

# **VYSOKOŠKOLSKÉ SKRIPTÁ**

---

**UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE**

**Prírodovedecká fakulta**

**Katedra inžinierskej geológie, hydrogeológie a aplikovanej geofyziky**

**Roland KARCOL**

## **VYBRANÉ ŠPECIÁLNE FUNKCIE V APLIKOVANEJ GEOFYZIKE 2**



**2021**

**UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE**

© RNDr. Roland Karcol, PhD.

Univerzita Komenského v Bratislave, Prírodovedecká fakulta, Geologická sekcia, Katedra inžinierskej geológie, hydrogeológie a aplikovanej geofyziky

2021

Recenzent

prof. RNDr. Roman Pašteka, PhD.

Za odbornú stránku vysokoškolských skrípt zodpovedá autor.

Vyšlo ako elektronická publikácia.

Rozsah 90 strán, 4,68 AH, vydanie prvé.

Univerzita Komenského v Bratislave



Dielo je vydané pod medzinárodnou licenciou Creative Commons CC BY-SA 4.0 (vyžaduje sa: povinnosť uvádzať pôvodného autora diela; povinnosť odvodené dielo zdieľať pod rovnakou licenciou ako pôvodné dielo). Viac informácií o licencií a použití diela:

<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>

Dostupné na: <http://www.kaeg.sk/zamestnanci/roland-karcol/>

ISBN 978-80-223-5298-7

Predkladané vysokoškolské skriptá sú určené pre študentov magisterského a doktorandského štúdia študijného odboru Vedy o Zemi v študijnom programe Aplikovaná a environmentálna geofyzika na Prírodovedeckej fakulte Univerzity Komenského v Bratislave.

# Obsah

|                                                                           |    |
|---------------------------------------------------------------------------|----|
| Predhovor .....                                                           | 6  |
| 1. Sféricke funkcie.....                                                  | 7  |
| 1.1 Legendreove polynómy.....                                             | 7  |
| 1.2 Ortogonalnosť Legendreových polynómov .....                           | 8  |
| 1.3 Legendreove polynómy rôznych rádov .....                              | 11 |
| 1.4 Hodnoty Legendreových polynómov pri argumentoch rovných +1 a -1 ..... | 12 |
| 1.5 Rekurentný vzťah pre Legendreove polynómy.....                        | 13 |
| 1.6 Rozvoj funkcie $1/R$ do radu Legendreových polynómov .....            | 14 |
| 1.7 Výraz pre deriváciu Legendreovho polynómu.....                        | 17 |
| 1.8 Vyjadrenie Legendreovho polynómu určitým integrálom .....             | 18 |
| 1.9 Diferenciálna rovnica pre Legendreove polynómy .....                  | 20 |
| 1.10 Pridružené Legendreove funkcie.....                                  | 22 |
| 1.11 Objemové a povrchové sférické funkcie.....                           | 27 |
| 1.12 Integrálne vzťahy pre sférické funkcie.....                          | 30 |
| 1.13 Rozvinutie do radu sférických funkcií .....                          | 32 |
| 2. Príklady na sférické funkcie.....                                      | 36 |
| 2.1 Vodivá guľa v poli jednosmerného prúdu.....                           | 36 |
| 2.2 Vodivá guľa v poli bodového zdroja prúdu .....                        | 41 |
| 2.3 Gaussova teória zemského magnetizmu .....                             | 56 |
| 2.5 Potenciál objemovo rozdelených hmôt .....                             | 59 |
| 3. Lamého funkcie.....                                                    | 62 |
| 3.1 Eliptické súradnice .....                                             | 62 |
| 3.2 Laplaceova rovnica v ortogonálnych súradniciach .....                 | 66 |
| 3.3 Laméova funkcia .....                                                 | 68 |
| 3.4 Riešenia Laméovej rovnice .....                                       | 72 |
| 3.5 Ortogonalnosť Lamého funkcií .....                                    | 75 |

|                                                                            |    |
|----------------------------------------------------------------------------|----|
| 3.6 Rozvoj do radu Lamého funkcií .....                                    | 77 |
| 3.7 Lamého funkcia druhého druhu .....                                     | 78 |
| 4. Príklady na Lamého funkcie .....                                        | 81 |
| 4.1 Magnetizácia homogénneho elipsoidu v homogénnom magnetickom poli ..... | 81 |
| 4.2 Určenie kapacity elipsoidu .....                                       | 87 |
| Literatúra .....                                                           | 90 |

## Predhovor

Druhý diel skrípt zameraných na špeciálne funkcie je venovaný sférickým a eliptickým funkciám. S Legendreovými polynómami sme sa už stretli na Matematických základoch geofyzikálnych metód v letnom semestri tretieho ročníka. Predkladané učebné texty túto tému rozvíjajú. Tiež sú predstavené Lamého funkcie, ktorými sa zaoberáme na Vybraných kapitolách z matematickej fyziky v zimnom semestri prvého ročníka magisterského štúdia na našej katedre. Autor bude vďačný za upresňujúce poznámky, upozornenia na chyby či nepresnosti v predkladanom texte.

# 1. Sféricke funkcie

Pri riešení mnohých úloh spätých s riešením Laplaceovej rovnice sa stretávame s osobitou triedou funkcií nazývaných sférickými. Medzi najjednoduchšie funkcie z tejto skupiny patria tzv. Legendreove polynómy, používané v rade úloh aplikovanej geofyziky najmä multipólový rozvoj v elektrostatike alebo pri aproximácii gravitačného a magnetického poľa Zeme. Preto štúdium tejto triedy funkcií začneme práve týmito polynómami, s ktorými sme sa už stretli na Teoretických základoch geofyzikálnych metód 2 v letnom semestri tretieho ročníka.

## 1.1 Legendreove polynómy

Legendreovým polynómom budeme rozumieť funkciu:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}, \quad (1.1.1)$$

kde  $n$  je rád Legendreovho polynómu a  $n \in \mathbb{N} + \{0\}$ . Posledný výraz už poznáme – ide o Rodriguesov vzorec.

Určenie Legendreovho polynómu teda vyžaduje  $n$  násobné derivovanie výrazu  $(x^2 - 1)^n$  a teda pri najvyššej mocnine premennej  $x$  bude po derivovaní stáť číselný koeficient tvaru:

$$2n(2n-1)(2n-2)\dots(n+1).$$

Ostáva teda ešte vynásobiť tento koeficient výrazom  $\frac{1}{2^n n!}$  podľa (1.1.1) a nakoniec dostaneme:

$$\frac{2n(2n-1)(2n-2)\dots(n+1)}{2^n n!}.$$

Čitateľ a menovateľ posledného výrazu ešte vynásobíme členom  $n!$  a konečne pre číselný koeficient pri najvyššej mocnine dostaneme:

$$\frac{2n(2n-1)(2n-2)\dots(n+1)n(n-1)\dots 2 \cdot 1}{2^n (n!)^2} = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}. \quad (1.1.2)$$

## 1.2 Ortogonálnosť Legendreových polynómov

Funkcie  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$  označujeme ako ortogonálny systém funkcií premennej  $x$  ak na intervale  $(a, b)$  platí:

$$\int_a^b \varphi_m(x) \varphi_n(x) dx = 0, \text{ pri } m \neq n.$$

O Legendreových polynómoch potom hovoríme, že sú ortogonálne na intervale  $(-1, 1)$ , t.j. že platí rovnica:

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = 0, \text{ pri } m \neq n. \quad (1.2.1)$$

Pri dôkaze vyjdeme z rovnice (1.1.1), z ktorej je jasné, že Legendreov polynóm je stupňa  $n$  a preto derivovanie  $(n + 1)$  krát (alebo viacej) vedie k nule. Položme teda vo výraze (1.2.1)  $n > m$ :

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^1 P_m(x) \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n} dx.$$

Pravú časť integrujeme *per partes* a dostaneme:

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \frac{1}{2^n n!} \left( \left[ P_m(x) \frac{d^{n-1} (x^2 - 1)^n}{dx^{n-1}} \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{d P_m(x)}{dx} \cdot \frac{d^{n-1} (x^2 - 1)^n}{dx^{n-1}} dx \right)$$

Pretože funkcia  $(x^2 - 1)^n$  má  $n$  násobné korene v bodoch  $-1$  a  $+1$ , tak derivácia rádu  $(n - 1)$  má tie isté korene. Preto pri dosadení hraníc v prvom člene v hranatých zátvorkách dostaneme nulu:

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = -\frac{1}{2^n n!} \left( \int_{-1}^1 \frac{d P_m(x)}{dx} \cdot \frac{d^{n-1} (x^2 - 1)^n}{dx^{n-1}} dx \right).$$

Ďalšia integrácia *per partes* vzhľadom na korene, ktoré sme práve použili, nám dá:

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \frac{1}{2^n n!} \left( \int_{-1}^1 \frac{d^2 P_m(x)}{dx^2} \cdot \frac{d^{n-2} (x^2 - 1)^n}{dx^{n-2}} dx \right).$$

Opakovaním tejto operácie dostaneme konečne:

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \frac{(-1)^{m+1}}{2^n n!} \left( \int_{-1}^1 \frac{d^{m+1} P_m(x)}{dx^{m+1}} \cdot \frac{d^{n-m-1} (x^2 - 1)^n}{dx^{n-m-1}} dx \right).$$

V tomto výraze je pod integrálom derivácia rádu  $(m + 1)$  z  $P_m(x)$ , a teda, podľa predpokladov zo začiatku je rovná nule a preto:

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = 0,$$

čo bolo treba dokázať.

Analogicky možno dokázať i platnosť tvrdenia:

$$\int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx = 0,$$

kde  $f(x)$  je ľubovoľný polynóm stupňa menšieho ako  $n$ .

Skúmame teraz situáciu, keď v rovnici (1.2.1) položíme  $m = n$ . Ukážeme, že:

$$\int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1} \quad (1.2.2)$$

Podobne, ako sme urobili v odvodení vlastnosti ortogonálnosti, prevedieme integráciu *per partes*:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx &= \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^1 P_n(x) \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n} dx = \\ &= \frac{1}{2^n n!} \left( \left[ P_n(x) \frac{d^{n-1} (x^2 - 1)^n}{dx^{n-1}} \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{dP_n(x)}{dx} \frac{d^{n-1} (x^2 - 1)^n}{dx^{n-1}} dx \right) \end{aligned}$$

Tak, ako v predchádzajúcom prípade, prvý člen v oboj zátvorke je rovný nule a preto:

$$\int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx = -\frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^1 \frac{dP_n(x)}{dx} \frac{d^{n-1} (x^2 - 1)^n}{dx^{n-1}} dx.$$

Integrujeme ďalej *per partes* s predpokladom, že  $-1$  a  $1$  sú koreňmi funkcie  $(x^2 - 1)^n$  a jej derivácií rádov  $n - 1$  a nižších, a po  $n - 1$  operáciách dostaneme:

$$\int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx = \frac{1}{2^n n!} \left( \left[ (-1)^{n-2} \frac{d^{n-2} P_n(x)}{dx^{n-2}} \frac{d(x^2 - 1)^n}{dx} \right]_{-1}^1 - (-1)^{n-2} \int_{-1}^1 \frac{d^{n-1} P_n(x)}{dx^{n-1}} \frac{d(x^2 - 1)^n}{dx} dx \right),$$

alebo:

$$\int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx = \frac{(-1)^{n-1}}{2^n n!} \int_{-1}^1 \frac{d^{n-1} P_n(x)}{dx^{n-1}} \frac{d(x^2 - 1)^n}{dx} dx.$$

Nakoniec posledná integrácia *per partes* dá:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx &= \frac{(-1)^{n-1}}{2^n n!} \left( \left[ \frac{d^{n-1} P_n(x)}{dx^{n-1}} (x^2 - 1)^n \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n \frac{d^n P_n(x)}{dx^n} dx \right) = \\ &= \frac{(-1)^n}{2^n n!} \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n \frac{d^n P_n(x)}{dx^n} dx\end{aligned}$$

Pod integrálom sa nachádzajúci násobiteľ  $\frac{d^n P_n(x)}{dx^n}$  môže byť vyčíslený osobitne. Skutočne, táto derivácia môže byť napísaná nasledovne (pomocou (1.1.1)):

$$\frac{1}{2^n n!} \frac{d^{2n} (x^2 - 1)}{dx^{2n}}.$$

Výsledkom nezávislého derivovania rádu  $2n$  takéhoto mnohočlena je:

$$2n(2n-1)(2n-2)\dots 2 \cdot 1 = (2n)!$$

Preto:

$$\int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n dx = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \int_{-1}^1 (1 - x^2)^n dx.$$

Aby sme vyriešili posledný integrál, dosadíme  $x = \sin \vartheta$  a dostaneme tvar:

$$\int_{-1}^1 (1 - x^2)^n dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} \vartheta d\vartheta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} \vartheta d\vartheta.$$

Použijeme výraz

$$\int \cos^m \vartheta d\vartheta = \frac{1}{m} \cos^{m-1} \vartheta \sin \vartheta + \frac{m-1}{m} \int \cos^{m-2} \vartheta d\vartheta,$$

a dostaneme:

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} \vartheta d\vartheta = \frac{2}{2n+1} \left[ \cos^{2n} \vartheta \sin \vartheta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2n}{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-1} \vartheta d\vartheta,$$

alebo po dosadení hraníc:

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} \vartheta d\vartheta = 2 \frac{2n}{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-1} \vartheta d\vartheta.$$

Po  $n$  násobnom použití tohto vzorca pridáme k rovnici:

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} \vartheta d\vartheta = 2 \frac{2n(2n-2)\dots 2}{(2n+1)(2n-1)\dots 3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \vartheta d\vartheta = 2 \frac{2n(2n-2)\dots 2}{(2n+1)(2n-1)\dots 3}.$$

Takto máme:

$$\int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \cdot 2 \frac{2n(2n-2)\dots 2}{(2n+1)(2n-1)\dots 3}.$$

Vynásobením čitateľa a menovateľa posledného zlomku výrazom  $2n(2n-2)\dots 2 = 2^n n(n-1)\dots 1 = 2(2n)!$  dostaneme:

$$\int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx = \frac{2(2n)! \cdot 2^n n! \cdot 2^n n!}{2^{2n} (n!)^2 (2n+1) 2n(2n-1)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{2(2n)!}{(2n+1)!},$$

alebo po vykrátení:

$$\int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1}.$$

### 1.3 Legendreove polynómy rôznych rádo

Dosadením rôznych hodnôt parametra  $n$  do (1.1.1) a po vykonaní príslušných derivácií získame Legendreove polynómy rôznych rádo:

$$P_0(x) = 1$$

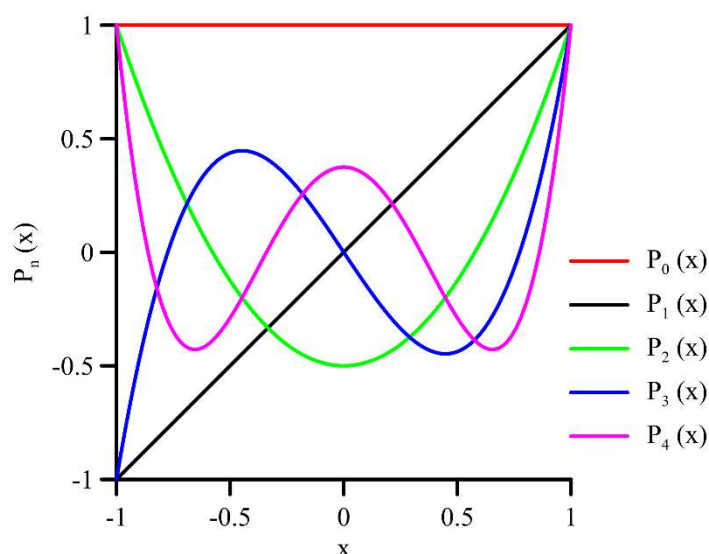
$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$\vdots$



**Obr. 1:** Legendreove polynómy rôznych rádo.

## 1.4 Hodnoty Legendreových polynómov pri argumentoch rovných +1 a -1

Z Obr. 1 vidíme, že zobrazené polynómy „začínajú“ v hodnote  $-1$  alebo  $+1$  a „končia“ v hodnote  $+1$ . Dokážme, že ide o univerzálnu vlastnosť.

Keď vo vzorci pre  $n$ -tú deriváciu súčinu dvoch funkcií:

$$(u \cdot v)^{(n)} = u^{(n)}v + \frac{n}{1!}u^{(n-1)}v^{(1)} + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v^{(2)} + \dots + uv^{(n)}$$

dosadíme za  $u = (x-1)^n$  a  $v = (x+1)^n$  a dosadíme to do výrazu na výpočet Legendreovho polynómu stupňa  $n$ , dostaneme.

$$\begin{aligned} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n} &= \frac{d^n [(x-1)^n (x+1)^n]}{dx^n} = \\ &= \frac{d^n (x-1)^n}{dx^n} \cdot (x+1)^n + \frac{n^2}{1!} \frac{d^{n-1} (x-1)^n}{dx^{n-1}} \cdot (x+1)^{n-1} + \\ &+ \frac{n^2 (n-1)^2}{2!} \frac{d^{n-2} (x-1)^n}{dx^{n-2}} \cdot (x+1)^{n-2} + \dots + \frac{(n!)^2}{n!} (x-1)^n. \end{aligned}$$

Keď uvažíme, že:

$$\begin{aligned} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n} &= n(n-1)(n-2) \dots 2 \cdot 1, \\ \frac{d^{n-1} (x-1)^n}{dx^{n-1}} \cdot (x+1)^n &= n(n-1)(n-2) \dots 2 \cdot (x-1), \\ \frac{d^{n-2} (x-1)^n}{dx^{n-2}} \cdot (x+1)^n &= n(n-1)(n-2) \dots 3 \cdot (x-1)^2, \\ &\vdots \\ \frac{d^{n-k} (x-1)^n}{dx^{n-k}} \cdot (x+1)^n &= n(n-1)(n-2) \dots (k+1) \cdot (x-1)^k, \end{aligned}$$

môžeme poslednú rovnicu prepísať do tvaru:

$$\begin{aligned} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n} &= n!(x+1)^n + \frac{n(n-1) \dots 2n^2}{1!} (x-1)(x+1)^{n-1} \\ &+ \frac{n(n-1) \dots 3n^2 (n-1)^2}{2!} (x-1)^2 (x+1)^{n-2} + \dots + n!(x-1)^n. \end{aligned}$$

Vynásobíme všetky členy rovnice  $\frac{1}{2^n n!}$  a položíme  $x=1$ , zistíme, že všetky členy pravej strany, okrem prvého, stávajú sa nulovými, a dostaneme.

$$\left[ \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n} \right]_{x=1} = P_n(1) = \frac{n! 2^n}{2^n n!} = 1.$$

Analogicky, keď položíme  $x = -1$ , zistíme, že takto sa stávajú nulovými všetky členy okrem posledného, a dostaneme:

$$\left[ \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \right]_{x=-1} = P_n(-1) = \frac{n!(-2)^n}{2^n n!} = (-1)^n.$$

Týmto sú nájdené Legendreove polynómy pre argument rovný  $+1$  a  $-1$ .

## 1.5 Rekurentný vzťah pre Legendreove polynómy

Daný polynóm mocniny  $n$  vzhľadom k premennej  $x$  môže byť znázornený vo forme lineárnej funkcie Legendreovho polynómu rádu nie vyššieho ako  $n$ . Preto vyjadriť v tvare:

$$xP_n(x) = C_0 P_{n+1}(x) + C_1 P_n(x) + C_2 P_{n-1}(x) + C_3 P_{n-2}(x) + \dots, \quad (1.5.1)$$

kde  $C_i$  sú konštantné koeficienty. Ich určenie začneme koeficientom  $C_3$ . Obe strany rovnice (1.5.1) vynásobíme členom  $P_{n-2}(x)$  a integrujeme v hraniciach od  $-1$  do  $+1$ :

$$\int_{-1}^1 xP_n(x)P_{n-2}(x)dx = \int_{-1}^1 P_{n-2}(x) [C_0 P_{n+1}(x) + C_1 P_n(x) + C_2 P_{n-1}(x) + C_3 P_{n-2}(x) + \dots] dx. \quad (1.5.2)$$

S využitím vlastnosti ortogonálnosti je ľavá strana poslednej rovnice rovná nule a súčasne sú nulové všetky integrály na pravej strane kde sa vyskytuje súčin Legendreových polynómov rôznych rádov, t.j. všetky, okrem súčinu stojaceho pri koeficiente  $C_3$ , kde sa vyskytuje:

$$\int_{-1}^1 [P_{n-2}(x)]^2 dx = \frac{2}{2(n-2)+1}. \quad (1.5.3)$$

Je teda jasné, že koeficient  $C_3$  sa musí rovnať nule. Podobne možno ukázať nulovosť koeficientov  $C_4, C_5, \dots$ . Rovnicu (1.5.1) teda môžeme zatiaľ písať v tvare:

$$xP_n(x) = C_0 P_{n+1}(x) + C_1 P_n(x) + C_2 P_{n-1}(x). \quad (1.5.4)$$

Z tohto tvaru hneď vidíme, že aj koeficient  $C_1$  je rovný nule – ak je napr. rád Legendreovho polynómu párne číslo, tak ľavá strana obsahuje premennú  $x$  len v nepárnych mocninách a teda pravá strana nemôže obsahovať párne mocniny  $x$  a teda  $C_1$  musí byť nulové (podobne pre nepárny rád polynómu). Ďalej vidíme, že najvyššia mocnina premennej  $x$  na ľavej strane je rádu  $(n+1)$ . Na pravej strane obsahuje túto mocninu člen  $P_{n+1}(x)$  stojaci pri koeficiente  $C_0$ . Keď teda porovnáme číselné koeficienty stojace pri najvyšších mocninách (s využitím (1.1.2)), dostaneme:

$$\frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} = C_0 \frac{[2(n+1)]!}{2^{n+1} [(n+1)!]^2},$$

čo po úprave dáva:

$$C_0 = \frac{n+1}{2n+1}.$$

Nakoniec, keď v rovnici (1.5.4) položíme  $x=1$  tak, vzhľadom na  $P_n(1)=1$ , dostaneme:

$$1 = C_0 + C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{n}{2n+1}.$$

Keď konečne dosadíme získané hodnoty jednotlivých koeficientov do výrazu (1.5.1) tak po zrejmých úpravách dostaneme rekurentný výraz pre Legendreove polynómy:

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0. \quad (1.5.5)$$

Pripomeňme, že na Matematických základoch 2 sme tento výraz už odvodili, hoci iným spôsobom. Rekurentných výrazov je možné získať viacero, nie len pre samotné polynómy, ale aj pre ich derivácie.

