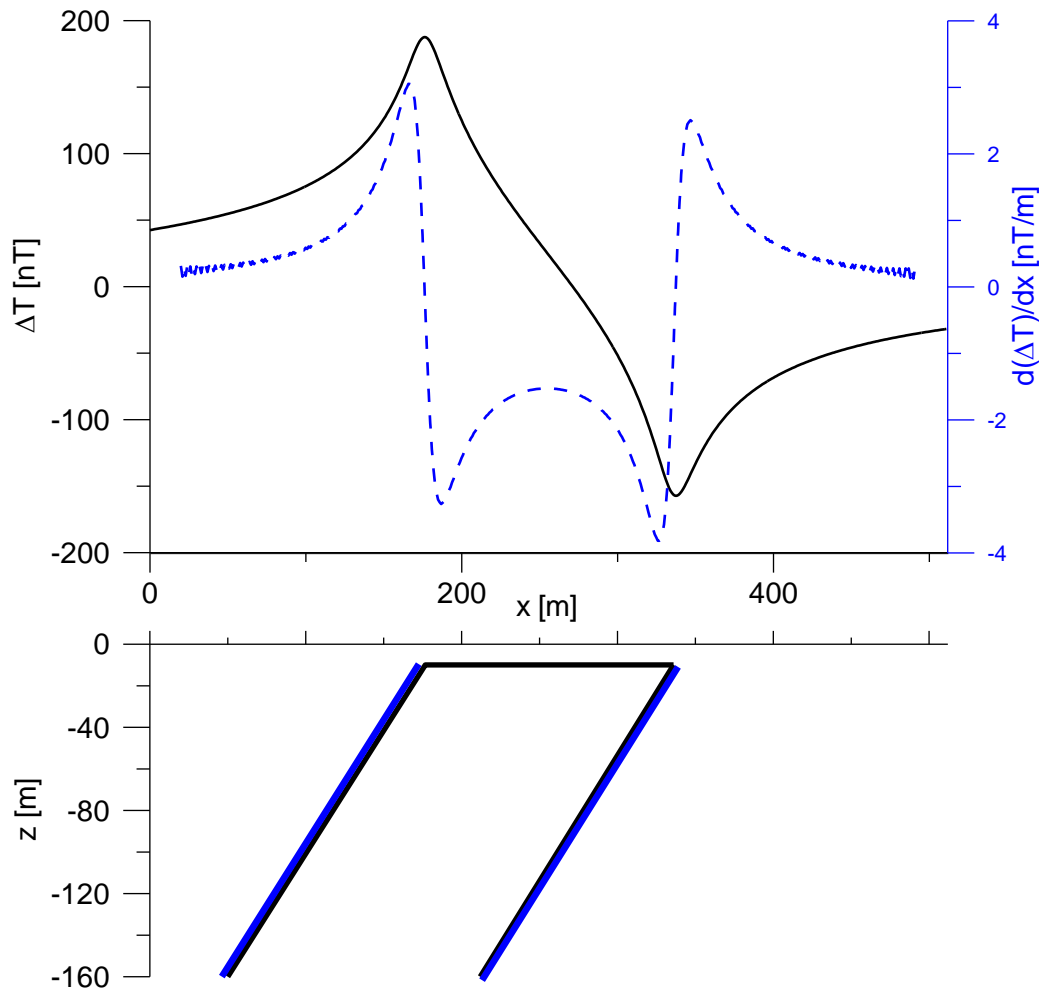
Pre kruhový valec, ktorý je zmangetizovaný kolmo na svoju os je jeho hodnota cca  $1/2$ .

Aj je však takýto valec veľmi dlhý, s malým prierezom a magnetizácia je pozdĺž jeho osi, tak hodnota N sa blíži nule.

Pozn.: Niektoré lepšie modelovacie softvéry majú v sebe zabudovanú možnosť uváženia demagnetizačného efektu počas modelovania.



## poznámka – anomálne magn. pole hrubej dosky



Je zaujímavé, že keď spočítame numericky horizontálnu deriváciu (modrá prerušovaná křivka) magn. poľa od hrubej dosky (čierna plná křivka), tak získame pole ktoré zodpovedá situácii, ako keby sme na okrajoch hrubej dosky umiestnili dve tenké, navzájom protichodne zmagnetizované dosky. Táto vlastnosť sa niekedy využíva pri interpretácii (určujú sa polohy tých tenkých dosiek).