## 1.6 Rozvoj funkcie $1/R$ do radu Legendreových polynómov

Majme vo sférickom súradnicovom systéme dané dva body, z ktorých je jeden vo vzdialenosti  $r$  od počiatku, druhý vo vzdialenosti rovnnej jednej, uhol medzi ich sprievodičmi označme  $\psi$ . Vzájomná vzdialenosť týchto bodov potom je:

$$R = \sqrt{r^2 - 2r \cos \psi + 1}. \quad (1.6.1)$$

Predpokladajme, že jeden z bodov je hmotným bodom. Potom je jeho potenciál, počítaný v bode druhom, daný výrazom:

$$f(r) = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r \cos \psi + 1}}, \quad (1.6.2)$$

teda ho budeme uvažovať ako funkciu premennej  $r$ . Rozviníme túto funkciu do Maclaurinovho radu:

$$f(r) = f(0) + \frac{r}{1!} f'(0) + \frac{r^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{r^n}{n!} f^{(n)}(0) + \dots,$$

potrebujeme teda hodnoty  $f(0), f'(0), \dots$ . S označením  $x = \cos \psi$  môžeme písať:

$$R^2 = r^2 - 2rx + 1.$$

Považujme  $x$  za konštantné a po derivácii posledného výrazu máme:

$$RdR = (r-x)dr \Rightarrow \frac{dR}{dr} = \frac{r-x}{R},$$

z čoho dostaneme:

$$\begin{aligned}
\frac{df(r)}{dr} &= \frac{d}{dR} \frac{1}{R} \cdot \frac{dR}{dr} = -\frac{r-x}{R^3}, \\
\frac{d^2 f(r)}{dr^2} &= -(r-x) \frac{d}{dR} \frac{1}{R^3} \cdot \frac{dR}{dr} - \frac{1}{R^3} \frac{d(r-x)}{dr} = \frac{3(r-x)^2}{R^5} - \frac{1}{R^3}, \\
\frac{d^3 f(r)}{dr^3} &= -\frac{15(r-x)^3}{R^7} + \frac{9(r-x)}{R^5}, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Do posledných výrazov dosadíme  $r = 0$  a pre hľadané číselné koeficienty dostaneme:

$$f(0) = 1; f'(0) = x; f''(0) = 3x^2 - 1; f'''(0) = 15x^3 - 9x.$$

Tieto hodnoty dosadíme do Maclaurinovho radu a dostaneme:

$$\begin{aligned}
f(r) &= \frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rx + 1}} = 1 + rx + r^2 \frac{3x^2 - 1}{2} + r^3 \frac{5x^3 - 3}{2} + \dots = \\
&= X_0 + X_1 r + X_2 r^2 + X_3 r^3 + \dots + X_n r^n + \dots,
\end{aligned} \tag{1.6.3}$$

kde sme zaviedli zjednodušujúce označenie číselných koeficientov pri mocninách premennej  $r$ .

Poslednú rovnicu derivujeme podľa  $r$  a dostaneme:

$$\frac{df(r)}{dr} = \frac{x-r}{(r^2 - 2rx + 1)^{\frac{3}{2}}} = X_1 + 2X_2 r + 3X_3 r^2 + \dots + nX_n r^{n-1} + \dots. \tag{1.6.4}$$

Zlomok v ľavej časti rovnice upravíme s využitím (1.6.3):

$$\begin{aligned}
\frac{x-r}{(r^2 - 2rx + 1)^{\frac{3}{2}}} &= \frac{x-r}{r^2 - 2rx + 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rx + 1}} = \\
&= \frac{x-r}{r^2 - 2rx + 1} (X_0 + X_1 r + X_2 r^2 + X_3 r^3 + \dots + X_n r^n + \dots).
\end{aligned}$$

Tento výraz dosadíme do (1.6.4) a po úprave dostaneme:

$$(x-r) \left( X_0 + X_1 r + X_2 r^2 + \dots + X_n r^n + \dots \right) = (r^2 - 2rx + 1) (X_1 + 2X_2 r + 3X_3 r^2 + \dots + nX_n r^{n-1} + \dots).$$

Porovnaním koeficientov stojacich pri  $n$ -tej mocnine premennej  $r$  v pravej i ľavej časti, dostaneme:

$$xX_n - X_{n-1} = (n+1)X_{n+1} + (n-1)X_{n-1} - 2nxX_n,$$

čo môžeme jednoducho upraviť na:

$$(n+1)X_{n+1} - (2n+1)xX_n + nX_{n-1} = 0. \tag{1.6.5}$$

Tento vzťah je rekurentným vzorcom pre koeficienty rozkladu  $\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rx + 1}}$  do radu podľa mocniny premennej  $r$ . Porovnaním tohoto výrazu s rekurentným vzorcom pre Legendreove polynómy (1.5.5), zistíme ich úplnú totožnosť. Ďalej, keďže koeficienty  $X_0 = 1$  a  $X_1 = x$  sú totožné s Legendreovými polynómami  $P_0(x)$  a  $P_1(x)$ , môžeme sa presvedčiť o totožnosti všetkých koeficientov výrazu (1.6.4) s odpovedajúcimi Legendreovými polynómami. Môžeme teda písať:

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rx + 1}} = P_0(x) + rP_1(x) + r^2P_2(x) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} r^n P_n(x). \quad (1.6.6)$$

Je potrebné si uvedomiť, že Maclaurinov rad, z ktorého sme vyšli pri odvodení posledného výrazu, bude konvergovať len pri  $r < 1$ , preto i získaný rozvoj (1.6.6) bude konvergovať pri  $r < 1$ . Pri  $r > 1$  môžeme však tiež získať konvergentný rad, keď budeme uvažovať nasledovne:

vo výraze  $\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rx + 1}}$  vyjmeme  $r$ , čo nám dá:

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rx + 1}} = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2}{r}x + \frac{1}{r^2}}}.$$

Nakoľko  $r > 1$ , tak zlomok  $\frac{1}{r} < 1$ , takže k výrazu  $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2}{r}x + \frac{1}{r^2}}}$  môžeme tiež použiť rozvoj

(1.6.6) s tým rozdielom, že premennú  $r$  v ňom zameníme výrazom  $\frac{1}{r}$ . Preto pri  $r > 1$  dostaneme:

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rx + 1}} = \frac{1}{r} \left[ P_0(x) + \frac{1}{r} P_1(x) + \frac{1}{r^2} P_2(x) + \dots \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} P_n(x). \quad (1.6.7)$$

Získané výrazy je možné zovšeobecniť aj pre body, ležiace v inej ako jednotkovej vzdialenosti, ako sme videli na Matematických základoch 2. Pripomeňme, že funkciu (1.6.2) nazývame aj vytvárajúcou funkciou pre Legendreove polynómy.

## 1.7 Výraz pre deriváciu Legendreovho polynómu

Keď zderivujeme podľa  $x$  výraz:

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rx + 1}} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n P_n(x)$$

tak dostaneme:

$$\frac{r}{[r^2 - 2rx + 1]^{\frac{3}{2}}} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \frac{dP_n(x)}{dx}.$$

Ľavú časť rovnice môžeme rozvinúť nasledovne:

$$\frac{r}{[r^2 - 2rx + 1]^{\frac{3}{2}}} = \frac{r}{r^2 - 2rx + 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rx + 1}} = \frac{r}{r^2 - 2rx + 1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} r^n P_n(x)$$

a prepísať tak predošlý výraz na tvar:

$$\frac{r}{r^2 - 2rx + 1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} r^n P_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \frac{dP_n(x)}{dx}.$$

Obe strany poslednej rovnice vynásobíme výrazom  $(r^2 - 2rx + 1)$  a potom porovnáme členy (Legendreove polynómy a ich derivácie) stojace pri  $r^{n+1}$  a dostaneme:

$$P_n(x) = \frac{dP_{n+1}(x)}{dx} + \frac{dP_{n-1}(x)}{dx} - 2x \frac{dP_n(x)}{dx} \quad (1.7.1)$$

Teraz použijeme rekurentný vzťah pre Legendreove polynómy (1.5.5) čo nám umožní napísať výraz pre  $\frac{dP_n(x)}{dx}$  v tvare:

$$\frac{dP_n(x)}{dx} = \frac{n+1}{2n+1} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{dP_{n+1}(x)}{dx} - \frac{1}{x} P_n(x) + \frac{n}{2n+1} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{dP_{n-1}(x)}{dx}.$$

Tento výraz dosadíme do (1.7.1) a po jednoduchých úpravách dostaneme:

$$\frac{dP_{n+1}(x)}{dx} - \frac{dP_{n-1}(x)}{dx} = (2n+1) P_n(x). \quad (1.7.2)$$

Použitím tohto vzorca môžeme vyčíslieť deriváciu Legendreovho polynómu prostredníctvom polynómu a derivácie nižšieho rádu. Po vylúčení  $\frac{dP_{n+1}(x)}{dx}$  z rovníc (1.7.1) a (1.7.2) dostaneme výraz:

$$x \frac{dP_n(x)}{dx} - \frac{dP_{n-1}(x)}{dx} = n P_n(x). \quad (1.7.3)$$

Po odčítaní rovnice (1.7.3) od rovnice (1.7.2) dostaneme:

$$\frac{dP_{n+1}(x)}{dx} - x \frac{dP_n(x)}{dx} = (n+1)P_n(x). \quad (1.7.4)$$

V rovnici (1.7.3) zmeňme teraz rád polynómu z  $n$  na  $n+1$ :

$$x \frac{dP_{n+1}(x)}{dx} - \frac{dP_n(x)}{dx} = (n+1)P_{n+1}(x). \quad (1.7.5)$$

Po eliminácii výrazu  $\frac{dP_{n+1}(x)}{dx}$  z rovníc (1.7.5) a (1.7.4) získame veľmi dôležitý výraz:

$$(1-x^2) \frac{dP_n(x)}{dx} = (n+1)[xP_n(x) - P_{n+1}(x)], \quad (1.7.6)$$

alebo

$$\frac{dP_n(x)}{dx} = (n+1) \frac{xP_n(x) - P_{n+1}(x)}{1-x^2}. \quad (1.7.7)$$

Keď s použitím rekurentného vzorca máme vyjadriť  $P_{n+1}(x)$  prostredníctvom  $P_n(x)$  a  $P_{n-1}(x)$  tak posledný výraz je možné upraviť na tvar:

$$\frac{dP_n(x)}{dx} = n \frac{P_{n-1}(x) - xP_n(x)}{1-x^2}. \quad (1.7.8)$$

## 1.8 Vyjadrenie Legendreovho polynómu určitým integrálom

Integrálne vyjadrenie Legendreovho polynómu má tvar:

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left( x + \sqrt{x^2 - 1} \cos t \right)^n dt \quad (1.8.1)$$

V dôkaze budeme študovať funkciu:

$$f(z) = \left( \frac{z^2 - 1}{2} \right)^n. \quad (1.8.2)$$

Dosaďme teraz za premennú  $z$  súčet  $(x+z)$  a získanú funkciu  $f(x+z)$  rozviňme do („orezaného“, do hodnoty  $2n$ ) Taylorovho radu (vzhľadom na premennú  $z$ ):

$$f(x+z) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!} z + \frac{f''(x)}{2!} z^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!} z^n + \dots + \frac{f^{(2n)}(x)}{(2n)!} z^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} A_{k,n}(x) z^k.$$

Číselný koeficient pri  $z^n$  bude, v súlade s (1.8.2), mať tvar:

$$\frac{1}{n!} f^{(n)}(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n = P_n(x),$$

t.j.  $A_{k,n}(x) = P_n(x)$ .

Keď budeme uvažovať mocninu premennej  $z$  rádu  $(n+k)$ , kde  $k < n$ , môžeme vyjadriť číselný koeficient pri týchto mocninách v tvare:

$$\frac{1}{(n+k)!} f^{(n+k)}(x) = \frac{1}{2^n (n+k)!} \frac{d^k}{dx^k} \left[ \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n \right] = \frac{n!}{(n+k)!} P_n^{(k)}(x),$$

kde symbol  $P_n^{(k)}(x)$  znamená deriváciu Legendreovho polynómu rádu  $k$ .

Nahradíme teraz premennú  $z$  vo funkcii  $f(x+z)$  výrazom  $z\sqrt{x^2-1}$ . Potom ľahko dostaneme nasledujúci vzťah:

$$f\left(x+z\sqrt{x^2-1}\right) = \sum_{k=0}^{2n} \left(\sqrt{x^2-1}\right)^k A_{k,n} z^k. \quad (1.8.3)$$

V tejto rovnici položíme  $z = e^{it}$  a obe strany rovnice vynásobíme funkciou  $e^{-int}$  a nakoniec integrujeme podľa premennej  $t$  v hraniciach od 0 do  $\pi$ . Dostaneme:

$$\int_0^\pi f\left(x+e^{it}\sqrt{x^2-1}\right) e^{-int} dt = \sum_{k=0}^{2n} \left[\left(\sqrt{x^2-1}\right)^k A_{k,n} \int_0^\pi e^{ikt} e^{-int} dt\right]. \quad (1.8.4)$$

Študujme sumu získanú na pravej strane rovnice (1.8.4). Jej prvá polovica, t.j. pre hodnoty  $k < n$ , budú v integráli záporné mocniny čísla  $e$ , striedavo párne a nepárne, pri  $k = n$  pod znakom integrálu ostane len jednotka, a pre druhú polovicu sumy, t.j. pre  $k > n$  mocniny  $e$  budú kladné. Možno ukázať, že v (1.8.3) členy rovnako vzdialené od začiatku a konca sumy budú mať rovnaké koeficienty, t.j. keď  $k < n$ :

$$\left(\sqrt{x^2-1}\right)^k A_{k,n}(x) = \left(\sqrt{x^2-1}\right)^{2n-k} A_{2n-k,n}(x). \quad (1.8.5)$$

Pozrime sa teraz na vyčíslenie koeficientov v rovnici (1.8.4):

$$\int_0^\pi e^{ikt} e^{-int} dt = \left[ \frac{e^{i(k-n)t}}{i(k-n)} \right]_0^\pi = \frac{e^{i(k-n)\pi} - 1}{i(k-n)}.$$

V prípadoch keď  $(k-n)$  je číslo párne, tak (na základe Eulerovho vzťahu) je  $e^{i(k-n)\pi} = 1$ . Pri nepárnom  $(k-n)$  máme  $e^{i(k-n)\pi} = -1$ . Preto v pravej časti rovnice (1.8.4) vypadnú po integrácii všetky členy s párnym  $(k-n)$  a členy s nepárnym  $(k-n)$  budú po integrácii  $-\frac{2}{i(k-n)}$ . Ďalej

budú členy pre  $k < n$  kladné a členy pre  $k > n$  budú záporné, ale keďže už vieme, že navzájom symetricky (okolo člena  $k = n$ ) položené koeficienty sú až na znamienko rovnaké, tak sa výsledku navzájom zrušia a zostane nám len jeden („stredný“  $k = n$ ) člen, a teda dostaneme z (1.8.4):

$$\int_0^\pi f\left(x + e^{it}\sqrt{x^2-1}\right)e^{-int}dt = \left(\sqrt{x^2-1}\right)^n A_{n,n}(x) \int_0^\pi dt = \pi \left(\sqrt{x^2-1}\right)^n P_n(x). \quad (1.8.6)$$

Pretože ľavá časť rovnice môže byť prepísaná (pomocou vyššie použitých substitúcií) nasledovne:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f\left(x + e^{it}\sqrt{x^2-1}\right)e^{-int}dt &= \int_0^\pi \left[ \frac{\left(x + e^{it}\sqrt{x^2-1}\right)^2 - 1}{2e^{it}} \right]^n dt = \\ &= \int_0^\pi \left(\sqrt{x^2-1}\right)^n \left(x + \sqrt{x^2-1} \cdot \frac{e^{it} - e^{-it}}{2}\right)^n dt, \end{aligned}$$

tak s použitím Eulerovho vzorca dostaneme:

$$\int_0^\pi \left(\sqrt{x^2-1}\right)^n \left(x + \sqrt{x^2-1} \cdot \cos t\right)^n dt = \pi \left(\sqrt{x^2-1}\right)^n P_n(x),$$

alebo po vykrátení  $\left(\sqrt{x^2-1}\right)^n$  dostávame konečne:

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(x + \sqrt{x^2-1} \cdot \cos t\right)^n dt.$$

## 1.9 Diferenciálna rovnica pre Legendreove polynómy

Videli sme, že Legendreove polynómy vieme získať ako koeficienty Taylorovho radu funkcie  $\sqrt{r^2-2rx+1}$  podľa premennej  $r$ . Veličinu  $\sqrt{r^2-2rx+1}$  sme si zaviedli ako vzdialenosť medzi dvoma bodmi vo sférickom súradnicovom systéme pričom uhol medzi ich sprievodičmi sme označili  $\psi$  a položili sme  $\cos \psi = x$  (pripomeňme, že vo sférickom systéme platí  $\cos \psi = \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\varphi - \varphi') + \cos \vartheta \cos \vartheta'$ , kde „čiarkované“ súradnice opisujú polohu bodu výpočtu a „nečiarkované“ polohu hmotného bodu). Jeden z týchto bodov nachádza vo vzdialenosti  $r$  od počiatku, druhý vo vzdialenosti rovnjej jednotke. Potom veličina  $\left(r^2-2rx+1\right)^{-\frac{1}{2}}$  bude určovať hodnotu potenciálu, daného touto hmotou v druhom bode. Je zrejmé, že hodnota potenciálu nebude v tomto prípade závisieť na ekvatoriálnom uhle (vo sférických súradniciach označený ako  $\varphi$ ), t.j. rozdelenie potenciálu bude charakterizované osovou symetriou ( $\cos \psi \rightarrow \cos \vartheta$ ). Keď teda vzťah  $\left(r^2-2r \cos \vartheta+1\right)^{-\frac{1}{2}}$  predstavuje

potenciálnu funkciu, tak dosadenie tejto veličiny do Laplaceovej rovnice, musí táto platiť.

Laplaceovu rovnicu vo sférických súradniciach  $(r, \vartheta, \varphi)$  zoberieme vo forme:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Pretože v našom prípade sa rozdelenie potenciálu charakterizuje osovou symetriou, t.j. hodnoty potenciálu nezávisia na uhle  $\varphi$ , tak táto rovnica nadobudne jednoduchší tvar:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right) = 0. \quad (1.9.1)$$

Táto rovnica, po dosadení  $(r^2 - 2r \cos \vartheta + 1)^{-\frac{1}{2}}$ , musí platiť. Použijeme vyššie dokázaný vzťah:

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r \cos \vartheta + 1}} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n P_n(\cos \vartheta),$$

pričom predpokladajme, že  $r < 1$ . Dosadenie do (1.9.1) nám dá:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[ r^2 \frac{\partial}{\partial r} \sum_{n=0}^{\infty} r^n P_n(\cos \vartheta) \right] + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sum_{n=0}^{\infty} r^n P_n(\cos \vartheta) \right) = 0.$$

Presunieme derivácie do sumy a vykonáme ich:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[ (n+1) n r^n P_n(\cos \vartheta) + \frac{r^n}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial P_n(\cos \vartheta)}{\partial \vartheta} \right) \right] = 0.$$

Pretože táto rovnica musí platiť, t.j. vyhovovať pri všetkých hodnotách  $r$ , tak koeficienty pri všetkých mocninách  $r$  musia byť rovné nule. Z toho máme:

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial P_n(\cos \vartheta)}{\partial \vartheta} \right) + n(n+1) P_n(\cos \vartheta) = 0.$$

Vrátime sa k predchádzajúcej premennej  $x = \cos \vartheta$  a zistíme, že  $\frac{\partial}{\partial \vartheta} = -\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial x}$  a preto

posledná rovnica môže byť prepísaná do tvaru:

$$-\frac{\sin \vartheta}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial x} \left( -\sin^2 \vartheta \frac{\partial P_n(x)}{\partial x} \right) + n(n+1) P_n(x) = 0,$$

alebo

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( (1-x^2) \frac{\partial P_n(x)}{\partial x} \right) + n(n+1) P_n(x) = 0,$$

z čoho vyplýva, že polynóm  $P_n(x)$  musí vyhovovať diferenciálnej rovnici:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( (1-x^2) \frac{\partial v}{\partial x} \right) + n(n+1) v = 0,$$

alebo v inom tvare:

$$(1-x^2) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial v}{\partial x} + n(n+1)v = 0.$$

## 1.10 Pridružené Legendreove funkcie

Súčasne s Legendreovými polynómami v úlohách teórie potenciálu hrajú veľmi dôležitú úlohu tzv. pridružené Legendreove funkcie. Pridruženou funkciou rádu  $n$ , stupňa  $m$  sa nazýva funkcia:

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m}, \quad (1.10.1)$$

a keď nahradíme premennú  $x$  výrazom  $\cos \vartheta$  dostaneme:

$$P_n^m(\cos \vartheta) = \sin \vartheta^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n(\cos \vartheta)}{d(\cos \vartheta)^m}. \quad (1.10.2)$$

Táto trieda funkcií má analogické vlastnosti, ako Legendreove polynómy. Predovšetkým nájdeme diferenciálnu rovnicu, ktorej vyhovujú pridružené funkcie. Z predošlého už vieme, že diferenciálna rovnica pre Legendreove polynómy má tvar:

$$(1-x^2) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial v}{\partial x} + n(n+1)v = 0. \quad (1.10.3)$$

Poslednú rovnicu zderivujeme  $m$  krát a dostaneme:

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{dx^m} \left[ (1-x^2) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2x \frac{dv}{dx} + n(n+1)v \right] = \\ = (1-x^2) \frac{d^{m+2}v}{dx^{m+2}} - 2x(m+1) \frac{d^{m+1}v}{dx^{m+1}} + [n(n+1) - m(m+1)] \frac{d^m v}{dx^m} = 0. \end{aligned}$$

Označíme  $\frac{d^m v}{dx^m} = u$  a dostaneme sa k rovnici:

$$(1-x^2) \frac{d^2 u}{dx^2} - 2x(m+1) \frac{du}{dx} + [n(n+1) - m(m+1)]u = 0.$$

Keď zavedieme novú funkciu  $w$  vzťahom  $w = (1-x^2)^{-\frac{m}{2}} u$  tak môžeme písať:

$$\begin{aligned} u &= (1-x^2)^{\frac{m}{2}} w, \\ \frac{du}{dx} &= mx(1-x^2)^{-\frac{m}{2}-1} w + (1-x^2)^{-\frac{m}{2}} \frac{dw}{dx}, \\ \frac{d^2 u}{dx^2} &= m(1-x^2)^{-\frac{m}{2}-2} w \left[ (1-x^2) + (m+2)x^2 \right] + 2mx(1-x^2)^{-\frac{m}{2}-1} \frac{dw}{dx} + (1-x^2)^{-\frac{m}{2}} \frac{d^2 w}{dx^2}. \end{aligned}$$

Po dosadení napísaných výrazov do diferenciálnej rovnice pre funkciu  $u$ , dostaneme:

$$\begin{aligned} & (1-x^2)^{-\frac{m}{2}} \frac{d^2 w}{dx^2} + \left[ 2mx(1-x^2)^{-\frac{m}{2}} - 2x(m+1)(1-x^2)^{-\frac{m}{2}} \right] \frac{dw}{dx} + \\ & + \left[ m(1-x^2)^{-\frac{m}{2}} + m(m+2)(1-x^2)^{-\frac{m}{2}-1} x^2 - mx(1-x^2)^{-\frac{m}{2}-1} 2(m+1)x + \right. \\ & \left. + (n(n+1) - m(m+1))(1-x^2)^{-\frac{m}{2}} \right] w = 0. \end{aligned}$$

Po vykrátení výrazu  $(1-x^2)^{-\frac{m}{2}}$  dostaneme po jednoduchých úpravách:

$$(1-x^2)^{-\frac{m}{2}} \frac{d^2 w}{dx^2} - 2x \frac{dw}{dx} + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] w = 0. \quad (1.10.4)$$

Tejto rovnici vyhovuje funkcia:

$$w = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} u = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m v}{dx^m},$$

a pretože funkcia  $v$  je Legendreovým polynómom máme pre funkciu  $w$  (a teda pre riešenie diferenciálnej rovnice (1.10.4)):

$$w = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m}.$$

K dokázaniu ortogonálnosti pridružených Legendreových funkcií, ktorá môže byť vyjadrená rovnicou:

$$\int_{-1}^1 P_k^m(x) P_n^m(x) dx = 0, \quad k \neq n, \quad (1.10.5)$$

budeme vychádzať z diferenciálnej rovnice pre tieto funkcie:

$$\begin{aligned} & (1-x^2) \frac{d^2 P_k^m(x)}{dx^2} - 2x \frac{dP_k^m(x)}{dx} + \left[ k(k+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P_k^m(x) = 0, \\ & (1-x^2) \frac{d^2 P_n^m(x)}{dx^2} - 2x \frac{dP_n^m(x)}{dx} + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P_n^m(x) = 0. \end{aligned}$$

Prvú z napísaných rovníc vynásobíme  $P_n^m(x)$  a druhú  $P_k^m(x)$  a výsledky odčítame. To nám dá:

$$\begin{aligned} & (1-x^2) \left[ \frac{d^2 P_k^m(x)}{dx^2} P_n^m(x) - \frac{d^2 P_n^m(x)}{dx^2} P_k^m(x) \right] - 2x \left[ \frac{dP_k^m(x)}{dx} P_n^m(x) - \frac{dP_n^m(x)}{dx} P_k^m(x) \right] + \\ & + [k(k+1) - n(n+1)] P_k^m(x) P_n^m(x) = 0. \end{aligned}$$

Prvé dva členy je možné zlúčiť a dostaneme jednoduchší výraz:

$$\frac{d}{dx} \left\{ (1-x^2) \left[ \frac{dP_k^m(x)}{dx} P_n^m(x) - \frac{dP_n^m(x)}{dx} P_k^m(x) \right] \right\} + [k(k+1) - n(n+1)] P_k^m(x) P_n^m(x) = 0.$$

Poslednú rovnicu integrujeme podľa premennej  $x$  v hraniciach od  $-1$  do  $+1$ :

$$\begin{aligned} [k(k+1) - n(n+1)] \int_{-1}^1 P_k^m(x) P_n^m(x) dx &= \int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left\{ (1-x^2) \left[ \frac{dP_n^m(x)}{dx} P_k^m(x) - \frac{dP_k^m(x)}{dx} P_n^m(x) \right] \right\} dx = \\ &= \left\{ (1-x^2) \left[ \frac{dP_n^m(x)}{dx} P_k^m(x) - \frac{dP_k^m(x)}{dx} P_n^m(x) \right] \right\}_{-1}^1. \end{aligned}$$

V dôsledku prítomnosti  $(1-x^2)$  sa pravá časť rovnice po dosadení hraníc anuluje, a pretože pri  $k \neq n$  výraz  $[k(k+1) - n(n+1)] \neq 0$ , bezprostredne máme:

$$\int_{-1}^1 P_k^m(x) P_n^m(x) dx = 0.$$

Zastavíme sa pri dokazovaní ešte jednej integrálnej vlastnosti pridružených polynómov, ktorá sa vyjadrí rovnicou:

$$\int_{-1}^1 [P_n^m(x)]^2 dx = \frac{2}{2^{n+1}} \cdot \frac{(n+m)!}{(n-m)!}. \quad (1.10.6)$$

Pri dokazovaní tohto predpokladu vyjdeme zo vzorca:

$$P_n^{m+1}(x) = (1-x^2)^{\frac{m+1}{2}} \frac{d^{m+1} P_n(x)}{dx^{m+1}},$$

ktorý môžeme prepísať nasledovne:

$$\begin{aligned} P_n^{m+1}(x) &= (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dx} \left[ (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m} \right] + (1-x^2)^{\frac{1}{2}} x m (1-x^2)^{\frac{m}{2}-1} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m} = \\ &= (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \frac{dP_n^m(x)}{dx} + m x (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} P_n^m(x). \end{aligned}$$

Túto rovnicu umocníme na druhú a integrujeme v hraniciach od  $-1$  do  $+1$ :

$$\int_{-1}^1 [P_n^{m+1}(x)]^2 dx = \int_{-1}^1 (1-x^2) \left[ \frac{dP_n^m(x)}{dx} \right]^2 dx + \int_{-1}^1 2mx P_n^m(x) \frac{dP_n^m(x)}{dx} dx + \int_{-1}^1 \frac{m^2 x^2}{1-x^2} dx. \quad (1.10.7)$$

Integrujeme *per partes* prvý i druhý integrál pravej strany rovnice a dostávame:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 [P_n^{m+1}(x)]^2 dx &= \int_{-1}^1 (1-x^2) \frac{dP_n^m(x)}{dx} \frac{dP_n^m(x)}{dx} dx = \\
&= \left[ (1-x^2) P_n^m(x) \frac{dP_n^m(x)}{dx} \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 P_n^m(x) \frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dP_n^m(x)}{dx} \right] dx, \\
\int_{-1}^1 2mx P_n^m(x) \frac{dP_n^m(x)}{dx} dx &= \int_{-1}^1 mx \frac{d}{dx} [P_n^m(x)]^2 dx = \left[ mx [P_n^m(x)]^2 \right]_{-1}^1 - m \int_{-1}^1 [P_n^m(x)]^2 dx.
\end{aligned}$$

Ľahko sa presvedčíme, že prvé členy častí napísaných rovníc sa po dosadení hraníc stávajú rovnými nule. Pre prvú rovnicu to platí v dôsledku prítomnosti súčiniteľa  $(1-x^2)$  a v druhej rovnici je tento súčiniteľ včlenený do  $P_n^m(x)$  a preto:

$$\left[ mx [P_n^m(x)]^2 \right]_{-1}^1 = \left[ (1-x^2) P_n^m(x) \frac{dP_n^m(x)}{dx} \right]_{-1}^1 = 0.$$

Vzhľadom na tieto vlastnosti, môžeme rovnicu (1.10.7) prepísať do tvaru:

$$\int_{-1}^1 [P_n^{m+1}(x)]^2 dx = \int_{-1}^1 P_n^m(x) \frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dP_n^m(x)}{dx} \right] dx - m \int_{-1}^1 [P_n^m(x)]^2 dx + \int_{-1}^1 \frac{m^2 x^2}{1-x^2} [P_n^m(x)]^2 dx,$$

a člen  $\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dP_n^m(x)}{dx} \right]$  v prvom integráli pravej časti tejto rovnice môže byť vyjadrený nasledovne:

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dP_n^m(x)}{dx} \right] = (1-x^2) \frac{d^2 P_n^m(x)}{dx^2} - 2x \frac{dP_n^m(x)}{dx},$$

pričom ho ďalej môžeme, v dôsledku rovnice (1.10.4), zameniť výrazom:

$$-\left[ n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P_n^m(x).$$

Preto dostaneme:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 [P_n^{m+1}(x)]^2 dx &= \int_{-1}^1 \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] [P_n^m(x)]^2 dx - m \int_{-1}^1 [P_n^m(x)]^2 dx + \int_{-1}^1 \frac{m^2 x^2}{1-x^2} [P_n^m(x)]^2 dx = \\
&= [n(n+1) - m(m+1)] \int_{-1}^1 [P_n^m(x)]^2 dx = (n-m)(n+m+1) \int_{-1}^1 [P_n^m(x)]^2 dx
\end{aligned}$$

Tento vzorec použijeme na integrál:

$$\int_{-1}^1 [P_n^m(x)]^2 dx$$

a dostaneme:

$$\int_{-1}^1 [P_n^m(x)]^2 dx = (n-m+1)(n+m) \int_{-1}^1 [P_n^{m-1}(x)]^2 dx.$$

Pretože:

$$\int_{-1}^1 [P_n^{m-1}(x)]^2 dx = (n-m+2)(n+m-1) \int_{-1}^1 [P_n^{m-2}(x)]^2 dx,$$

tak po opätovnom použití odvodeného vzorca prideme k rovnosti:

$$\int_{-1}^1 [P_n^m(x)]^2 dx = (n-m+1)(n-m+2) \dots n(n+m)(n+m-1) \dots (n+1) \int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx.$$

Pretože ďalej:

$$\int_{-1}^1 [P_n^m(x)]^2 dx = \frac{2}{2^{n+1}},$$

tak máme:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 [P_n^m(x)]^2 dx &= (n+m)(n+m-1) \dots (n-m+1) \frac{(n-m)(n-m-1) \dots 2 \cdot 1}{(n-m)(n-m-1) \dots 2 \cdot 1} \cdot \frac{2}{2n+1} = \\ &= \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}, \end{aligned}$$

čo bolo treba dokázať. Podotknime ešte, že v niektorých prácach, prednostne v geomagnetizme, určenie pridružených funkcií sa deje mierne odlišným spôsobom, od spôsobu tu uvedenému, a to takto:

$$P_n^m(x) = \sqrt{2 \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} \cdot \sin^m \vartheta \frac{d^m P_n(\cos \vartheta)}{d(\cos \vartheta)^m}.$$

Povaha súčiniteľa  $\sqrt{2 \frac{(n-m)!}{(n+m)!}}$ , nezávislého od  $\vartheta$ , sa neodráža na podobe diferenciálnej rovnice,

ktorej vyhovuje pridružená funkcia a nenarušuje podmienky ortogonálnosti. Rovnako, hodnota

integrálu  $\int_{-1}^1 [P_n^m(x)]^2 dx$  sa v tomto prípade ukazuje jednoduchšou:

$$\int_{-1}^1 [P_n^m(x)]^2 dx = \frac{4}{2n+1}.$$

## 1.11 Objemové a povrchové sférické funkcie

Laplaceova rovnica, hrajúca tak veľkú úlohu v teórii potenciálu, má v karteziánskych súradniciach tvar:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Našou úlohou bude nájsť riešenia tejto diferenciálnej rovnice v tvare polynómu jednotlivých premenných. Pre takýto jednoduchý polynóm môžeme napísať vzorec:

$$u_n = \sum_{m+p+2=n} a_{m,2,p} x^m y^p z^2,$$

kde  $n$  je nejaká konštanta.

Pokus o takéto riešenia je vhodné vykonať vo sférických súradniciach, kde položíme:

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi; \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi; \quad z = r \cos \vartheta.$$

Transformujeme skúmaný polynóm pomocou týchto vzťahov a dostaneme:

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{m+p+2=n} a_{m,2,p} r^m \sin^m \vartheta \cos^m \varphi \cdot r^p \sin^p \vartheta \sin^p \varphi \cdot r^2 \cos^2 \vartheta = \\ &= \sum_{m+p+2=n} a_{m,2,p} r^n \sin^{m+p} \vartheta \sin^p \varphi \cos^m \varphi \cos^2 \vartheta = r^n Y_n(\vartheta, \varphi), \end{aligned} \quad (1.11.1)$$

kde symbol  $Y_n(\vartheta, \varphi)$  znamená mnohočlen:

$$\sum_{m+p+2=n} a_{m,2,p} \sin^{m+p} \vartheta \sin^p \varphi \cos^m \varphi \cos^2 \vartheta.$$

Funkciu  $u_n$ , predstavujúca hľadané riešenie Laplaceovej rovnice, nazývame objemovou sférickou funkciou alebo guľovou funkciou a funkciu  $Y_n(\vartheta, \varphi)$ , ktorá je polynómom  $\sin \vartheta$ ,  $\cos \vartheta$ ,  $\sin \varphi$  a  $\cos \varphi$  nazývame povrchovou sférickou funkciou, alebo proste sférickou funkciou.

Pokúsime sa nájsť tieto polynómy  $Y_n(\vartheta, \varphi)$ . Hľadáme teda riešenia Laplaceovej rovnice, napísanej vo sférických súradniciach:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \quad (1.11.2)$$

s predpokladom že funkciu  $u$  uvažujeme v tvare:  $u(r, \vartheta, \varphi) = f(r) \cdot Y(\vartheta, \varphi)$  (čitateľovi už známa Fourierova separácia premenných). Tento výraz dosadíme do (1.11.2) a dostaneme:

$$Y(\vartheta, \varphi) \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f(r)}{\partial r} \right) + \frac{f(r)}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial Y(\vartheta, \varphi)}{\partial \vartheta} \right) + \frac{f(r)}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 Y(\vartheta, \varphi)}{\partial \varphi^2} = 0,$$

alebo po separácii:

$$\frac{1}{f(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f(r)}{\partial r} \right) + \frac{1}{Y(\vartheta, \varphi)} \left[ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial Y(\vartheta, \varphi)}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 Y(\vartheta, \varphi)}{\partial \varphi^2} \right] = 0.$$

Pri podrobnejšom pohľade na túto rovnicu, zistujeme, že sa rozpadla na dve časti, z ktorých jedna závisí iba na premennej  $r$ , a druhá iba na premenných  $\vartheta$  a  $\varphi$  (čo je základná myšlienka separácie). V tomto prípade sa ich súčet bude rovnať nule, iba vtedy, keď sú rovné tej istej konštante, ale s opačnými znamienkami. Po napísaní tohto predpokladu prideme k dvom diferenciálnym rovniciam:

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f(r)}{\partial r} \right) &= \alpha, \\ \frac{1}{Y(\vartheta, \varphi)} \left[ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial Y(\vartheta, \varphi)}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 Y(\vartheta, \varphi)}{\partial \varphi^2} \right] &= -\alpha. \end{aligned}$$

Tieto rovnice po zrejmých operáciách môžeme napísať nasledovne:

$$\begin{aligned} r^2 \frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial f(r)}{\partial r} - \alpha f(r) &= 0, \\ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial Y(\vartheta, \varphi)}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 Y(\vartheta, \varphi)}{\partial \varphi^2} + \alpha Y(\vartheta, \varphi) &= 0. \end{aligned}$$

Ako už vieme,  $f(r)$  musí byť rovné  $r^n$ , v súhlase s výrazom (1.11.1) Preto prvá rovnica nás privedie k rovnosti:

$$n(n-1)r^n + 2nr^n - \alpha r^n = 0,$$

z čoho máme pre  $\alpha$  hodnotu:

$$\alpha = n(n+1), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

V takomto prípade rovnica pre  $Y_n(\vartheta, \varphi)$  dostane tvar:

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial Y_n(\vartheta, \varphi)}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 Y_n(\vartheta, \varphi)}{\partial \varphi^2} + n(n+1) Y_n(\vartheta, \varphi) = 0. \quad (1.11.3)$$

Ako už bolo povedané,  $Y_n(\vartheta, \varphi)$  musí byť polynómom funkcií  $\sin \vartheta$ ,  $\cos \vartheta$ ,  $\sin \varphi$  a  $\cos \varphi$ .

Mocniny funkcií  $\sin \varphi$  a  $\cos \varphi$  vyjadríme pomocou rozkladov (napr. na základe Moivrevej vety) a po preusporiadaní môžeme funkciu  $Y_n(\vartheta, \varphi)$  napísať v tvare:

$$Y_n(\vartheta, \varphi) = a_{n,0}(\vartheta) + \sum_{m=1}^n (a_{n,m}(\vartheta) \cos m\varphi + b_{n,m}(\vartheta) \sin m\varphi), \quad (1.11.4)$$

kde  $a_{n,m}(\vartheta)$  a  $b_{n,m}(\vartheta)$  sú polynómy funkcií  $\sin \vartheta$  a  $\cos \vartheta$  s mocninou nie vyššou ako  $n$ . Suma je obmedzená hornou hranicou  $m = n$ , pretože podľa samotného vyjadrenia funkcie  $Y_n(\vartheta, \varphi)$  vo výraze (1.11.1), neobsahuje táto funkcia členy  $\sin \varphi$  a  $\cos \varphi$  vyššej mocniny ako  $n$  a ani ich rozklady neobsahujú členy s frekvenciami vyššími ako  $n$ . Po potrebné podotknúť, že v takom prípade je počet koeficientov  $a_{n,m}(\vartheta)$  a  $b_{n,m}(\vartheta)$  vyjadrený číslom  $(2n+1)$ . Keď funkcie  $Y_n(\vartheta, \varphi)$  sú riešením rovnice (1.11.3), tak dosadenie výrazu (1.11.4) do tejto rovnice, musí viesť ku platnosti. Urobíme toto dosadenie a dostávame:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial a_{n,0}(\vartheta)}{\partial \vartheta} \right) + \sum_{m=1}^n \cos m\varphi \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial \left( \sin \vartheta \frac{\partial a_{n,m}(\vartheta)}{\partial \vartheta} \right)}{\partial \vartheta} + \sum_{m=1}^n \sin m\varphi \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial \left( \sin \vartheta \frac{\partial b_{n,m}(\vartheta)}{\partial \vartheta} \right)}{\partial \vartheta} - \\ & - \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \sum_{m=1}^n m^2 a_{n,m} \cos m\varphi - \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \sum_{m=1}^n m^2 b_{n,m} \sin m\varphi + n(n+1) a_{n,0} + \\ & + n(n+1) \sum_{m=1}^n (a_{n,m}(\vartheta) \cos m\varphi + b_{n,m}(\vartheta) \sin m\varphi) = 0. \end{aligned}$$

Aby táto rovnica platila je potrebné koeficienty pri všetkých funkciách  $\cos m\varphi$  a  $\sin m\varphi$  sa rovnali nule. Preto dostaneme sústavu rovníc:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial a_{n,0}(\vartheta)}{\partial \vartheta} \right) + n(n+1) a_{n,0} = 0, \\ & \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial \left( \sin \vartheta \frac{\partial a_{n,m}(\vartheta)}{\partial \vartheta} \right)}{\partial \vartheta} + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} \right] a_{n,m} = 0, \\ & \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial \left( \sin \vartheta \frac{\partial b_{n,m}(\vartheta)}{\partial \vartheta} \right)}{\partial \vartheta} + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} \right] b_{n,m} = 0. \end{aligned}$$

Keď v týchto rovniciach namiesto  $\vartheta$  zavedieme premennú  $x$  vzťahom  $x = \cos \vartheta$ , tak naša sústava rovníc prejde na tvar:

$$\begin{aligned} & (1-x^2) \frac{\partial^2 a_{n,0}}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial a_{n,0}}{\partial x} + n(n+1) a_{n,0} = 0, \\ & (1-x^2) \frac{\partial^2 a_{n,m}}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial a_{n,m}}{\partial x} + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] a_{n,m} = 0, \\ & (1-x^2) \frac{\partial^2 b_{n,m}}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial b_{n,m}}{\partial x} + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] b_{n,m} = 0. \end{aligned}$$

V prvej z uvedených rovníc poznáme ľahko Legendreovu rovnicu a vo zvyšných dvoch spoznáваме rovnice pridružených funkcií. Preto môžeme napísať:

$$\begin{aligned}a_{n,0}(\vartheta) &= a_0 P_n(x) = a_0 P_n(\cos \vartheta), \\a_{n,m}(\vartheta) &= a_m P_n^m(x) = a_m P_n^m(\cos \vartheta), \\b_{n,m}(\vartheta) &= b_m P_n^m(x) = b_m P_n^m(\cos \vartheta),\end{aligned}$$

kde  $a_m$  a  $b_m$  sú konštantné koeficienty. Pre  $Y_n(\vartheta, \varphi)$  takto dostaneme:

$$Y_n(\vartheta, \varphi) = a_0 P_n(\cos \vartheta) + \sum_{m=1}^n (a_m \cos m\varphi + b_m \sin m\varphi) P_n^m(\cos \vartheta). \quad (1.11.5)$$

Členy tohto radu nezávisia lineárne jeden na druhom a preto jeho rozloženie je funkciou  $Y_n(\vartheta, \varphi)$  vyjadrené pomocou  $(2n+1)$  nezávislých sférických funkcií rádu  $n$ . Ľahko zistíme, že rovnica pre  $f(r)$ :

$$r^2 \frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial f(r)}{\partial r} - n(n+1) f(r) = 0$$

vyhovuje nie len pre hodnoty  $r^n$ , ale i pre hodnotu  $f(r) = r^{-(n+1)}$ . Preto môžeme tvrdiť, že funkcia:

$$\frac{Y_n(\vartheta, \varphi)}{r^{n+1}}$$

je tiež riešením Laplaceovej rovnice. Toto riešenie už nebude polynómom  $x$ ,  $y$ ,  $z$  v karteziánskych súradniciach, ale blíži sa nekonečnu s rastúcim  $r$ .

## 1.12 Integrálne vzťahy pre sférické funkcie

Keď sú dané dve funkcie  $u$  a  $v$ , ktoré sú harmonické vo vnútri ohraničenej oblasti s povrchom  $S$ , tak platí Greenova veta:

$$\iint_S \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds = 0, \quad (1.12.1)$$

kde  $n$  je smer vnútornej normály k povrchu. Ako povrch  $S$  si zvolíme guľu s polomerom  $r$  a so stredom v počiatku súradníc a za funkcie  $u$  a  $v$  volíme:

$$\begin{aligned}u &= r^n Y_n(\vartheta, \varphi), \\v &= r^m Y_m(\vartheta, \varphi).\end{aligned}$$

Nakoľko pri zvolenom povrchu  $S$  platí  $\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial r}$  a  $dS = r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ , tak Greenova veta

(1.12.1) dostane tvar:

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \left[ -r^n Y_n(\vartheta, \varphi) m r^{m-1} Y_m(\vartheta, \varphi) + r^m Y_m(\vartheta, \varphi) n r^{n-1} Y_n(\vartheta, \varphi) \right] r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = 0.$$

Po zrejmých úpravách dostaneme:

$$r^{n+m+1} (n-m) \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} Y_n(\vartheta, \varphi) Y_m(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = 0.$$

Vykrátíme  $r^{n+m+1} (n-m)$  a máme výraz:

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} Y_n(\vartheta, \varphi) Y_m(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = 0, \quad (1.12.2)$$

ktorý vyjadruje podmienku ortogonálnosti funkcií  $Y_n(\vartheta, \varphi)$  a  $Y_m(\vartheta, \varphi)$  na povrchu gule jednotkového polomeru. Keď na takúto sférickú plochu použijeme druhý Greenov vzorec dostaneme:

$$v_{P'} = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left( v \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial n} - \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial n} \right) dS,$$

kde  $R$  je vzdialenosť medzi bodom  $P'$  vo vnútri sférickej oblasti a bodom  $P$  na povrchu. Pretože  $R = \sqrt{r^2 - 2rr' \cos \psi + r'^2}$  kde  $r$  a  $r'$  sú vzdialenosti bodov  $P'$  a  $P$  od počiatku súradníc a uhol  $\psi$  zvierajú sprievodiče  $r$  a  $r'$ , tak pre  $1/R$  môžeme napísať vzťah:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{r'}{r} \right)^n P_n(\cos \psi),$$

pretože  $r' < r$ . Podobne ako v predošlom, zadáme funkciu v tvare  $v = r^m Y_m(\vartheta, \varphi)$  a podľa druhého Greenovho vzorca dostaneme:

$$v_{P'} = \frac{1}{4\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left\{ r^m Y_m(\vartheta, \varphi) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{r'^n}{r^{n+2}} P_n(\cos \psi) + \right. \\ \left. + m r^{m-1} Y_m(\vartheta, \varphi) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r'^n}{r^{n+1}} P_n(\cos \psi) \right\} r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi. \quad (1.12.3)$$

Keď súradnice bodu  $P'$  sú  $r', \vartheta', \varphi'$  tak  $v_{P'} = r'^m Y_m(\vartheta', \varphi')$ , a poslednú rovnicu môžeme prepísať do tvaru:

$$r'^m Y_m(\vartheta', \varphi') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r'^n r^{m-n}}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ (n+1) Y_m(\vartheta, \varphi) P_n(\cos \psi) + \right. \\ \left. + m Y_m(\vartheta, \varphi) P_n(\cos \psi) \right\} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r'^n r^{m-n}}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (n+m+1) Y_m(\vartheta, \varphi) P_n(\cos \psi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi. \quad (1.12.4)$$

Pretože táto rovnica musí byť identitou pre všetky hodnoty  $r' < r$ , tak porovnaním koeficientov pri rovnakých mocninách premennej  $r'$  v pravej aj ľavej časti tejto rovnice, dostanem pri  $n \neq m$ :

$$0 = \frac{r^{m-n}}{4\pi} (n+m+1) \int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_m(\vartheta, \varphi) P_n(\cos \psi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi,$$

a pri  $n = m$

$$Y_m(\vartheta', \varphi') = \frac{2m+1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_m(\vartheta, \varphi) P_m(\cos \psi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi.$$

Prvú z rovníc, ktorá vyjadruje podmienku ortogonálnosti funkcií  $Y_m(\vartheta, \varphi)$  a  $P_n(\cos \psi)$ , môžeme prepísať:

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_m(\vartheta, \varphi) P_n(\cos \psi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = 0, \quad \text{pri } m \neq n. \quad (1.12.5)$$

V druhej rovnici zameníme  $m$  s  $n$  a dostaneme:

$$Y_m(\vartheta', \varphi') = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_n(\vartheta, \varphi) P_n(\cos \psi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi. \quad (1.12.6)$$

### 1.13 Rozvinutie do radu sférických funkcií

Keď je daná funkcia  $f(\vartheta, \varphi)$ , o ktorej vieme, že sa rozloží do rovnomerne konvergujúceho radu:

$$f(\vartheta, \varphi) = Y_0(\vartheta, \varphi) + Y_1(\vartheta, \varphi) + Y_2(\vartheta, \varphi) + \dots, \quad (1.13.1)$$

tak pri určení tohto radu môžeme postupovať nasledovne: vynásobíme obidve jeho časti funkciou  $P_n(\cos \psi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$  a integrujeme po povrchu gule jednotkového polomeru.

V dôsledku platnosti (1.12.5) budú nulové všetky členy, okrem člena obsahujúceho  $Y_n(\vartheta, \varphi)$ , ktorý podľa vzorca (1.12.6) bude:

$$\frac{4\pi}{2n+1} Y_n(\vartheta', \varphi').$$

Preto máme:

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\vartheta, \varphi) P_n(\cos \psi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \frac{4\pi}{2n+1} Y_n(\vartheta', \varphi'). \quad (1.13.2)$$

V dôsledku (1.11.5) môžeme uviesť rad pre funkciu pre  $f(\vartheta, \varphi)$  nasledovne:

$$f(\vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ a_0 P_n(\cos \vartheta) + \sum_{m=1}^n (a_m \cos m\varphi + b_m \sin m\varphi) P_n^m(\cos \vartheta) \right]. \quad (1.13.3)$$

Pretože však:

$$\int_0^{2\pi} \cos k\varphi d\varphi = 0 \quad \text{ak } k \neq 0,$$

a súčasne:

$$\int_0^{2\pi} \cos m\varphi \cos k\varphi d\varphi = \begin{cases} 0 & \text{ak } k \neq m \\ \pi & \text{ak } k = m \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin m\varphi \cos k\varphi d\varphi = 0,$$

dostaneme:

$$\int_0^{2\pi} f(\vartheta, \varphi) \cos m\varphi d\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} a_m \pi P_n^m(\cos \vartheta).$$

Keď obidve časti poslednej rovnice vynásobíme  $P_n^m(\cos \vartheta) d \cos \vartheta$  a integrujeme v hraniciach od  $\cos \vartheta = -1$  do  $\cos \vartheta = 1$  dostaneme:

$$\int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} f(\vartheta, \varphi) \cos m\varphi P_n^m(\cos \vartheta) d \cos \vartheta d\varphi = a_m \pi \int_{-1}^1 \sum_{n=0}^{\infty} [P_n^m(\cos \vartheta)]^2 d \cos \vartheta.$$

Všetky integrály v pravej časti okrem jedného budú v dôsledku ortogonálnosti pridružených Legendreových funkcií nulové:

$$\int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} f(\vartheta, \varphi) \cos m\varphi P_n^m(\cos \vartheta) d \cos \vartheta d\varphi = a_m \pi \int_{-1}^1 [P_n^m(\cos \vartheta)]^2 d \cos \vartheta.$$

Pretože, okrem toho, ako sme už videli (1.10.6):

$$\int_{-1}^1 [P_n^m(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!},$$

tak pre koeficient  $a_m$  môžeme písať:

$$a_m = \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \cdot \frac{2n+1}{2\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} f(\vartheta, \varphi) \cos m\varphi P_n^m(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi. \quad (1.13.4)$$

Analogickým spôsobom nájdeme vyjadrenie pre koeficient  $b_m$ :

$$b_m = \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \cdot \frac{2n+1}{2\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} f(\vartheta, \varphi) \sin m\varphi P_n^m(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi. \quad (1.13.5)$$

Pri hľadaní koeficientu  $a_0$  vynásobíme obe strany rovnice (1.13.3) hodnotou  $d\varphi$  integrujeme v hraniciach od 0 do  $2\pi$ . Pretože:

$$\int_0^{2\pi} \cos m\varphi d\varphi = 0 \quad \wedge \quad \int_0^{2\pi} \sin m\varphi d\varphi = 0$$

dostaneme:

$$\int_0^{2\pi} f(\vartheta, \varphi) d\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ a_0 P_n(\cos \vartheta) \int_0^{2\pi} d\varphi \right] = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} a_0 P_n(\cos \vartheta).$$

Poslednú rovnicu opäť vynásobíme  $P_n(\cos \vartheta) d \cos \vartheta$  a integrujeme podľa  $\cos \vartheta$  od  $-1$  do  $+1$  a dostaneme.

$$\int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} f(\vartheta, \varphi) d \cos \vartheta d\varphi = \int_{-1}^1 a_0 [P_n(\cos \vartheta)]^2 d \cos \vartheta,$$

pretože v dôsledku platnosti podmienky ortogonálnosti Legendreových polynómov, budú nulové všetky integrály tvaru:

$$\int_{-1}^1 P_n(\cos \vartheta) P_m(\cos \vartheta) d \cos \vartheta; \quad \text{pri } m \neq n.$$

Pretože okrem toho platí:

$$\int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1},$$

tak pre koeficient  $a_0$  dostaneme:

$$a_0 = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(\vartheta, \varphi) P_n(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi. \quad (1.13.6)$$

Po určení koeficientov môžeme rad (1.13.3) pre funkciu  $Y_n(\vartheta', \varphi')$  napísať nasledovne:

$$Y_n(\vartheta', \varphi') = \frac{2n+1}{4\pi} \left[ \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(\vartheta, \varphi) P_n(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \right] P_n(\cos \vartheta') +$$

$$+ \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \cdot \frac{2n+1}{2\pi} \left\{ \begin{aligned} &\cos m\varphi' \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(\vartheta, \varphi) \cos m\varphi P_n^m(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi + \\ &+ \sin m\varphi' \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(\vartheta, \varphi) \sin m\varphi P_n^m(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \end{aligned} \right\} P_n^m(\cos \vartheta').$$

Po zrejmých úpravách môžeme posledný výraz napísať v jednoduchšom tvare:

$$Y_n(\vartheta', \varphi') = \frac{2n+1}{4\pi} \left\{ \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\vartheta, \varphi) P_n(\cos \vartheta) P_n(\cos \vartheta') \sin \vartheta d\vartheta d\varphi + \right. \\ \left. + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left[ f(\vartheta, \varphi) P_n^m(\cos \vartheta) P_n^m(\cos \vartheta') \cdot \right. \right. \\ \left. \left. \cos m(\varphi - \varphi') \sin \vartheta \right] d\vartheta d\varphi \right\}. \quad (1.13.7)$$

Pretože podľa výrazu (1.13.2):

$$Y_n(\vartheta', \varphi') = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\vartheta, \varphi) P_n(\cos \psi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi,$$

tak z porovnania pravých častí obidvoch posledných výrazov dostaneme:

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\vartheta, \varphi) P_n(\cos \psi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \\ = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\vartheta, \varphi) \left[ P_n(\cos \vartheta) P_n(\cos \vartheta') + \right. \\ \left. + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \vartheta) P_n^m(\cos \vartheta') \cos m(\varphi - \varphi') \right] \sin \vartheta d\vartheta d\varphi,$$

alebo

$$P_n(\cos \psi) = P_n(\cos \vartheta) P_n(\cos \vartheta') + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \vartheta) P_n^m(\cos \vartheta') \cos m(\varphi - \varphi'),$$

kde  $\cos \psi = \cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\varphi - \varphi')$ . Tento vzťah sa nazýva aj teorémom zloženia sférických funkcií.

## 2. Príklady na sférické funkcie

### 2.1 Vodivá guľa v poli jednosmerného prúdu

Ako príklad na použitie sférických funkcií uvidíme úlohu o rušivom účinku vodivej gule umiestnenej v prostredí, ktorým preteká jednosmerný elektrický prúd. Predpokladajme, že vodivosť prostredia je  $\sigma_1$ , vodivosť materiálu gule je  $\sigma_2$  a polomer gule je  $a$ . Súradnicový počiatok zvolíme v strede gule, os  $x$  je orientovaná v smere tečenia prúdu, ktorého pole je charakterizované tým, že je homogénne:

$$i = -\sigma_1 \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} = \text{konšt.}, \quad (2.1.1)$$

kde  $\varphi_0$  označíme potenciálovú funkciu. Vzhľadom na poslednú rovnicu a poslednú vetu môžeme tvrdiť, že táto rovnica je iba funkciou premennej  $x$ , majúcou tvar:

$$\varphi_0 = -\frac{i}{\sigma_1} x. \quad (2.1.2)$$

Prítomnosťou vodivej gule sa homogénne pole zdeformuje a bude určené inými funkciami. Predpokladáme, že sa tento deformačný účinok prejaví v tom, že v priestore, vzhľadom na guľu vonkajšom, potenciálna funkcia bude mať tvar:

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \varphi_e,$$

a vnútri gule:

$$\varphi_2 = \varphi_0 + \varphi_i,$$

kde  $\varphi_e$  a  $\varphi_i$  sú doplnujúce funkcie, ktorých existencia je spätá s účinkom gule. Pretože  $\varphi_1$  a  $\varphi_2$  ako potenciálové funkcie vyhovujú Laplaceovej rovnici, a pretože  $\varphi_0$  tiež vyhovuje tejto funkcii, tak funkcie  $\varphi_e$  a  $\varphi_i$  môžeme získať ako riešenia Laplaceových rovníc.

O deformačných potenciáloch  $\varphi_e$  a  $\varphi_i$  môžeme tvrdiť, že musia byť symetrické vzhľadom k osi  $x$ . Preto vo sférických súradniciach s počiatkom v strede gule a polárnou osou identickou s osou  $x$ , tieto funkcie nebudú závislé na ekvatoriálnej premennej a závisia len na radiálnej premennej  $r$  a polárnej premennej  $\vartheta$ . V dôsledku toho, diferenciálna rovnica pre tieto funkcie, napísaná vo sférických súradniciach, bude vyzeráť nasledovne:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \right) = 0. \quad (2.1.3)$$

Riešenie budeme hľadať už známou Fourierovou separáciou premenných, teda riešenie predpokladáme v tvare:

$$\varphi(r, \vartheta) = u(r) \cdot v(\vartheta).$$

Dosadíme tento výraz do (2.1.3) a dostaneme:

$$v \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{u}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial v}{\partial \vartheta} \right) = 0,$$

alebo po separácii:

$$\frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{v \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial v}{\partial \vartheta} \right) = 0.$$

Ľavá strana poslednej rovnice teda predstavuje súčet dvoch na sebe nezávislých funkcií a môžeme písať:

$$\begin{aligned} \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) &= m, \\ \frac{1}{v \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial v}{\partial \vartheta} \right) &= -m. \end{aligned}$$

Riešenie prvej z rovníc je nám už známe z predošlého textu:

$$\begin{aligned} u &= r^n, \\ u &= r^{-(n+1)}, \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

keď sa volí  $m = n(n+1)$ . V takom prípade druhá rovnica prejde na tvar:

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial v}{\partial \vartheta} \right) + n(n+1)v = 0,$$

t.j. na Legendreovu rovnicu, ktorej riešenie je:

$$v = P_n(\cos \vartheta), \tag{2.1.5}$$

kde  $P_n(\cos \vartheta)$  je Legendreov polynóm od  $\cos \vartheta$  rádu  $n$ . Takto získané riešenie rovnice (2.1.3) môže byť vyjadrené nasledovne:

$$\varphi(r, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \vartheta) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{-(n+1)} P_n(\cos \vartheta). \tag{2.1.6}$$

Hľadané funkcie musia vyhovovať viacerým podmienkam:

1. funkcie  $\varphi_e$  a  $\varphi_i$  musia byť všade konečné,
2. funkcia  $\varphi_i$  v nekonečne vzdialených bodoch sa musí limitne blížiť k funkcii  $\varphi_0$  – fyzikálne to znamená, že vplyv gule sa stane zanedbateľne malým vo veľkých vzdialenostiach od nej,
3. na rozhraní gule, t.j. pri  $r = a$ , nezávisle na uhle  $\vartheta$ , musia byť splnené podmienky:

$$\varphi_1(a, \vartheta) = \varphi_2(a, \vartheta),$$

$$\left( \sigma_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \right)_{r=a} = \left( \sigma_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \right)_{r=a},$$

t.j. musí platiť spojitosť potenciálov a ich normálovej zložky na povrchu gule. Vráťme sa teda k riešeniu (2.1.6) s ohľadom na splnenie podmienok: prvý člen pravej časti pri  $A_n \neq 0$  sa s rastúcim  $r$  zväčšuje bez obmedzenia, a preto vo výraze pre  $\varphi_e$  takýto člen nemôže existovať, t.j. vo výraze pre túto funkciu musí byť  $A_n = 0$ . Podobne, pre druhý člen pravej časti rovnice (2.1.6) pri  $r$  blížiacom sa k nule, sme nútení predpokladať, že koeficienty  $B_n$  sa rovnajú nule. Takto pre splnenie podmienok treba prijať, že:

$$\varphi_e = \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{-(n+1)} P_n(\cos \vartheta),$$

$$\varphi_i = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \vartheta).$$
(2.1.7)

Pri zvolenom tvare  $\varphi_e$  pre dostatočne veľké hodnoty  $r$  sa táto stane veľmi malou, a preto z výrazu  $\varphi_1 = \varphi_0 + \varphi_e$  vidíme, že  $\varphi_1$  sa bude len veľmi málo líšiť od potenciálu vybudného poľa  $\varphi_0$ . Takto je splnená aj podmienka 2. Ako sme uviedli:

$$\varphi_0 = -\frac{i}{\sigma_1} x = -\frac{i}{\sigma_1} r \cos \vartheta,$$

čo môžeme pomocou Legendreových polynómov ( $P_1(\cos \vartheta) = \cos \vartheta$ ) napísať nasledovne:

$$\varphi_0 = -\frac{i}{\sigma_1} x = -\frac{i}{\sigma_1} r P_1(\cos \vartheta).$$

Takto máme:

$$\varphi_1(r, \vartheta) = -\frac{i}{\sigma_1} r P_1(\cos \vartheta) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{-(n+1)} P_n(\cos \vartheta),$$

$$\varphi_2(r, \vartheta) = -\frac{i}{\sigma_1} r P_1(\cos \vartheta) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \vartheta).$$

K určeniu koeficientov  $A_n$  a  $B_n$  použijeme podmienky 3. Nakoľko druhá z podmienok tohto bodu obsahuje deriváciu podľa premennej  $r$ , tak ich v prvom rade nájdeme:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = -\frac{i}{\sigma_1} P_1(\cos \vartheta) - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) B_n r^{-(n+2)} P_n(\cos \vartheta),$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial r} = -\frac{i}{\sigma_1} P_1(\cos \vartheta) + \sum_{n=0}^{\infty} n A_n r^{n-1} P_n(\cos \vartheta).$$

Použijeme teraz podmienku spojitosti potenciálu a normálovej zložky prúdu a dostaneme.

$$\begin{aligned}
-\frac{i}{\sigma_1} a P_1(\cos \vartheta) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n a^{-(n+1)} P_n(\cos \vartheta) &= -\frac{i}{\sigma_1} a P_1(\cos \vartheta) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n a^n P_n(\cos \vartheta), \\
-\sigma_1 \frac{i}{\sigma_1} P_1(\cos \vartheta) - \sigma_1 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) B_n a^{-(n+2)} P_n(\cos \vartheta) &= -\sigma_2 \frac{i}{\sigma_2} P_1(\cos \vartheta) + \sigma_2 \sum_{n=0}^{\infty} n A_n a^{n-1} P_n(\cos \vartheta).
\end{aligned}$$

Pretože tieto rovnice musia byť splnené pre všetky hodnoty  $\vartheta$ , tak koeficienty polynómov rovnakého rádu musia si byť navzájom rovné. Prirovnáme tieto koeficienty jeden k druhému a dostaneme dve sústavy rovníc:

$$\left. \begin{aligned} B_0 a^{-1} &= A_0 \\ B_1 a^{-2} &= A_1 a \\ &\vdots \\ B_n a^{-(n+1)} &= A_n a^n \end{aligned} \right\} (I),$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 B_0 a^{-2} &= 0 \\ -\frac{i}{\sigma_1} \sigma_1 - 2\sigma_1 B_1 a^{-3} &= -\frac{i}{\sigma_1} \sigma_2 + \sigma_2 A_2 \\ -\sigma_1 3B_2 a^{-4} &= \sigma_2 2A_2 a \\ &\vdots \\ -\sigma_1 (n+1) B_n a^{-(n+2)} &= \sigma_2 n A_n a^{n-1} \end{aligned} \right\} (II).$$

Z prvej rovnice sústavy (II) ihneď vidíme, že  $B_0 = 0$ . V súlade s prvou rovnicou sústavy (I) máme  $A_0 = 0$ . Druhé rovnice (I) a (II) sústavy môžeme zapísať v tvare:

$$\begin{aligned} B_1 a^{-3} &= A_1 \\ \sigma_1 \left( -\frac{i}{\sigma_1} - 2B_1 a^{-3} \right) + \frac{i}{\sigma_1} \sigma_2 &= \sigma_2 A_1 \end{aligned}$$

Dosadíme do druhej rovnice  $B_1$  a  $A_1$  vyjadrené z prvej rovnice a dostaneme:

$$-\frac{i}{\sigma_1} (\sigma_1 - \sigma_2) - 2\sigma_1 A_1 = \sigma_2 A_1.$$

Riešime túto rovnicu vzhľadom na  $A_1$  a dostaneme:

$$A_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\sigma_1 + \sigma_2} \cdot \frac{i}{\sigma_1}, \quad (2.1.8)$$

a pre  $B_1$ :

$$B_1 = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\sigma_1 + \sigma_2} \cdot \frac{i}{\sigma_1}. \quad (2.1.9)$$

Pretože všetky posledné rovnice predstavujú páry rovnakého typu:

$$B_n a^{-(2n+1)} = A_n,$$

$$-\sigma_1(n+1)B_n a^{-(2n+1)} = \sigma_2 n A_n,$$

tak ich budeme riešiť vo všeobecnom tvare. Dosadíme do druhej rovnice namiesto  $B_n a^{-(2n+1)}$  veličinu  $A_n$  z prvej rovnice a dostaneme:

$$-\sigma_1(n+1)A_n = \sigma_2 n A_n,$$

z čoho bezprostredne vyplýva  $A_n = 0$  a preto aj  $B_n = 0$ . Takto zo všetkých koeficientov nám ostali iba  $A_1$  a  $B_1$  určené rovnicami (2.1.8) a (2.1.9), čo umožní napísať výrazy pre  $\varphi_1(r, \vartheta)$  a  $\varphi_2(r, \vartheta)$  v tvare:

$$\begin{aligned}\varphi_1(r, \vartheta) &= -\frac{i}{\sigma_1} r P_1(\cos \vartheta) - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\sigma_1 + \sigma_2} \cdot \frac{i}{\sigma_1} \frac{a^3}{r^3} \cdot r \cdot P_1(\cos \vartheta), \\ \varphi_2(r, \vartheta) &= -\frac{i}{\sigma_1} r P_1(\cos \vartheta) - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\sigma_1 + \sigma_2} \cdot \frac{i}{\sigma_1} \cdot r \cdot P_1(\cos \vartheta).\end{aligned}\tag{2.1.10}$$

Vrátime sa k predchádzajúcej premennej  $x$  vzťahom  $r \cos \vartheta = r P_1(\cos \vartheta) = x$  a môžeme tieto rovnice prepísať do tvaru:

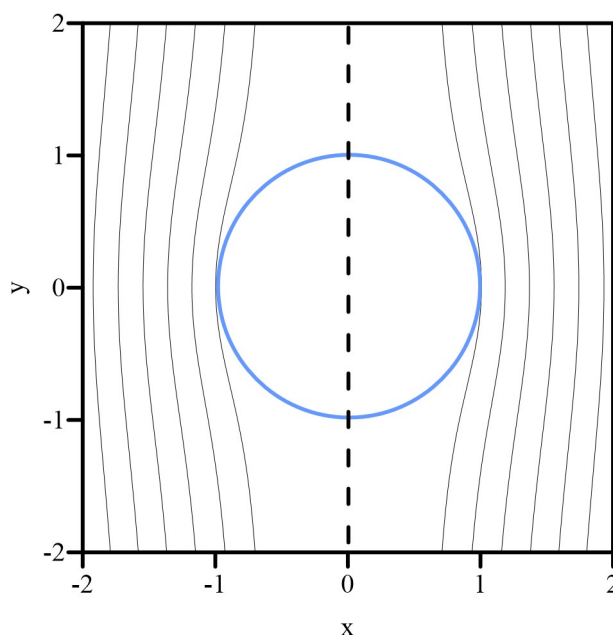
$$\begin{aligned}\varphi_1(r, \vartheta) &= -\frac{i}{\sigma_1} \left( 1 + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\sigma_1 + \sigma_2} \cdot \frac{a^3}{r^3} \right) x, \\ \varphi_2(r, \vartheta) &= -\frac{i}{\sigma_1} \left( 1 + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\sigma_1 + \sigma_2} \right) x,\end{aligned}$$

kde  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Získaný výsledok môže byť interpretovaný nasledovne: guľa z vodivého materiálu umiestnená v homogénnom poli prúdu spôsobí deformáciu rozdelenia potenciálu vo vonkajšom prostredí, ekvivalentnú existencii dipólu, umiestneného v počiatku systému a s osou v smere osi  $x$  a s momentom rovným:

$$-\frac{i}{\sigma_1} \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\sigma_1 + \sigma_2} a^3.$$

Vnútri gule ostáva pole potenciálu homogénnym, ale mení sa v hodnote, pričom zachováva pôvodný smer.

Na **Obr. 2** je znázornenie ekvipotencionálnych čiar v blízkosti gule vyššej vodivosti ako vodivosť vonkajšej oblasti  $\left( \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 3 \right)$ . Rozdelenie je znázornené pre rovinu rovnobežnú so smerom prúdu a prechádzajúcou stredom gule.



**Obr. 2:** Ekvipotencionálne línie v blízkosti gule s vodivosťou vyššou ako vodivosť okolia.

## 2.2 Vodivá guľa v poli bodového zdroja prúdu

Zložitejším je riešenie úlohy o deformačnom vplyve gule na rozloženie potenciálu bodového zdroja. Touto úlohou sa budeme zaoberať, pretože niektoré jej dôsledky sú dôležité v geoelektrickom prieskume.

Predpokladajme, že vo vzdialenosti  $d$  od stredu gule polomeru  $a$  sa v bode  $A$  nachádza bodová elektróda, ktorou je do pôdy vedený prúd  $I$ . Materiál gule má vodivosť  $\sigma_2$ , materiál okolitého prostredia  $\sigma_1$ . Treba nájsť rozloženie potenciálu v guli i mimo nej. Potenciálne funkcie v guli a mimo nej označíme ako v predošlom príklade  $\varphi_1$  a  $\varphi_2$ . Môžeme písať, že tieto funkcie majú tvar:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \varphi_0 + \varphi_e, \\ \varphi_2 &= \varphi_0 + \varphi_i,\end{aligned}$$

kde  $\varphi_0$  je potenciálom poľa bodového zdroja neovplyvnením prítomnosťou gule a  $\varphi_e$  a  $\varphi_i$  sú funkcie určujúce deformáciu výsledného poľa vplyvom gule vo vonkajšom a vnútornom prostredí. Možno predpokladať, že tento deformačný účinok bude symetrický vzhľadom na os prechádzajúcu stredom gule a zdrojom. Túto os zvolíme za polárnu os súradnicovej sústavy sférických súradníc. Počiatok tohto systému bude v strede gule, a tak funkcie  $\varphi_1$  a  $\varphi_2$  budú závisieť len od premenných  $r$  a  $\vartheta$ . Preto, podľa predpokladov analogických s tými, ktoré sme

použili pri riešení predchádzajúcej úlohy, sme oprávnení považovať funkcie  $\varphi_e(r, \vartheta)$  a  $\varphi_i(r, \vartheta)$  za riešenia rovnice:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \right) = 0.$$

Už vieme, že všeobecným riešením tejto rovnice je funkcia:

$$\varphi(r, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \vartheta) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{-(n+1)} P_n(\cos \vartheta).$$

Funkcie  $\varphi_e(r, \vartheta)$  a  $\varphi_i(r, \vartheta)$  okrem toho musia vyhovovať podmienkam:

1. Funkcie  $\varphi_e(r, \vartheta)$  a  $\varphi_i(r, \vartheta)$  musia byť všade konečné,
2. pri veľmi veľkých hodnotách  $r$  a nezávisle na premennej  $\vartheta$  funkcia  $\varphi_e(r, \vartheta)$  sa musí blížiť k nule,
3. na povrchu gule, t.j. pri  $r = a$  musia byť splnené rovnice:

$$\begin{aligned} \varphi_1(a, \vartheta) &= \varphi_2(a, \vartheta), \\ \left( \sigma_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \right)_{r=a} &= \left( \sigma_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \right)_{r=a}. \end{aligned}$$

Aby boli splnené podmienky 1 a 2, je nutné, ako už vieme, aby  $\varphi_e(r, \vartheta)$  a  $\varphi_i(r, \vartheta)$  mali tvar:

$$\begin{aligned} \varphi_i &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \vartheta), \\ \varphi_e &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{-(n+1)} P_n(\cos \vartheta). \end{aligned}$$

Potenciálna funkcia  $\varphi_0$  pre bodový zdroj v homogénnom prostredí má známa:

$$\varphi_0 = \frac{I}{4\pi\sigma_1} \cdot \frac{1}{R},$$

kde  $R$  je vzdialenosť medzi zdrojom a bodom (výpočtu), v ktorom je potenciál skúmaný. Polohu tohto bodu (výpočtu) určíme premennými  $r$  a  $\vartheta$ , pričom pri našej voľbe súradnicového systému je poloha zdroja  $r_A = d$  a  $\vartheta_A = 0$ , tak poloha bodu výpočtu bude:

$$R = \sqrt{d^2 - 2rd \cos \vartheta + r^2}.$$

Podľa podmienok úlohy sa elektróda nachádza mimo gule a preto pre body vo vzdialenosti menšej ako  $d$ , bude  $r$  (poloha bodu výpočtu od stredu vodivej gule) menšie ako  $d$ . Preto uvažujúc také body, môžeme napísať:

$$R = d \sqrt{1 - 2 \frac{r}{d} \cos \vartheta + \left(\frac{r}{d}\right)^2},$$

pričom  $\frac{r}{d} < 1$ . V takom prípade môžeme napísať výraz pre  $\varphi_0(r, \vartheta)$ :

$$\varphi_0 = \frac{I}{4\pi\sigma_1} \frac{1}{d} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{d}\right)^n P_n(\cos \vartheta).$$

V súlade s napísaným výrazom pre  $\varphi_0$  môžeme napísať:

$$\begin{aligned} \varphi_1(r, \vartheta) &= \frac{I}{4\pi\sigma_1} \frac{1}{d} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{d}\right)^n P_n(\cos \vartheta) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{-(n+1)} P_n(\cos \vartheta), \\ \varphi_2(r, \vartheta) &= \frac{I}{4\pi\sigma_1} \frac{1}{d} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{d}\right)^n P_n(\cos \vartheta) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \vartheta), \end{aligned}$$

alebo, ak pre krátkosť označíme  $\frac{I}{4\pi\sigma_1} = L$ , tak po zrejme úprave máme:

$$\begin{aligned} \varphi_1(r, \vartheta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ L \frac{r^n}{d^{n+1}} + B_n r^{-(n+1)} \right] P_n(\cos \vartheta), \\ \varphi_2(r, \vartheta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ L \frac{r^n}{d^{n+1}} + A_n r^n \right] P_n(\cos \vartheta). \end{aligned}$$

Derivácie obidvoch funkcií podľa  $r$  budú:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ L \frac{n r^{n-1}}{d^{n+1}} - (n+1) B_n r^{-(n+2)} \right] P_n(\cos \vartheta), \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} &= \sum_{n=0}^{\infty} n r^{n-1} \left[ \frac{L}{d^{n+1}} + A_n \right] P_n(\cos \vartheta). \end{aligned}$$

Zostavíme rovnice pre podmienku 3 a dostaneme:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ L \frac{a^n}{d^{n+1}} + B_n a^{-(n+1)} \right] P_n(\cos \vartheta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ L \frac{a^n}{d^{n+1}} + A_n a^n \right] P_n(\cos \vartheta), \\ \sigma_1 \sum_{n=0}^{\infty} \left[ L \frac{n a^{n-1}}{d^{n+1}} - (n+1) B_n a^{-(n+2)} \right] P_n(\cos \vartheta) &= \sigma_2 \sum_{n=0}^{\infty} n a^{n-1} \left[ \frac{L}{d^{n+1}} + A_n \right] P_n(\cos \vartheta). \end{aligned}$$

Pretože všetky tieto rovnice musia platiť pre každý uhol  $\vartheta$ , je nutné aby boli navzájom rovné koeficienty stojace pri Legendreových polynómoch rovnakých rádov. Po zostavení týchto rovníc, dostaneme sústavu, ktorú môžeme všeobecne zapísať nasledovne:

$$\left. \begin{aligned} \frac{L a^n}{d^{n+1}} + B_n a^{-(n+1)} &= \frac{L a^n}{d^{n+1}} + A_n a^n \\ \sigma_1 \frac{L n a^{n-1}}{d^{n+1}} - \sigma_1 (n+1) B_n a^{-(n+2)} &= \sigma_2 \frac{L n a^{n-1}}{d^{n+1}} + \sigma_2 n A_n a^{n-1} \end{aligned} \right\} n = 0, 1, 2, \dots$$

Po zrejmých úpravách môžeme tieto sústavy rovníc napísať v jednoduchšom tvare:

$$\left. \begin{aligned} B_n &= a^{2n+1} A_n \\ \sigma_2 A_n n a^{2n+1} + \sigma_1 (n+1) B_n &= \frac{(\sigma_1 - \sigma_2) L n a^{2n+1}}{d^{n+1}} \end{aligned} \right\} n = 0, 1, 2, \dots$$

Dosadíme za  $B_n$  výraz obsahujúci  $A_n$  z prvej rovnice do druhej a po vykrátení  $a^{2n+1}$  dostávame:

$$\sigma_2 A_n n + \sigma_1 (n+1) A_n = L \frac{(\sigma_1 - \sigma_2) n}{d^{n+1}},$$

z čoho máme:

$$A_n = L \frac{n(\sigma_1 - \sigma_2)}{n\sigma_2 + (n+1)\sigma_1} \cdot \frac{1}{d^{n+1}}$$

a z výrazu medzi  $A_n$  a  $B_n$ , známeho z prvej rovnice:

$$B_n = L \frac{n(\sigma_1 - \sigma_2)}{n\sigma_2 + (n+1)\sigma_1} \cdot \frac{a^{2n+1}}{d^{n+1}}.$$

Keď tu označíme pre krátkosť súčiniteľ  $\frac{n(\sigma_1 - \sigma_2)}{n\sigma_2 + (n+1)\sigma_1}$  symbolom  $p_n$ , tak tieto výrazy prejdú

na tvar:

$$A_n = \frac{L p_n}{d^{n+1}}$$

a

$$B_n = \frac{a^{2n+1}}{d^{n+1}} L p_n.$$

S týmto označením výrazy pre potenciál budú:

$$\begin{aligned} \varphi_1(r, \vartheta) &= L \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{r^n}{d^{n+1}} + p_n \frac{a^{2n+1}}{d^{n+1} r^{n+1}} \right] P_n(\cos \vartheta) = \\ &= L \left( \frac{1}{R} + \sum_{n=0}^{\infty} p_n \frac{a^{2n+1}}{d^{n+1} r^{n+1}} P_n(\cos \vartheta) \right), \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(r, \vartheta) &= L \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{r^n}{d^{n+1}} + p_n \frac{r^n}{d^{n+1}} \right] P_n(\cos \vartheta) = \\ &= L \left[ \frac{1}{R} + \sum_{n=0}^{\infty} p_n \frac{r^n}{d^{n+1}} P_n(\cos \vartheta) \right]. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

V osobitnom prípade ideálne vodivej gule sa výrazy pre potenciál zjednodušia, pretože:

$$p_n = \left[ \frac{n(\sigma_1 - \sigma_2)}{n\sigma_2 + (n+1)\sigma_1} \right]_{\sigma_2 \rightarrow \infty} = -1$$

a

$$\varphi_1 = \sigma_2 \rightarrow \infty = L \left( \frac{1}{R} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{2n+1}}{d^{n+1} r^{n+1}} P_n(\cos \vartheta) \right), \quad (2.2.3)$$

$$\varphi_2 = \sigma_2 \rightarrow \infty = L \left[ \frac{1}{R} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{d^{n+1}} P_n(\cos \vartheta) \right] \quad (2.2.4)$$

Keď máme zostrojiť ku guli zrkadlené zobrazenie zdroja, tak jeho poloha sa určí súradnicami

$r = \frac{a^2}{d}$  a  $\vartheta = 0$ . Po umiestnení fiktívneho zdroja veľkosti  $-\frac{a}{d}L$  do tohto bodu, môžeme potom

vypočítať potenciál ním daný vo vonkajšom prostredí podľa výrazu:

$$\varphi^* = -L \frac{a}{d} \cdot \frac{1}{R^*},$$

kde  $R^*$  je vzdialenosť medzi bodmi so súradnicami  $r, \vartheta$  a zrkadleným zobrazením fiktívneho zdroja, ktorá sa určí nasledovne:

$$R^* = \sqrt{\left(\frac{a^2}{d}\right)^2 - 2r \frac{a^2}{d} \cos \vartheta + r^2}.$$

Pretože bod, pre ktorý sa hľadá potenciál leží na zrkadlujúcom rozhraní (na zrkadle, na „pol-  
ceste“), tak  $r > \frac{a^2}{d}$  a preto po vyňatí  $r$  spod odmocniny máme:

$$R^* = r \sqrt{\left(\frac{a^2}{rd}\right)^2 - 2 \frac{a^2}{rd} \cos \vartheta + 1}.$$

Pomer  $\frac{a^2}{rd}$  bude menší ako jedna. V dôsledku toho môžeme prepísať pomer  $\frac{1}{R^*}$  v tvare:

$$\frac{1}{R^*} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a^2}{rd}\right)^n P_n(\cos \vartheta).$$

Tento výraz dosadíme do vzorca pre potenciál  $\varphi^*$  a dostaneme:

$$\varphi^* = -L \frac{a}{d} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{2n}}{r^{n+1} d^n} P_n(\cos \vartheta) = -L \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{2n+1}}{r^{n+1} d^{n+1}} P_n(\cos \vartheta).$$

Porovnáme tento vzorec s výrazom (2.2.3) a vidíme, že ide o zhodu jej druhého člena s  $\varphi^*$ .

Preto výraz pre potenciál  $(\varphi_1)_{\sigma_2 \rightarrow \infty}$  možno napísať nasledovne:

$$(\varphi_1)_{\sigma_2 \rightarrow \infty} = \varphi_0 + \varphi^*.$$

Tento výsledok, známy z teórie fyziky, môže byť interpretovaný nasledovne: potenciál bodového zdroja v prítomnosti ideálnej vodivej gule môže byť určený, ako suma potenciálov od skutočného a fiktívneho zdroja (čo je podstata metódy zrkadlenia). Intenzita tohto fiktívneho zdroja bude rovná intenzite skutočného zdroja, násobeného  $\frac{a}{d}$ . Jeho poloha je identická s bodovým obrazom skutočného zdroja. Podľa výrazu (2.2.4) môžeme napísať jednoduchší výraz, ak uvažíme:

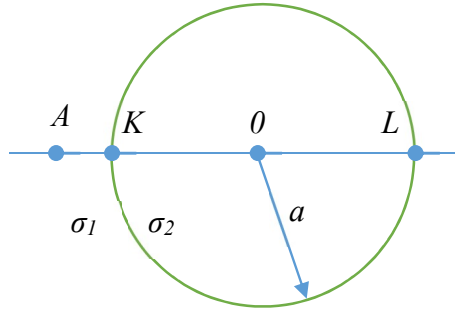
$$\frac{1}{R^*} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{d^{n+1}} P_n(\cos \vartheta).$$

Zavedením tohto označenia, dostaneme:

$$(\varphi_2)_{\sigma_2 \rightarrow \infty} = L \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R^*} \right) = 0,$$

t.j. potenciál všetkých bodov takejto ideálnej vodivej gule bude rovný nule.

Vrátime sa teraz k všeobecným výrazom (2.2.1) a (2.2.2) a predvedieme rad výpočtov, na ilustrovanie operácií s Legendreovými polynómami. Často sa rieši úloha nájsť výraz na vyčíslenie zdanlivého odporu v rôznych bodoch vonkajšieho i vnútorného prostredia gule. Praktický zmysel týchto výpočtov si môžeme ujasniť nasledovne – predpokladajme, že prevedieme pozorovanie/meranie okolo jednej elektródy  $A$ , nachádzajúcej sa na povrchu pôdy (**Obr. 3**). V určitej vzdialenosti od tejto elektródy sa nachádza pologuľová oblasť, vyplnená materiálom inej vodivosti, ako je vodivosť okolitého prostredia, v ktorom je elektróda  $A$ . Je potrebné nájsť rozdelenie zdanlivého špecifického odporu tejto pologuľovej oblasti i mimo nej. Ako je známe, pri riešení úloh kde vystupuje rozhranie zem – vzduch, celý spodný polpriestor sa odráža od povrchu a vrchné prostredie sa považuje za vyplnené tým istým prostredím, ako prostredie pod povrchom. Vykonáme aj v našej úlohe takéto odrazenie/zrkadlenie a dostaneme vodivý priestor, v ktorom sú umiestené elektróda aj guľa s vodivosťou inou, ako okolitý priestor, pričom rozloženie zdanlivého špecifického odporu je treba nájsť na rovine určenej priemerom gule a prechádzajúcou elektródou. Takto postavená úloha sa zrejme rieši vyššie odvodenými vzorcami.



**Obr. 3:** K rozdeleniu špecifického odporu pologuľovej oblasti.

Ako je známe, výpočet zdanlivého špecifického odporu sa v prípade jedinej elektródy prevedie výrazmi:

$$\rho = \frac{E}{I} 2\pi R^2, \quad (2.2.5)$$

$$\rho' = \frac{\Delta v}{I} 2\pi \frac{R^2 - \frac{(MN)^2}{2}}{MN}.$$

Prvý vzorec je upravený pre nepatrnú vzdialenosť medzi potenciálovými elektródami  $M$  a  $N$ . V týchto vzorcoch je  $R$  vzdialenosť stredu elektród  $MN$  a sýtiacej elektródy.  $E$  je intenzita poľa, teoreticky určené deriváciou  $-\frac{\partial \varphi}{\partial R}$ , prakticky však rovné  $\frac{\Delta v}{MN}$ , kde  $\Delta v$  je potenciálový rozdiel, nameraný medzi elektródami  $M$  a  $N$ . Treba podotknúť, že elektródy  $M$  a  $N$  sa v praxi nachádzajú na priamke vedenej z bodu  $A$ . Tento predpoklad je dôležitý pri použití druhej z napísaných rovníc. Aby sme si mohli urobiť predstavu o meraní zdanlivého špecifického odporu mimo guľu i v nej, vypočítame deriváciu potenciálu pozdĺž niektorého smeru – predpokladaného smeru pohybu elektródového meracieho usporiadania, prechádzajúceho elektródou  $A$ . Pretože vzdialenosť elektródy  $A$  a meracích elektród  $MN$  (teoreticky s nekonečne malým  $MN$ ) je označená  $R$ , tak dostaneme:

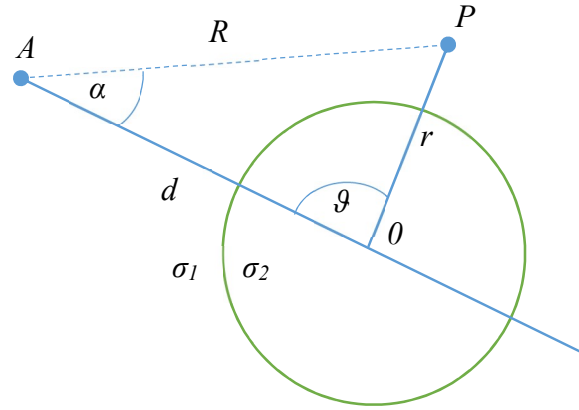
$$E_1 = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial R} = L \left[ \frac{1}{R^2} - \frac{\partial}{\partial R} \sum_{n=0}^{\infty} p_n \frac{a^{2n+1}}{d^{n+1} r^{n+1}} P_n(\cos \vartheta) \right] - \text{mimo gule},$$

$$E_2 = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial R} = L \left[ \frac{1}{R^2} - \frac{\partial}{\partial R} \sum_{n=0}^{\infty} p_n \frac{r^n}{d^{n+1}} P_n(\cos \vartheta) \right] - \text{v guľi}.$$

Druhé členy v hranatých zátvorkách môžeme určiť nasledovne:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial R} \sum_{n=0}^{\infty} p_n \frac{a^{2n+1}}{d^{n+1} r^{n+1}} P_n(\cos \vartheta) = \\
& = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \frac{a^{2n+1}}{d^{n+1} r^{n+1}} \left[ \frac{n+1}{r} \frac{\partial r}{\partial R} P_n(\cos \vartheta) - \frac{\partial P_n(\cos \vartheta)}{\partial \cos \vartheta} \cdot \frac{\partial \cos \vartheta}{\partial R} \right] - \frac{\partial}{\partial R} \sum_{n=0}^{\infty} p_n \frac{r^n}{d^{n+1}} P_n(\cos \vartheta) = \\
& = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \frac{r^n}{d^{n+1}} \left[ \frac{n}{r} \frac{\partial r}{\partial R} P_n(\cos \vartheta) + \frac{\partial P_n(\cos \vartheta)}{\partial \cos \vartheta} \cdot \frac{\partial \cos \vartheta}{\partial R} \right].
\end{aligned}$$

Smer  $R$  určíme uhlom  $\alpha$  (**Obr. 4**), ktorý zvierá tento smer s polárnou osou nami zvoleného súradnicového systému. V takom prípade môžeme písať:



**Obr. 4:** K určení smeru  $R$ .

$$r = \sqrt{R^2 - 2Rd \cos \alpha + d^2}. \quad (2.2.6)$$

Potrebná derivácia potom je:

$$\frac{\partial r}{\partial R} = \frac{R - d \cos \alpha}{\sqrt{R^2 - 2Rd \cos \alpha + d^2}}. \quad (2.2.7)$$

Posledné vyplýva konečne bezprostredne z obrázku. Z trojuholníka AOP môžeme pre kosínus uhla  $\vartheta$  napísať:

$$\cos \vartheta = \frac{d - R \cos \alpha}{r},$$

z čoho:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \cos \vartheta}{\partial R} &= \frac{1}{r^2} \left[ -r \cos \alpha - (d - R \cos \alpha) \frac{dr}{dR} \right] = \frac{1}{r^2} \left[ -r \cos \alpha - \frac{(d - R \cos \alpha)(R - d \cos \alpha)}{r} \right] = \\
&= \frac{1}{r^3} \left[ -\left( r^2 + 2Rd \cos \alpha - R^2 - d^2 \right) \cos \alpha - Rd \sin^2 \alpha \right].
\end{aligned}$$

Zo vzorca pre  $r$  vyplýva, že výraz, stojaci v okrúhlych zátvorkách je rovný nule, preto:

$$\frac{\partial \cos \vartheta}{\partial R} = -\frac{Rd \sin^2 \alpha}{r^3}. \quad (2.2.8)$$

Z teórie Legendreových polynómov poznáme vzorec:

$$\frac{\partial P_n(\cos \vartheta)}{\partial \cos \vartheta} = -\frac{n+1}{\sin^2 \vartheta} [P_{n+1}(\cos \vartheta) - \cos \vartheta P_n(\cos \vartheta)], \quad (2.2.9)$$

ktorý umožňuje vyjadriť derivácie Legendreových polynómov pomocou polynómov vyšších rádov. Dosadíme výrazy (2.2.7), (2.2.8) a (2.2.9) do vzorcov pre derivácie úvodných súm a dostaneme:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial R} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n a^{2n+1}}{d^{n+1} r^{n+1}} P_n(\cos \vartheta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n a^{2n+1}}{d^{n+1} r^{n+1}} \left\{ \frac{n+1}{r} \cdot \frac{R-d \cos \alpha}{r} P_n(\cos \vartheta) - \right. \\ &\quad \left. \frac{R d \sin^2 \alpha \cdot (n+1)}{r^3 \sin^2 \vartheta} [P_{n+1}(\cos \vartheta) - \cos \vartheta P_n(\cos \vartheta)] \right\}, \\ -\frac{\partial}{\partial R} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n r^n}{d^{n+1}} P_n(\cos \vartheta) &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n r^n}{d^{n+1}} \left\{ \frac{n}{r} \cdot \frac{R-d \cos \alpha}{r} P_n(\cos \vartheta) + \right. \\ &\quad \left. \frac{R d \sin^2 \alpha \cdot (n+1)}{r^3 \sin^2 \vartheta} [P_{n+1}(\cos \vartheta) - \cos \vartheta P_n(\cos \vartheta)] \right\}. \end{aligned}$$

Pretože z trojuholníka AOP (**Obr. 4**) vyplýva vzťah:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \vartheta} = \frac{r}{R},$$

tak môžeme tieto vzorce prepísať:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial R} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n a^{2n+1}}{d^{n+1} r^{n+1}} P_n(\cos \vartheta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n a^{2n+1} (n+1)}{d^{n+1} r^{n+3} R} \left\{ [R(R-d \cos \alpha) + r d \cos \vartheta] P_n(\cos \vartheta) - \right. \\ &\quad \left. r d P_{n+1}(\cos \vartheta) \right\}, \\ -\frac{\partial}{\partial R} \sum_{n=0}^{\infty} p_n \frac{r^n}{d^{n+1}} P_n(\cos \vartheta) &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n r^{n-2}}{d^{n+1} R} \left\{ [nR(R-d \cos \alpha) - (n+1) r d \cos \vartheta] P_n(\cos \vartheta) + \right. \\ &\quad \left. r d (n+1) P_{n+1}(\cos \vartheta) \right\}. \end{aligned}$$

Dosadíme tieto výrazy do vzorcov pre  $E_1$  a  $E_2$  a dostaneme.

$$\begin{aligned} E_1 &= L \left\{ \frac{1}{R^2} + \sum_{n=0}^{\infty} p_n \frac{a^{2n+1} (n+1)}{d^{n+1} r^{n+3} R} \left\{ [R(R-d \cos \alpha) + r d \cos \vartheta] P_n(\cos \vartheta) - r d P_{n+1}(\cos \vartheta) \right\} \right\}, \\ E_2 &= L \left\{ \frac{1}{R^2} + \sum_{n=0}^{\infty} p_n \frac{r^{n-2}}{d^{n+1} R} \left\{ [nR(R-d \cos \alpha) - (n+1) r d \cos \vartheta] P_n(\cos \vartheta) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. r d (n+1) P_{n+1}(\cos \vartheta) \right\} \right\}. \end{aligned}$$

Po dosadení týchto výrazov do rovnice (2.2.5), dostaneme výrazy k výpočtu zdanlivých špecifických odporov:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_1 \left\{ 1 + \sum_{n=0}^{\infty} p_n \frac{a^{2n+1} R (n+1)}{d^{n+1} r^{n+3}} \left\{ [R(R-d \cos \alpha) + r d \cos \vartheta] P_n(\cos \vartheta) - r d P_{n+1}(\cos \vartheta) \right\} \right\}, \\ \rho' &= \rho_1 \left\{ 1 - \sum_{n=0}^{\infty} p_n \frac{r^{n-2} R}{d^{n+1}} \left\{ [nR(R-d \cos \alpha) - (n+1) r d \cos \vartheta] P_n(\cos \vartheta) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. r d (n+1) P_{n+1}(\cos \vartheta) \right\} \right\}. \end{aligned}$$

Keď smer  $R$  prechádza stredom gule, tak je  $\alpha = 0$  alebo  $\pi$ , keď sa bod nachádza na opačnej strane zdroja, ako stred gule, uhol  $\vartheta$  môže nadobúdať hodnotu buď  $0$  (bod na tej istej strane ako stred gule) alebo  $\pi$  (bod a zdroj na rôznych stranách od stredu gule). V jednom aj druhom prípade sa vzorce zdanlivého špecifického odporu značne zjednodušia. Podľa rovníc:

$$P_n(1) = 1,$$

$$P_n(-1) = (-1)^n,$$

Legendreove polynómy stojace v pravej časti týchto dvoch rovníc, majú hodnoty rovné  $1$  so znamienkom plus alebo mínus. Preto pre body, ležiace medzi elektródou a stredom gule ( $\alpha = 0, \vartheta = 0$ ) budeme mať:

$$\rho' = \rho_1 \left\{ 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) p_n \frac{a^{2n+1} R^2}{d^{n+1} r^{n+2}} \right\}, \text{ kde } r = d - R,$$

pre body nachádzajúce sa medzi  $A$  a  $K$  (**Obr. 3**), a pre body medzi  $K$  a  $0$  máme:

$$\rho' = \rho_1 \left\{ 1 + \sum_{n=0}^{\infty} n p_n \frac{r^{n-1} R^2}{d^{n+1}} \right\}, \text{ kde } r = d - R.$$

Pre body nachádzajúce sa na opačnej strane od stredu  $0$ , ako je zdroj ( $\alpha = 0, \vartheta = \pi$ ) máme:

$$\rho' = \rho_1 \left\{ 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n p_n \frac{r^{n-1} R^2}{d^{n+1}} \right\}, \text{ kde } r = R - d$$

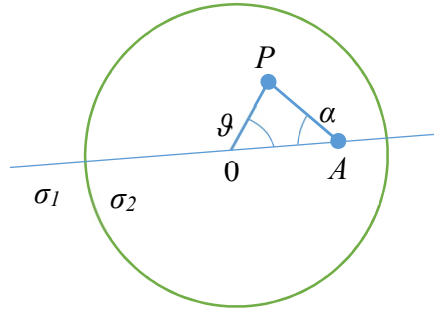
pre body ležiace medzi  $0$  a  $L$ , a pre body nachádzajúce sa napravo od bodu  $L$  máme:

$$\rho' = \rho_1 \left\{ 1 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) p_n \frac{d^{2n+1} R^2}{d^{n+1} r^{n+2}} \right\}, \text{ kde } r = R - d.$$

Nakoniec, v bodoch nachádzajúcich sa na opačnej strane od zdroja, ako stred gule ( $\alpha = 0, \vartheta = 0$ ) (naľavo od bodu  $A$ , **Obr. 3**) máme:

$$\rho' = \rho_1 \left\{ 1 + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) p_n \frac{a^{2n+1} R^2}{d^{n+1} r^{n+2}} \right\}, \text{ kde } r = R + d.$$

Ku kompletnému riešeniu našej úlohy treba ešte riešiť prípad, kedy sa elektróda nachádza v guli. Nech je teda špecifická vodivosť materiálu, ktorý vyplňuje guľu  $\sigma_2$ , vodivosť vonkajšieho prostredia je  $\sigma_1$  a polomer gule je  $a$  (**Obr. 5**). Vzdialenosť elektródy od stredu gule je  $d$ , stred gule je počiatkom sférických súradníc, polárna os prechádza zdrojom.



**Obr. 5:** K riešeniu v guli.

V dôsledku osovej symetrie v rozdelení potenciálu, ktorá platí v danom prípade, diferenciálnou rovnicou určujúcou deformačný účinok guľového rozhrania na pole zdroja, bude:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \right) = 0.$$

Použijeme tú istú metódu riešenia tejto rovnice, ako bola použitá v predchádzajúcom prípade a môžeme napísať pre funkciu, ktorá určuje deformáciu vo vonkajšom prostredí:

$$\varphi_e = \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{-(n+1)} P_n(\cos \vartheta),$$

a pre funkciu, ktorá umožňuje nájsť deformačný účinok v guli:

$$\varphi_i = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \vartheta).$$

Potenciálna funkcia pre zdroj umiestnený v homogénnom prostredí vodivosti  $\sigma_2$  je:

$$\varphi_0 = \frac{I}{4\pi\sigma_2 R}.$$

Keď označíme ako predtým  $\frac{I}{4\pi\sigma_2} = L$ , tak môžeme posledný výraz napísať aj takto:

$$\varphi_0 = \frac{L}{R},$$

pričom  $R = \sqrt{d^2 - 2dr \cos \vartheta + r^2}$ . Pre body nachádzajúce sa pri povrchu gule v jej vnútri i mimo nej, bude  $r$  väčšie ako  $d$  (elektroda je vnútri gule) a môžeme rozložiť  $R$  do radu Legendreových polynómov:

$$\varphi_0 = L \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n}{r^{n+1}} P_n(\cos \vartheta).$$

Takto vzorec potenciálu  $\varphi_1(r, \vartheta)$  bodov ležiacich mimo guľu a potenciálu  $\varphi_2(r, \vartheta)$  bodov ležiacich v guľi, môžeme písať nasledujúce vzťahy:

$$\varphi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{Ld^n}{r^{n+1}} + B_n r^{-(n+1)} \right] P_n(\cos \vartheta),$$

$$\varphi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{Ld^n}{r^{n+1}} + A_n r^n \right] P_n(\cos \vartheta).$$

Pretože na povrchu gule musia platiť podmienky spojitosti potenciálu a normálovej zložky prúdu, tak môžeme písať:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{Ld^n}{a^{n+1}} + B_n a^{-(n+1)} \right] P_n(\cos \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{Ld^n}{a^{n+1}} + A_n a^n \right] P_n(\cos \vartheta),$$

$$-\sigma_1 \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{(n+1)}{a^{n+2}} (Ld^n + B_n) \right] P_n(\cos \vartheta) = \sigma_2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[ -(n+1) \frac{Ld^n}{a^{n+2}} + n A_n a^{n-1} \right] P_n(\cos \vartheta).$$

Keď porovnáme medzi sebou koeficienty stojace pri Legendreových polynómoch rovnakého rádu, dostaneme sústavu rovníc, ktorú môžeme napísať nasledovne:

$$\left. \begin{aligned} B_n &= A_n a^{2n+1} \\ \sigma_1 L(n+1)d^n + \sigma_1(n+1)B_n &= \sigma_2(n+1)Ld^n - \sigma_2 n A_n a^{2n+1} \end{aligned} \right\} n = 0, 1, 2, \dots$$

Riešením tejto sústavy rovníc vzhľadom na  $A_n$  a  $B_n$  dostaneme:

$$A_n = L \frac{(n+1)(\sigma_2 - \sigma_1)}{n\sigma_2 + (n+1)\sigma_1} \cdot \frac{d^n}{a^{2n+1}},$$

$$B_n = L \frac{(n+1)(\sigma_2 - \sigma_1)}{n\sigma_2 + (n+1)\sigma_1} \cdot d^n,$$

alebo, ak pre zjednodušenie označíme  $\frac{(n+1)(\sigma_2 - \sigma_1)}{n\sigma_2 + (n+1)\sigma_1} = p'_n$ , tak dostaneme:

$$A_n = L p'_n \cdot \frac{d^n}{a^{2n+1}},$$

$$B_n = L p'_n \cdot d^n.$$

Pri týchto hodnotách  $A_n$  a  $B_n$ , výrazy pre potenciál  $\varphi_1(r, \vartheta)$  a  $\varphi_2(r, \vartheta)$  budú:

$$\varphi_1 = L \left[ \frac{1}{R} + \sum_{n=0}^{\infty} p'_n \frac{d^n}{r^{n+1}} P_n(\cos \vartheta) \right],$$

$$\varphi_2 = L \left[ \frac{1}{R} + \sum_{n=0}^{\infty} p'_n \frac{d^n r^n}{a^{2n+1}} P_n(\cos \vartheta) \right].$$

Výraz pre potenciál vo vonkajšom prostredí potom môžeme prepísať aj nasledovne:

$$\varphi_1(r, \vartheta) = L \sum_{n=0}^{\infty} \left[ 1 + \frac{(n+1)(\sigma_2 - \sigma_1)}{n\sigma_2 + (n+1)\sigma_1} \right] \frac{d^n}{r^{n+1}} P_n(\cos \vartheta) = \frac{I}{4\pi\sigma_2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)\sigma_2}{(n+1)\sigma_1 + n\sigma_2} \frac{d^n}{r^{n+1}} P_n(\cos \vartheta).$$

Poslednú rovnicu upravíme (násobíme pravú časť členom  $\sigma_1$  a osamostatníme prvý člen sumy zodpovedajúci  $n = 0$ ) a dostaneme

$$\varphi_1(r, \vartheta) = \frac{I}{4\pi\sigma_2} \left[ \frac{1}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)\sigma_2}{(n+1)\sigma_1 + n\sigma_2} \frac{d^n}{r^{n+1}} P_n(\cos \vartheta) \right].$$

Keď tu položíme  $\sigma_2 \rightarrow \infty$ , tak všetky členy sumy zmiznú a dostaneme:

$$(\varphi_1(r, \vartheta))_{\sigma_2 \rightarrow \infty} = \frac{I}{4\pi\sigma_2} \cdot \frac{1}{r},$$

t.j. nezávisle od miesta zavedenia prúdu vo vnútri ideálnej vodivej gule je potenciál takéhoto zdroja vo vonkajšom prostredí ekvivalentný potenciálu zdroja, nachádzajúceho sa v strede gule. Aby sme v danom prípade našli vzorec pre zdanlivý špecifický odpor, nájdeme derivácie funkcií  $\varphi_1$  a  $\varphi_2$  pozdĺž smeru  $R$ , prechádzajúceho zdrojom pod uhlom  $\alpha$  k polárnej osi.

Derivácia podľa  $R$  teda je:

$$E_1 = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial R} = L \left\{ \frac{1}{R^2} + \sum_{n=0}^{\infty} p'_n d^n \left[ \frac{n+1}{r^{n+2}} \frac{\partial r}{\partial R} \cdot P_n(\cos \vartheta) - \frac{1}{r^{n+1}} \frac{\partial P_n(\cos \vartheta)}{\partial \cos \vartheta} \cdot \frac{\partial \cos \vartheta}{\partial R} \right] \right\},$$

$$E_2 = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial R} = L \left\{ \frac{1}{R^2} - \sum_{n=0}^{\infty} p'_n \frac{d^n}{a^{2n+1}} \left[ nr^{n-1} \frac{\partial r}{\partial R} \cdot P_n(\cos \vartheta) + r^n \frac{\partial P_n(\cos \vartheta)}{\partial \cos \vartheta} \cdot \frac{\partial \cos \vartheta}{\partial R} \right] \right\}.$$

Pretože z trojuholníka AOP (**Obr. 5**) vyplýva, že:

$$r = \sqrt{R^2 - 2Rd \cos \alpha + d^2},$$

$$\cos \vartheta = \frac{R - d \cos \alpha}{r},$$

tak

$$\frac{\partial r}{\partial R} = \frac{R - d \cos \alpha}{r},$$

$$\frac{\partial \cos \vartheta}{\partial R} = -\frac{Rd \sin^2 \alpha}{r^3}.$$

Okrem toho:

$$\frac{\partial P_n(\cos \vartheta)}{\partial \cos \vartheta} = -\frac{n+1}{\sin^2 \vartheta} [P_{n+1}(\cos \vartheta) - \cos \vartheta P_n(\cos \vartheta)].$$

Dosadíme tieto výrazy pre derivácie  $\frac{\partial r}{\partial R}$ ,  $\frac{\partial \cos \vartheta}{\partial R}$  a  $\frac{\partial P_n(\cos \vartheta)}{\partial \cos \vartheta}$  do vzorcov pre  $E_1$  a  $E_2$

a dostaneme:

$$E_1 = L \left\{ \frac{1}{R^2} + \sum_{n=0}^{\infty} p'_n \frac{d^n}{r^{n+4}} (n+1) \left[ \frac{r(R-d \cos \alpha) P_n(\cos \vartheta) - \frac{Rd \sin^2 \alpha}{\sin^2 \vartheta} \{P_{n+1}(\cos \vartheta) - \cos \vartheta P_n(\cos \vartheta)\}} \right] \right\},$$

$$E_2 = L \left\{ \frac{1}{R^2} - \sum_{n=0}^{\infty} p'_n \frac{d^n r^{n-3}}{a^{2n+1}} \left[ \frac{nr(R-d \cos \alpha) P_n(\cos \vartheta) - \frac{Rd \sin^2 \alpha}{\sin^2 \vartheta} (n+1) \{P_{n+1}(\cos \vartheta) - \cos \vartheta P_n(\cos \vartheta)\}} \right] \right\}.$$

Pretože použitie sínusovej vety v trojuholníku AOP dá:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \vartheta} = \frac{r}{R},$$

tak po dosadení tohto pomeru do rovníc pre  $E_1$  a  $E_2$  dostaneme

$$E_1 = L \left\{ \frac{1}{R^2} + \sum_{n=0}^{\infty} p'_n \frac{d^n}{r^{n+3} R} (n+1) \left[ \{R(R-d \cos \alpha) + rd \cos \vartheta\} P_n(\cos \vartheta) - rd P_{n+1}(\cos \vartheta) \right] \right\},$$

$$E_2 = L \left\{ \frac{1}{R^2} - \sum_{n=0}^{\infty} p'_n \frac{d^n r^{n-2}}{a^{2n+1} R} \left[ \{nR(R-d \cos \alpha) + (n+1)rd \cos \vartheta\} P_n(\cos \vartheta) - (n+1)rd P_{n+1}(\cos \vartheta) \right] \right\}.$$

Koeficienty stojace pri  $P_n(\cos \vartheta)$  môžeme ďalej vyjadriť nasledovne:

$$\begin{aligned} R(R-d \cos \alpha) + rd \cos \vartheta &= R(R-d \cos \alpha) - d(d-R \cos \alpha) \\ &= R^2 - 2Rd \cos \alpha + d^2 = r^2, \\ nR(R-d \cos \alpha) + (n+1)rd \cos \vartheta &= nR(R-d \cos \alpha) + (n+1)d(d-R \cos \alpha) = \\ &= nr^2 + d(d-R \cos \alpha). \end{aligned}$$

Tieto výrazy dosadíme do posledných rovníc a dostávame:

$$E_1 = L \left\{ \frac{1}{R^2} + \sum_{n=0}^{\infty} p'_n \frac{d^n}{r^{n+2} R} (n+1) \left[ r P_n(\cos \vartheta) - d P_{n+1}(\cos \vartheta) \right] \right\},$$

$$E_2 = L \left\{ \frac{1}{R^2} - \sum_{n=0}^{\infty} p'_n \frac{d^n r^{n-2}}{a^{2n+1} R} \left[ \{nr^2 + d(d-R \cos \alpha)\} P_n(\cos \vartheta) - (n+1)rd P_{n+1}(\cos \vartheta) \right] \right\}.$$

S ohľadom na:

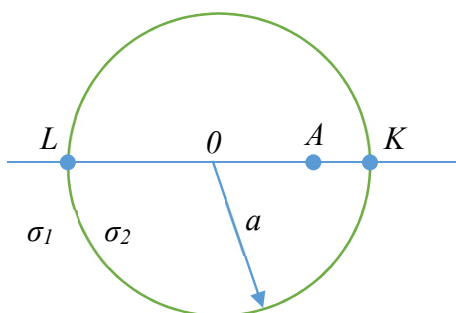
$$L = \frac{I}{4\pi\sigma_2} = \frac{I\rho_2}{4\pi},$$

využijeme rovnicu (2.2.5) v ktorej sme namiesto  $2\pi$  zaviedli  $4\pi$ , nakoľko tu ide o celý priestor, dostaneme vzorec zdanlivého špecifického odporu:

$$\rho = \rho_2 \left\{ 1 + \sum_{n=0}^{\infty} p'_n \frac{d^n R}{r^{n+2}} (n+1) \left[ r P_n(\cos \vartheta) - d P_{n+1}(\cos \vartheta) \right] \right\},$$

$$\rho' = \rho_2 \left\{ 1 - \sum_{n=0}^{\infty} p'_n \frac{d^n r^{n-2} R}{a^{2n+1}} \left[ \{nr^2 + d(d-R \cos \alpha)\} P_n(\cos \vartheta) - (n+1)rd P_{n+1}(\cos \vartheta) \right] \right\}.$$

Uvažujme teraz prípad analogický prípadu z prvej časti tohto paragrafu – meranie zdanlivého špecifického odporu pozdĺž priamky na povrchu pôdy, prechádzajúcej stredom poglobovej oblasti polomeru  $a$ , vyplnenej materiálom so špecifickým odporom  $\rho_2$ . Predpokladajme, že sýtiaca elektróda sa nachádza vo vnútri oblasti. Vzorec zdanlivého špecifického odporu môžeme získať z odvodených výrazov ak dáme konkrétne hodnoty uhlom  $\alpha$  a  $\vartheta$ . Ľahko sa presvedčíme, že pre body ležiace na priamke z tej istej strany stredu  $O$  (**Obr. 6**) poglobovej oblasti, ako je elektróda  $A$ , je uhol  $\vartheta = 0$ , pre body ležiace na opačnej strane od stredu  $O$ , je uhol  $\vartheta = \pi$ .



**Obr. 6:** Poloha zdroja  $A$  v guli.

Ďalej, pre body ležiace na rovnakej strane od elektródy  $A$  ako stred  $O$ , je  $\alpha = 0$ , a nakoniec pre body ležiace na opačnej strane od  $A$  ako stred  $O$ , je  $\alpha = \pi$ . Po uvážení týchto predpokladov a keď berieme do úvahy, že:

$$P_n(1) = 1,$$

$$P_n(-1) = (-1)^n,$$

dostaneme pre zdanlivý špecifický odpor riešenia v závislosti polohy bodu výpočtu na priamke prechádzajúcej cez bod  $A$  a stred  $O$ . Pre body nachádzajúce sa napravo od  $K$  máme výraz:

$$\rho' = \rho_2 \left\{ 1 + \sum_{n=0}^{\infty} p'_n \frac{d^n R^2}{r^{n+2}} (n+1) \right\}, \text{ kde } r = R + d,$$

ďalej pre body ležiace medzi  $A$  a  $K$ :

$$\rho' = \rho_2 \left\{ 1 - \sum_{n=0}^{\infty} n p'_n \frac{d^n r^{n-1} R^2}{a^{2n+1}} \right\}, \text{ kde } r = R + d,$$

ďalej pre body nachádzajúce sa medzi  $O$  a  $A$  máme:

$$\rho' = \rho_2 \left\{ 1 + \sum_{n=0}^{\infty} n p'_n \frac{d^n r^{n-1} R^2}{a^{2n+1}} \right\}, \text{ kde } r = d - R,$$

ďalej pre body nachádzajúce sa medzi  $L$  a  $0$  máme:

$$\rho' = \rho_2 \left[ 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n p'_n \frac{d^n r^{n-1} R^2}{a^{2n+1}} \right], \text{ kde } r = R - d,$$

a nakoniec pre body ležiace naľavo od  $L$ :

$$\rho' = \rho_2 \left[ 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) p'_n \frac{d^n R^2}{r^{n+2}} \right], \text{ kde } r = R - d.$$

Pri poznaní riešenia úlohy pre jednu elektródu, ľahko, s použitím zákona superpozície potenciálov, môžeme riešenie zovšeobecniť na prípad dvoch sýtiacich elektród.

## 2.3 Gaussova teória zemského magnetizmu

Úloha o zákonitostiach, ktorým je podrobené rozdelenie magnetizmu na zemskom povrchu, je objektom mnohých výskumov. Ich základom bol predpoklad zmagnetizovaní Zeme. Tieto predpoklady mali často umelý charakter a ťažko očakávať ich zodpovedanie skutočnosti.

Pochybnosti o oprávnenosti hypotézy o rozdelení magnetických hmôt v Zemi, prišiel Gauss s myšlienkou výskumu zemského magnetického poľa bez týchto hypotéz o distribúcii magnetizmu vo vnútri Zeme. Túto myšlienku dokázal vypracovaním teórie zemského magnetizmu, ktorá neskôr dostala jeho meno. Predpokladom v Gaussových prácach je len uznanie skutočnosti prítomnosti magnetických hmôt v Zemi. Preto magnetický potenciál vo vonkajšom priestore možno určiť výrazom:

$$U = \int_{\tau} \frac{\mu}{\rho} d\tau,$$

kde  $\mu$  je hustota rozdelenia magnetických hmôt v elementárnom objeme  $d\tau$ ,  $\rho$  je vzdialenosť medzi elementárnym objemom  $d\tau$  a bodu, v ktorom hľadáme potenciál a integrácia prebieha cez celý objem Zeme  $\tau$ , ktorú Gauss uvažoval vo sférickej aproximácii s polomerom  $R$ . Keď zemský stred považujeme za počiatok sférickeho súradnicového systému a polárnu os stotožníme s osou rotácie, tak po určení súradníc elementu  $d\tau$  a bodu, v ktorom potenciál hľadáme, pomocou trojíc  $r', \vartheta', \varphi'$  a  $r, \vartheta, \varphi$ , môžeme pre veličinu  $\rho$  písať:

$$\rho = \sqrt{r^2 - 2rr' \cos \gamma + r'^2},$$

kde  $r > r'$  (bod výpočtu je mimo Zem) a uhol  $\gamma$  sa určí vzťahom:

$$\cos \gamma = \cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\varphi - \varphi').$$

Pri týchto označeniach môžeme napísať rad:

$$\frac{1}{\rho} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r'^n}{r^{n+1}} P_n(\cos \gamma),$$

a pretože:

$$P_n(\cos \gamma) = P_n(\cos \vartheta) P_n(\cos \vartheta') + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \vartheta) P_n^m(\cos \vartheta') \cos m(\varphi - \varphi'),$$

tak výraz pre potenciál môžeme vyjadriť nasledovne:

$$U = \int_{\tau} \mu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r'^n}{r^{n+1}} \left[ P_n(\cos \vartheta) P_n(\cos \vartheta') + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \vartheta) P_n^m(\cos \vartheta') \cos m(\varphi - \varphi') \right] r'^2 \sin^2 \vartheta' d\vartheta' d\varphi' dr' =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \left\{ P_n(\cos \vartheta) \int_{\tau} \mu r'^n P_n(\cos \vartheta') d\tau + \sum_{m=1}^n 2 \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \left[ P_n^m(\cos \vartheta) \cos m\varphi \int_{\tau} \mu r'^n P_n^m(\cos \vartheta') \cos m\varphi' d\tau + P_n^m(\cos \vartheta) \sin m\varphi \int_{\tau} \mu r'^n P_n^m(\cos \vartheta') \sin m\varphi' d\tau \right] \right\}.$$

Označíme teraz integrálne výrazy nasledovne:

$$\int_{\tau} \mu r'^n P_n(\cos \vartheta') d\tau = a_{n,0},$$

$$\sqrt{2 \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} \int_{\tau} \mu r'^n P_n^m(\cos \vartheta') \cos m\varphi' d\tau = a_{n,m}, \quad (2.3.1)$$

$$\sqrt{2 \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} \int_{\tau} \mu r'^n P_n^m(\cos \vartheta') \sin m\varphi' d\tau = b_{n,m}.$$

Potom môžeme výraz pre potenciál napísať takto:

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \left[ a_{n,0} P_n(\cos \vartheta) + \sum_{m=1}^n \sqrt{2 \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} (a_{n,m} \cos m\varphi + b_{n,m} \sin m\varphi) P_n^m(\cos \vartheta) \right]$$

Gauss zvolil pre koeficienty  $a_{n,m}$  a  $b_{n,m}$  tvar:

$$a_{n,m} = g_n^m R^{n+2},$$

$$b_{n,m} = h_n^m R^{n+2}.$$

Pomocou týchto koeficientov a po zavedení pridružených Legendreových polynómov v tzv. Schmidtovom tvare:

$$\bar{P}_n^m(x) = \sqrt{2 \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(x),$$

môžeme pre potenciál  $U$  napísať jednoduchší výraz:

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^{n+2}}{r^{n+1}} \left[ g_n^0 P_n(\cos \vartheta) + \sum_{m=1}^n (g_n^m \cos m\varphi + h_n^m \sin m\varphi) \bar{P}_n^m(\cos \vartheta) \right]. \quad (2.3.2)$$

V poslednej sume urobíme ešte jednu operáciu. Jej prvý člen je rovný:

$$\frac{R^2}{r} g_0^0 P_0(\cos \vartheta) = \frac{a_{0,0}}{r},$$

a po určení  $a_{0,0}$  z (2.3.1) bude mať tvar:

$$\frac{1}{r} \int_{\tau} \mu d\tau.$$

Pretože v akomkoľvek telese je suma všetkých fiktívnych magnetických hmôt rovná nule, tak prvý člen sumy (2.3.2) vypadne a výraz pre  $U$  možno písať:

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R^{n+2}}{r^{n+1}} \left[ g_n^0 P_n(\cos \vartheta) + \sum_{m=1}^n (g_n^m \cos m\varphi + h_n^m \sin m\varphi) \bar{P}_n^m(\cos \vartheta) \right], \quad (2.3.3)$$

kde teda sumácia podľa  $n$  začína od jednotky.

Keď poznáme výraz pre potenciálovú funkciu, je ľahko nájsť aj výrazy pre zložky poľa. Keď zavedieme pravouhlé súradnice  $X, Y, Z$  orientované nasledovne:

- a) smer  $X$  vedie po geografickom poludníku kladnou časťou k severu,
- b) smer  $Y$  vedie pozdĺž rovnobežky kladnou časťou na východ,
- c) smer  $Z$  vedie pozdĺž vertikály kladnou časťou nadol,

tak pre tieto smery a teda zložky poľa môžeme na povrchu Zeme písať:

$$X = \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial \vartheta}; \quad Y = -\frac{1}{R \sin \vartheta} \frac{\partial U}{\partial \varphi}; \quad Z = \left( \frac{\partial U}{\partial r} \right)_{r=R}$$

Keď vykonáme jednotlivé derivácie a prejdeme k bodom na zemskom povrchu, t.j.  $r = R$ , dostaneme:

$$\begin{aligned} X &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ g_n^0 \frac{\partial}{\partial \vartheta} P_n(\cos \vartheta) - \sum_{m=1}^n (g_n^m \cos m\varphi + h_n^m \sin m\varphi) \frac{\partial}{\partial \vartheta} \bar{P}_n^m(\cos \vartheta) \right], \\ Y &= -\frac{1}{\sin \vartheta} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n m (-g_n^m \sin m\varphi + h_n^m \cos m\varphi) \bar{P}_n^m(\cos \vartheta), \\ Z &= -\sum_{n=1}^{\infty} \left[ (n+1) g_n^0 P_n(\cos \vartheta) + \sum_{m=1}^n (g_n^m \cos m\varphi + h_n^m \sin m\varphi) \bar{P}_n^m(\cos \vartheta) \right]. \end{aligned}$$

Tieto vzorce možno považovať za rovnice s neznámymi  $g$  a  $h$ , keď z pozorovaní poznáme zložky poľa a súradnice  $\vartheta$  a  $\varphi$  stanoviska pozorovania. Ak poznáme pole v niekoľkých bodoch na povrchu Zeme, možno vyčísliť niekoľko prvých koeficientov  $g$  a  $h$  a takto získať prvé členy radov pre zložky poľa, ktoré hrajú dôležitú úlohu. Tieto rady potom umožňujú získať zložky magnetického poľa Zeme aj pre také body, kde sa meranie neuskutočnilo. Za týmto cieľom je

potrebné do radov s koeficientmi získaných z pozorovaní dosadiť súradnice  $\vartheta$  a  $\varphi$  bodu, v ktorom chceme poznať zložky poľa. Sám Gauss vyčíslil koeficienty radov až do štvrtého rádu, čo znamená určiť 24 neznámych.

## 2.5 Potenciál objemovo rozdelených hmôt

Vyčíslenie príťažlivých síl pôsobiacich na hmotný bod hmotami ľubovoľne rozdelenými v určitom objeme, je vo všeobecnom prípade veľmi zložitou úlohou. Iba za niektorých jednoduchých podmienok je možné previesť výpočet až do konca. Zostrojenie konvergujúcich radov pre potenciálovú funkciu môže niekedy uľahčiť určenie silového poľa daného telesom a preto úloha o štruktúre takýchto radov má i praktický význam okrem teoretického.

Úlohou nech je rozloženie výrazu pre príťažlivú silu a potenciál, účinkujúcu na bod, od hmôt uzatvorených určitým objemom. Všeobecný výraz pre potenciál objemovo rozdelených hmôt v bode, nachádzajúcom sa mimo nich má, ako je známe, tvar:

$$U = \int_{\tau} \frac{\delta}{R} d\tau, \quad (2.4.1)$$

kde  $\delta$  je hustota rozdelených hmôt,  $R$  je vzdialenosť priťahovaného bodu od elementárneho objemu  $d\tau$  a integrácia sa vzťahuje na celý objem  $\tau$ , zaujatý hmotami. Zavedieme sférické súradnice a polohu objemu  $d\tau$  opíšeme pomocou trojice  $\rho, \vartheta, \varphi$  a súradnice priťahovaného bodu (bodu výpočtu) trojicou  $\rho_0, \vartheta_0, \varphi_0$ . S týmto označením môžeme písať:

$$R = \sqrt{r_0^2 - 2r_0r \cos \psi + r^2},$$

kde  $\cos \psi = \cos \vartheta \cos \vartheta_0 + \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \cos(\varphi - \varphi_0)$ . Pretože v danom prípade  $r_0 > r$  (bod je mimo objem vyplnený hmotami), tak:

$$\frac{1}{R} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{r_0^{n+1}} P_n(\cos \vartheta).$$

Dosadíme túto hodnotu do vzorca pre potenciál (2.4.1), dostaneme:

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r_0^{n+1}} \int_{\tau} \delta r^n P_n(\cos \psi) d\tau. \quad (2.4.2)$$

Jednotlivé členy tohto radu pri nevysokých hodnotách  $n$  majú jednoduchú podobu. Pre  $n = 0$  budeme mať:

$$\left( \int_{\tau} \delta r^n P_n(\cos \psi) d\tau \right)_{n=0} = \int_{\tau} \delta d\tau = M,$$

kde  $M$  je hmotnosť celého objemu. Pri  $n = 1$  dostane integrál pod znamienkom sumy tvar:

$$\int_{\tau} \delta r \cos \psi d\tau .$$

Ako je známe z mechaniky, bude rovný:

$$Mr_c \cos \psi_c ,$$

kde  $r_c$  je vzdialenosť ťažiska od súradnicového počiatku a  $\psi_c$  je uhol, ktorý zvierá smer  $r_c$  so smerom do priťahovaného bodu. Keď počiatok súradníc presunieme do ťažiska hmôt, tak v rozložení potenciálu podľa sférických funkcií, člen obsahujúci tento integrál zmizne. Pri

$n = 2$  máme  $P_2(\cos \psi) = \frac{3 \cos^2 \psi - 1}{2}$  a člen obsahujúci integrál dostane tvar:

$$\frac{1}{r_0^3} \int_{\tau} \delta r^2 \frac{3 \cos^2 \psi - 1}{2} d\tau = \frac{1}{2r_0^5} \int_{\tau} \delta (3r_0^2 r^2 \cos^2 \psi - r_0^2 r^2) d\tau .$$

Výraz  $3r_0^2 r^2 \cos^2 \psi - r_0^2 r^2$  prevedieme do karteziánskych súradníc. Predovšetkým prechodom od uhla  $\psi$  k súradniciam  $\vartheta, \varphi, \vartheta_0, \varphi_0$ , dostaneme:

$$3r_0^2 r^2 \cos^2 \psi - r_0^2 r^2 = 3r_0^2 r^2 \cos^2 \vartheta \cos^2 \vartheta_0 + 3r_0^2 r^2 \sin^2 \vartheta \sin^2 \vartheta_0 \cos^2 (\varphi - \varphi_0) + \\ 6r_0^2 r^2 \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \cos \vartheta \cos \vartheta_0 \cos (\varphi - \varphi_0) - r_0^2 r^2 .$$

Ďalej použijeme transformačné vzorce pre prechod zo sférického do karteziánskeho systému:

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \\ y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \\ z = r \cos \vartheta,$$

a dostávame:

$$3r_0^2 r^2 \cos^2 \psi - r_0^2 r^2 = 3z_0^2 z^2 + 3x_0^2 x^2 + 3y_0^2 y^2 + 6x_0 y_0 xy + 6x_0 z_0 xz + 6y_0 z_0 yz \\ - (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)(x^2 + y^2 + z^2) = \\ = 2z_0^2 z^2 + 2x_0^2 x^2 + 2y_0^2 y^2 + 6x_0 y_0 xy + 6x_0 z_0 xz + 6y_0 z_0 yz \\ - x_0^2 y^2 - x_0^2 z^2 - y_0^2 x^2 - y_0^2 z^2 - z_0^2 x^2 - z_0^2 y^2 .$$

Skupina členov, ktorá obsahuje len druhé mocniny súradníc môže byť vyjadrená nasledovne:

$$2z_0^2 z^2 + 2x_0^2 x^2 + 2y_0^2 y^2 - x_0^2 y^2 - x_0^2 z^2 - y_0^2 x^2 - y_0^2 z^2 - z_0^2 x^2 - z_0^2 y^2 = \\ = \frac{1}{2} \left[ (2z_0^2 - x_0^2 - y_0^2)(2z^2 - x^2 - y^2) + 3(x_0^2 - y_0^2)(x^2 - y^2) \right] .$$

Preto:

$$3r_0^2 r^2 \cos^2 \psi - r_0^2 r^2 = \frac{1}{2} (2z_0^2 - x_0^2 - y_0^2)(2z^2 - x^2 - y^2) + \\ \frac{3}{2} (x_0^2 - y_0^2)(x^2 - y^2) + 6x_0 y_0 xy + 6x_0 z_0 xz + 6y_0 z_0 yz,$$

a teda pre člen s  $n = 2$  dostaneme:

$$\frac{2z_0^2 - x_0^2 - y_0^2}{4r_0^5} \int_{\tau} \delta(2z^2 - x^2 - y^2) d\tau + \frac{3(x_0^2 + y_0^2)}{4r_0^5} \int_{\tau} \delta(x^2 - y^2) d\tau +$$

$$+ \frac{3}{r_0^5} \left[ x_0 y_0 \int_{\tau} \delta xy d\tau + y_0 z_0 \int_{\tau} \delta yz d\tau + x_0 z_0 \int_{\tau} \delta xz d\tau \right].$$

Posledné tri integrály predstavujú odstredivé momenty a teda budú rovné nule, ak smery súradnicových osí  $x, y$  a  $z$  položíme identické s hlavnými osami inercie telesa. Namiesto dvoch hlavných členov môžeme, zavedením hlavných centrálnych momentov inercie:

$$A = \int_{\tau} \delta(y^2 + z^2) d\tau; \quad B = \int_{\tau} \delta(x^2 + z^2) d\tau; \quad C = \int_{\tau} \delta(x^2 + y^2) d\tau$$

napísať:

$$\frac{2z_0^2 - x_0^2 - y_0^2}{4r_0^5} (A + B - 2C) + \frac{3(x_0^2 - y_0^2)}{4r_0^5} (B - A).$$

Takto k vyčísleniu potenciálu v bode  $P$ , daného súradnicami  $x_0, y_0$ , a  $z_0$ , vyvolaného hmotami rozdelenými vo vnútri objemu  $\tau$ , pri zvolení počiatku systému súradníc v ťažisku pôsobiacich hmôt a orientácii súradnicových osí pozdĺž hlavných osí inercie telesa, môžeme písať vzorec:

$$U = \frac{M}{r_0} + \frac{A + B - 2C}{4r_0^5} (2z_0^2 - x_0^2 - y_0^2) + \frac{3(B - A)}{4r_0^5} (x_0^2 - y_0^2) + \sum_{n=3}^{\infty} \int_{\tau} \delta \frac{r^n}{r_0^{n+1}} P_n(\cos \psi) d\tau,$$

kde členy pod znakom sumy sú malé v pomere ku prvým členom. Derivovaním pozdĺž súradníc dostaneme vzorec na výpočet zložiek sily poľa.

### 3. Lamého funkcie

#### 3.1 Eliptické súradnice

V niektorých prípadoch pri riešení úloh aplikovanej geofyziky je vhodné zavedenie tzv. eliptických súradníc (presnejší výraz by asi bol „elipsoidálne“ súradnice aby sme odlíšili trojrozmerný prípad od dvojrozmerného – elipsoid od elipsy). Predstavu o takýchto súradniciach si môžeme urobiť z rovníc:

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} &= 1, \\ \frac{x^2}{a^2 + \mu} + \frac{y^2}{b^2 + \mu} + \frac{z^2}{c^2 + \mu} &= 1, \\ \frac{x^2}{a^2 + \nu} + \frac{y^2}{b^2 + \nu} + \frac{z^2}{c^2 + \nu} &= 1,\end{aligned}\tag{3.1.1}$$

v ktorých je

$$\begin{aligned}a &> b > c, \\ a &> \lambda \geq -c^2, \\ -c^2 &\geq \mu \geq -b^2, \\ -b^2 &\geq \nu \geq -a^2.\end{aligned}$$

Prvá z napísaných rovníc/vlastností určuje systém trojosých konfokálnych elipsoidov s polosami  $\sqrt{a^2 + \lambda}$ ,  $\sqrt{b^2 + \lambda}$  a  $\sqrt{c^2 + \lambda}$  a s ohniskami hlavných rezov ležiacimi na osi  $x$  vo vzdialenosti od stredu rovných  $\sqrt{a^2 - b^2}$  a  $\sqrt{a^2 - c^2}$  a na osi  $y$  vo vzdialenosti  $\sqrt{b^2 - c^2}$ . Druhá rovnica určuje systém hyperboloidov s jednou plochou s takým rozložením ohnísk hlavných rezov ako v prípade elipsoidov. Tretia rovnica predstavuje systém hyperboloidov s dvoma plochami s hlavnou osou v smere  $x$ . Ohniská hlavných rezov tohto systému sú identické s ohniskami spomenutého elipsoidu. Každú z rovníc systému (3.1.1) možno považovať za špeciálny prípad rovnice:

$$F(u) = \frac{x^2}{a^2 + u} + \frac{y^2}{b^2 + u} + \frac{z^2}{c^2 + u} - 1 = 0,$$

v ktorej parameter  $u$  nadobúda hodnôt  $\lambda$ ,  $\mu$  a  $\nu$ . Inými slovami  $\lambda$ ,  $\mu$  a  $\nu$  sú koreňmi rovnice  $F(u) = 0$ . V takom prípade môžeme pre  $F(u)$  písať:

$$F(u) = \frac{x^2}{a^2 + u} + \frac{y^2}{b^2 + u} + \frac{z^2}{c^2 + u} - 1 = -\frac{(u - \lambda)(u - \mu)(u - \nu)}{(a^2 + u)(b^2 + u)(c^2 + u)}.$$

Násobíme obidve strany poslednej rovnice výrazom  $a^2 + u$  a potom položíme  $u = -a^2$  a dostaneme:

$$x^2 = \frac{(a^2 + \lambda)(a^2 + \mu)(a^2 + \nu)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)},$$

a takisto vynásobením tejto rovnice výrazmi  $b^2 + u$  a  $c^2 + u$  a následným dosadením  $u = -b^2$  a  $u = -c^2$  dostaneme:

$$y^2 = \frac{(b^2 + \lambda)(b^2 + \mu)(b^2 + \nu)}{(b^2 - a^2)(b^2 - c^2)}$$

$$z^2 = \frac{(c^2 + \lambda)(c^2 + \mu)(c^2 + \nu)}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}$$

Takto každej skupine hodnôt parametrov  $\lambda, \mu$  a  $\nu$  odpovedá vlastná skupina súradníc  $x, y$  a  $z$  (bez vplyvu znamienka stojaceho pri  $x$ ). a opačne, každej skupine hodnôt súradníc  $x, y, z$  odpovedá určitá skupina parametrov  $\lambda, \mu$  a  $\nu$ . Preto tieto parametre možno považovať za súradnice bodu v osobitnej sústave súradníc, v ktorých sú súradnicové plochy určené rovnicami (3.1.1). Tieto súradnice dostali názov eliptické.

Preskúmame teraz podrobnejšie súradnicové plochy tejto sústavy. Keď  $u^2, \nu^2$  a  $w^2$  budú znamenať súčty:

$$u^2 = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right)^2,$$

$$\nu^2 = \left(\frac{\partial \mu}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial z}\right)^2,$$

$$w^2 = \left(\frac{\partial \nu}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \nu}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \nu}{\partial z}\right)^2,$$

tak kosínusy smerových uhlov k ploche  $\lambda = \text{konšt.}$  budú určené rovnicami:

$$\cos(n_1, x) = \frac{1}{u} \frac{\partial \lambda}{\partial x}, \quad \cos(n_1, y) = \frac{1}{u} \frac{\partial \lambda}{\partial y}, \quad \cos(n_1, z) = \frac{1}{u} \frac{\partial \lambda}{\partial z}.$$

Tak isto kosínusy smerových uhlov kolmíc k plochám  $\mu = \text{konšt.}$  a  $\nu = \text{konšt.}$  sú:

$$\cos(n_2, x) = \frac{1}{\nu} \frac{\partial \mu}{\partial x}, \quad \cos(n_2, y) = \frac{1}{\nu} \frac{\partial \mu}{\partial y}, \quad \cos(n_2, z) = \frac{1}{\nu} \frac{\partial \mu}{\partial z},$$

$$\cos(n_3, x) = \frac{1}{w} \frac{\partial \nu}{\partial x}, \quad \cos(n_3, y) = \frac{1}{w} \frac{\partial \nu}{\partial y}, \quad \cos(n_3, z) = \frac{1}{w} \frac{\partial \nu}{\partial z}.$$

Dokážme, že plochy určené rovnicami (3.1.1) sú ortogonálne, t.j. že normály ku všetkým súradnicovým plochám v každom bode priestoru sú si navzájom kolmé. Derivujeme prvú rovnicu sústavy podľa  $x$  a dostaneme:

$$\frac{2x}{a^2 + \lambda} - \left[ \frac{x^2}{(a^2 + \lambda)^2} + \frac{y^2}{(b^2 + \lambda)^2} + \frac{z^2}{(c^2 + \lambda)^2} \right] \frac{\partial \lambda}{\partial x} = 0.$$

Rovnako nám derivácie podľa  $y$  a  $z$  dajú:

$$\frac{2y}{b^2 + \lambda} - \left[ \frac{x^2}{(a^2 + \lambda)^2} + \frac{y^2}{(b^2 + \lambda)^2} + \frac{z^2}{(c^2 + \lambda)^2} \right] \frac{\partial \lambda}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{2z}{c^2 + \lambda} - \left[ \frac{x^2}{(a^2 + \lambda)^2} + \frac{y^2}{(b^2 + \lambda)^2} + \frac{z^2}{(c^2 + \lambda)^2} \right] \frac{\partial \lambda}{\partial z} = 0,$$

z čoho bezprostredne vyplýva:

$$\frac{\frac{\partial \lambda}{\partial x}}{\frac{2x}{a^2 + \lambda}} = \frac{\frac{\partial \lambda}{\partial y}}{\frac{2y}{b^2 + \lambda}} = \frac{\frac{\partial \lambda}{\partial z}}{\frac{2z}{c^2 + \lambda}} = \frac{1}{\frac{x^2}{(a^2 + \lambda)^2} + \frac{y^2}{(b^2 + \lambda)^2} + \frac{z^2}{(c^2 + \lambda)^2}}.$$

Analogicky derivujeme podľa  $x$ ,  $y$  a  $z$  druhú rovnicu sústavy (3.1.1) a dostaneme podobnú sústavu vzťahov:

$$\frac{\frac{\partial \mu}{\partial x}}{\frac{2x}{a^2 + \mu}} = \frac{\frac{\partial \mu}{\partial y}}{\frac{2y}{b^2 + \mu}} = \frac{\frac{\partial \mu}{\partial z}}{\frac{2z}{c^2 + \mu}} = \frac{1}{\frac{x^2}{(a^2 + \mu)^2} + \frac{y^2}{(b^2 + \mu)^2} + \frac{z^2}{(c^2 + \mu)^2}}.$$

Odčítame prvú rovnicu od druhej rovnice sústavy (3.1.1) a dostávame:

$$(\mu - \lambda) \left[ \frac{x^2}{(a^2 + \lambda)(a^2 + \mu)} + \frac{y^2}{(b^2 + \lambda)(b^2 + \mu)} + \frac{z^2}{(c^2 + \lambda)(c^2 + \mu)} \right] = 0. \quad (3.1.2)$$

Označíme pomery:

$$\frac{1}{\frac{x^2}{(a^2 + \lambda)} + \frac{y^2}{(b^2 + \lambda)} + \frac{z^2}{(c^2 + \lambda)}} = \varphi(\lambda),$$

$$\frac{1}{\frac{x^2}{(a^2 + \mu)} + \frac{y^2}{(b^2 + \mu)} + \frac{z^2}{(c^2 + \mu)}} = \varphi(\mu),$$

a vynásobíme postupne rovnice

$$\frac{\frac{\partial \lambda}{\partial x}}{\frac{2x}{a^2 + \lambda}} = \varphi(\lambda) \quad \text{a} \quad \frac{\frac{\partial \mu}{\partial x}}{\frac{2x}{a^2 + \mu}} = \varphi(\mu)$$

čím dostaneme:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial x} = 4\varphi(\lambda)\varphi(\mu) \frac{x^2}{(a^2 + \lambda)(a^2 + \mu)}.$$

Analogicky dostaneme aj:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial y} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial y} = 4\varphi(\lambda)\varphi(\mu) \frac{y^2}{(b^2 + \lambda)(b^2 + \mu)},$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial z} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial z} = 4\varphi(\lambda)\varphi(\mu) \frac{z^2}{(c^2 + \lambda)(c^2 + \mu)}.$$

Určíme pomery v pravých častiach napísaných rovníc a dosadíme ich do výrazu (3.1.2) a dostaneme:

$$\frac{\mu - \lambda}{4\varphi(\lambda)\varphi(\mu)} \left[ \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \lambda}{\partial z} \frac{\partial \mu}{\partial z} \right] = 0,$$

čo po vykrátení  $\frac{\mu - \lambda}{4\varphi(\lambda)\varphi(\mu)}$  dokazuje ortogonálnosť povrchov  $\mu = \text{konšt.}$  a  $\lambda = \text{konšt.}$

Presvedčiť sa o tomto môžeme vynásobením rovnice

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \lambda}{\partial z} \frac{\partial \mu}{\partial z} = 0$$

premennými  $u, v$  a  $w$ . V takom prípade táto rovnica, v dôsledku vyššie uvedených výrazov pre kosínusy smerových uhlov normály, prejde na:

$$uv \left[ \cos(n_1, x) \cos(n_2, x) + \cos(n_1, y) \cos(n_2, y) + \cos(n_1, z) \cos(n_2, z) \right] = uv \cos(n_1, n_2).$$

Nakoľko  $uv \neq 0$  tak musí  $\cos(n_1, n_2) = 0$ , t.j. smery  $n_1$  a  $n_2$  sú navzájom kolmé. Analogicky možno dokázať i ortogonálnosť smeru  $n_3$ . Pretože zásadný záujem aplikovanej geofyziky tvorí

riešenie rovníc typu  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u = 0$  s hodnotami  $k$  často rovnými nule, kedy táto

rovnica prechádza na Laplaceovu rovnicu, pokúsime sa túto rovnicu previesť do eliptických súradníc. Tento prepis je najvhodnejšie previesť tak, že sa stanovia všeobecné vzorce pre vyjadrenie Laplaceovej rovnice v ľubovoľných ortogonálnych súradniciach.

### 3.2 Laplaceova rovnica v ortogonálnych súradniciach

Keď máme ľubovoľný vektor  $\mathbf{A}$ , tak podľa Gaussovho teorému môžeme napísať:

$$\int_{\tau} \operatorname{div} \mathbf{A} d\tau = - \int_S \mathbf{A}_n dS,$$

kde prvý integrál sa počíta cez objem uzavretý povrchom  $S$ , cez ktorý sa počíta druhý integrál a  $n$  je vnútornou normálou k tomuto povrchu. Keď priemety vektora  $\mathbf{A}$  na normály  $n_1$ ,  $n_2$  a  $n_3$  k súradnicovým povrchom ortogonálnej sústavy súradníc  $u$ ,  $v$  a  $w$ , označíme  $\mathbf{A}_1$ ,  $\mathbf{A}_2$  a  $\mathbf{A}_3$  tak pre  $\mathbf{A}_n$  môžeme písať:

$$\mathbf{A}_n = \mathbf{A}_1 \cos(n, n_1) + \mathbf{A}_2 \cos(n, n_2) + \mathbf{A}_3 \cos(n, n_3).$$

Sústavou povrchov  $u$  a  $v$  rozdelíme objem  $\tau$  na elementárne objemy/krivočiare hranoly. Tieto hranoly „vyrežú“ na povrchu  $S$  elementárne plôšky  $dS$ , ktorých veľkosti priemetov na súradnicovú plochu, ktorá je ortogonálna hranolu, môžu byť nájdené na základe nasledovných úvah. Už sme zistili, že smerové kosínusy normál k povrchom  $u$ ,  $v$ ,  $w$  sú dané výrazmi:

$$\begin{aligned} \cos(n_1, x) &= \frac{1}{U} \frac{\partial u}{\partial x}, & \cos(n_1, y) &= \frac{1}{U} \frac{\partial u}{\partial y}, & \cos(n_1, z) &= \frac{1}{U} \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \cos(n_2, x) &= \frac{1}{V} \frac{\partial u}{\partial x}, & \cos(n_2, y) &= \frac{1}{V} \frac{\partial u}{\partial y}, & \cos(n_2, z) &= \frac{1}{V} \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \cos(n_3, x) &= \frac{1}{W} \frac{\partial u}{\partial x}, & \cos(n_3, y) &= \frac{1}{W} \frac{\partial u}{\partial y}, & \cos(n_3, z) &= \frac{1}{W} \frac{\partial u}{\partial z}, \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} U^2 &= \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2, \\ V^2 &= \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2, \\ W^2 &= \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2. \end{aligned}$$

Preto môžeme napísať:

$$\frac{\partial u}{\partial n_1} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos(n_1, x) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(n_1, y) + \frac{\partial u}{\partial z} \cos(n_1, z) = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{1}{U} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{1}{U} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{1}{U} \frac{\partial u}{\partial z} = U.$$

Z tohto vzt'ahu ihneď zistíme, že  $dn_1 = \frac{du}{U}$  a tak isto analogicky  $dn_2 = \frac{dv}{V}$  a  $dn_3 = \frac{dw}{W}$ . Preto priemet  $dS$  na súradnicovú plochu  $w$ , ako veličina rovná  $dn_1 dn_2$  sa určí ako:

$$\pm dS \cos(n_1, n_2) = \frac{du}{U} \frac{dv}{V}.$$

Analogickými vzťahmi môžeme napísať projekcie elementárnych plôch tak isto získaných pretnutím objemu  $\tau$  súradnicovými plochami  $v$  a  $w$ , alebo  $w$  a  $u$ . Preto rovnicu Gaussovhovho teorému môžeme napísať v tvare:

$$\begin{aligned}\int_{\tau} \operatorname{div} \mathbf{A} d\tau &= - \int_S \left[ A_1 \cos(n, n_1) + A_2 \cos(n, n_2) + A_3 \cos(n, n_3) \right] dS = \\ &= - \left[ \int_S A_1 \frac{dv}{V} \frac{dw}{W} + \int_S A_2 \frac{dw}{W} \frac{du}{U} + \int_S A_3 \frac{du}{U} \frac{dv}{V} \right].\end{aligned}$$

Prvý z integrálov pravej časti môžeme upraviť nasledovne:

$$\int_S A_1 \frac{dv}{V} \frac{dw}{W} = \int_{\tau} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{A_1}{VW} \right) du dv dw.$$

Analogicky zmeníme na objemové integrály i ostatné členy. Po tejto operácii dostaneme:

$$\int_{\tau} \operatorname{div} \mathbf{A} d\tau = \int_{\tau} \left[ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{A_1}{VW} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{A_2}{UW} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left( \frac{A_3}{VU} \right) \right] d\tau.$$

Pretože výraz pre element objemu v krivočiarych súradniciach  $u, v, w$  má tvar

$$d\tau = dn_1 dn_2 dn_3 = \frac{du}{U} \cdot \frac{dv}{V} \cdot \frac{dw}{W}, \text{ tak poslednú rovnicu možno prepísať takto:}$$

$$\int_{\tau} \operatorname{div} \mathbf{A} d\tau = \int_{\tau} UVW \left[ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{A_1}{VW} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{A_2}{UW} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left( \frac{A_3}{VU} \right) \right] d\tau.$$

V dôsledku platnosti posledného vzťahu pri ľubovoľnej voľbe objemu  $\tau$  môžeme napísať:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = UVW \left[ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{A_1}{VW} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{A_2}{UW} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left( \frac{A_3}{VU} \right) \right]$$

Keď je  $\mathbf{A}$  potenciálový vektor, môžeme napísať:

$$\mathbf{A} = \operatorname{grad} \varphi; \quad A_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial n_1} = U \frac{\partial \varphi}{\partial u}; \quad A_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial n_2} = V \frac{\partial \varphi}{\partial v}; \quad A_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial n_3} = W \frac{\partial \varphi}{\partial w}.$$

Dosadíme za výrazy vektora a jeho priemetov potenciálovú funkciu  $\varphi$  do poslednej rovnice a dostaneme.

$$\Delta \varphi = UVW \left[ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{U}{VW} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{V}{UW} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left( \frac{W}{UV} \frac{\partial \varphi}{\partial w} \right) \right].$$

Tento vzorec umožní transformáciu Laplaceovej rovnice do ľubovoľných ortogonálnych súradníc.

### 3.3 Laméova funkcia

Laplaceovu rovnicu prevedieme do eliptických súradníc. Najprv nájdeme výrazy pre  $U$ ,  $V$ ,  $W$ .

Derivujeme podľa  $u$  výraz

$$\frac{x^2}{a^2+u} + \frac{y^2}{b^2+u} + \frac{z^2}{c^2+u} - 1 = -\frac{(u-\lambda)(u-\mu)(u-\nu)}{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)},$$

čo nám dá:

$$\begin{aligned} & \frac{x^2}{(a^2+u)^2} + \frac{y^2}{(b^2+u)^2} + \frac{z^2}{(c^2+u)^2} = \\ & = \frac{(u-\lambda)(u-\mu)(u-\nu)}{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)} \left[ \frac{1}{u-\lambda} - \frac{1}{a^2+u} + \frac{1}{u-\mu} - \frac{1}{b^2+u} + \frac{1}{u-\nu} - \frac{1}{c^2+u} \right]. \end{aligned}$$

Keď v poslednej rovnici položíme  $u = \lambda$ , tak máme:

$$\frac{x^2}{(a^2+\lambda)^2} + \frac{y^2}{(b^2+\lambda)^2} + \frac{z^2}{(c^2+\lambda)^2} = \frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)},$$

alebo keď označíme  $(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda) = f(\lambda)$ , tak dostaneme:

$$\frac{x^2}{(a^2+\lambda)^2} + \frac{y^2}{(b^2+\lambda)^2} + \frac{z^2}{(c^2+\lambda)^2} = \frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{f(\lambda)}. \quad (3.3.1)$$

Ľahko prideme na to, že ľavá strana rovnice (3.3.1) je rovná  $\frac{4}{U^2}$ . Skutočne, už sme videli

výrazy:

$$\begin{aligned} & \frac{2x}{a^2+\lambda} - \left[ \frac{x^2}{(a^2+\lambda)^2} + \frac{y^2}{(b^2+\lambda)^2} + \frac{z^2}{(c^2+\lambda)^2} \right] \frac{\partial \lambda}{\partial x} = 0, \\ & \frac{2y}{b^2+\lambda} - \left[ \frac{x^2}{(a^2+\lambda)^2} + \frac{y^2}{(b^2+\lambda)^2} + \frac{z^2}{(c^2+\lambda)^2} \right] \frac{\partial \lambda}{\partial y} = 0, \\ & \frac{2z}{c^2+\lambda} - \left[ \frac{x^2}{(a^2+\lambda)^2} + \frac{y^2}{(b^2+\lambda)^2} + \frac{z^2}{(c^2+\lambda)^2} \right] \frac{\partial \lambda}{\partial z} = 0. \end{aligned}$$

Premiestnime druhé členy týchto rovníc do pravej časti, umocníme na druhú a spočítame ich:

$$4 \left[ \frac{x^2}{(a^2 + \lambda)^2} + \frac{y^2}{(b^2 + \lambda)^2} + \frac{z^2}{(c^2 + \lambda)^2} \right] =$$

$$= \left[ \frac{x^2}{(a^2 + \lambda)^2} + \frac{y^2}{(b^2 + \lambda)^2} + \frac{z^2}{(c^2 + \lambda)^2} \right] \cdot \left[ \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \lambda}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \lambda}{\partial z} \right)^2 \right].$$

Vykonáme jednoduché úpravy a pretože druhý súčiniteľ pravej časti je rovný  $U^2$  tak máme:

$$\frac{4}{U^2} = \frac{x^2}{(a^2 + \lambda)^2} + \frac{y^2}{(b^2 + \lambda)^2} + \frac{z^2}{(c^2 + \lambda)^2}.$$

Takto môžeme napísať:

$$\frac{4}{U^2} = \frac{(\lambda - \mu)(\lambda - \nu)}{f(\lambda)},$$

alebo

$$U = \frac{2\sqrt{f(\lambda)}}{\sqrt{(\lambda - \mu)(\lambda - \nu)}}. \quad (3.3.2)$$

Analogicky by sme našli výrazy pre  $V$  a  $W$ :

$$V = \frac{2\sqrt{f(\mu)}}{\sqrt{(\mu - \nu)(\mu - \lambda)}}, \quad (3.3.3)$$

$$W = \frac{2\sqrt{f(\nu)}}{\sqrt{(\nu - \lambda)(\nu - \mu)}}. \quad (3.3.4).$$

Preto máme:

$$UVW = \frac{8\sqrt{-f(\lambda)f(\mu)f(\nu)}}{(\lambda - \mu)(\nu - \lambda)(\mu - \nu)},$$

$$\frac{U}{VW} = \frac{U^2}{UVW} = \frac{4f(\lambda)(\lambda - \mu)(\nu - \lambda)(\mu - \nu)}{(\lambda - \mu)(\lambda - \nu)8\sqrt{-f(\lambda)f(\mu)f(\nu)}} = \frac{\nu - \lambda}{2} \sqrt{-\frac{f(\lambda)}{f(\mu)f(\nu)}},$$

a takým istým spôsobom:

$$\frac{V}{WU} = \frac{\lambda - \nu}{2} \sqrt{-\frac{f(\mu)}{f(\lambda)f(\nu)}}, \quad \frac{W}{UV} = \frac{\mu - \lambda}{2} \sqrt{-\frac{f(\nu)}{f(\lambda)f(\mu)}}.$$

Preto Laplaceova rovnica môže byť napísaná vo forme:

$$\Delta\varphi = \frac{4\sqrt{-f(\lambda)f(\mu)f(\nu)}}{(\mu-\nu)(\nu-\lambda)(\lambda-\mu)} \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial\lambda} \left[ (\nu-\mu) \sqrt{-\frac{f(\lambda)}{f(\mu)f(\nu)}} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} \right] + \\ &\frac{\partial}{\partial\mu} \left[ (\lambda-\nu) \sqrt{-\frac{f(\mu)}{f(\lambda)f(\nu)}} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial\mu} \right] + \\ &\frac{\partial}{\partial\nu} \left[ (\mu-\lambda) \sqrt{-\frac{f(\nu)}{f(\lambda)f(\mu)}} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} \right] \end{aligned} \right\} = 0,$$

alebo po úprave:

$$\Delta\varphi = \frac{4\sqrt{f(\lambda)f(\mu)f(\nu)}}{(\mu-\nu)(\nu-\lambda)(\lambda-\mu)} \left\{ \begin{aligned} &\frac{\nu-\mu}{\sqrt{f(\mu)f(\nu)}} \frac{\partial}{\partial\lambda} \left( \sqrt{f(\lambda)} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} \right) + \\ &\frac{\lambda-\nu}{\sqrt{f(\lambda)f(\nu)}} \frac{\partial}{\partial\mu} \left( \sqrt{f(\mu)} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial\mu} \right) + \\ &\frac{\mu-\lambda}{\sqrt{f(\lambda)f(\mu)}} \frac{\partial}{\partial\nu} \left( \sqrt{f(\nu)} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} \right) \end{aligned} \right\} = 0.$$

Do poslednej rovnice zavedieme označenie:

$$\frac{\partial\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}} = \partial\xi; \quad \frac{\partial\mu}{\sqrt{f(\mu)}} = \partial\eta; \quad \frac{\partial\nu}{\sqrt{f(\nu)}} = \partial\zeta$$

a môžeme túto rovnicu napísať jednoduchšie:

$$\Delta\varphi = \frac{4}{(\mu-\nu)(\nu-\lambda)(\lambda-\mu)} \left[ (\nu-\mu) \frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2} + (\lambda-\mu) \frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2} + (\mu-\lambda) \frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2} \right] = 0.$$

Po vykrátení vpredu stojacich členov dostaneme pretransformovanú Laplaceovu rovnicu v tvare:

$$\Delta\varphi = (\nu-\mu) \frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2} + (\lambda-\mu) \frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2} + (\mu-\lambda) \frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2} = 0.$$

Riešenie tejto rovnice získame v tvare (separácia premenných):

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = L(\xi)M(\eta)N(\zeta).$$

Dosadíme tieto formy do rovnice a dostaneme:

$$\Delta\varphi = MN(\nu-\mu) \frac{\partial^2 L}{\partial\xi^2} + NL(\lambda-\mu) \frac{\partial^2 M}{\partial\eta^2} + LM(\mu-\lambda) \frac{\partial^2 N}{\partial\zeta^2} = 0,$$

alebo po eliminácii triviálneho riešenia:

$$\Delta\varphi = \frac{\nu-\mu}{L} \cdot \frac{\partial^2 L}{\partial\xi^2} + \frac{\lambda-\mu}{M} \cdot \frac{\partial^2 M}{\partial\eta^2} + \frac{\mu-\lambda}{N} \cdot \frac{\partial^2 N}{\partial\zeta^2} = 0. \quad (3.3.5)$$

Ľahko sa presvedčíme, že táto rovnica platí keď položíme:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \xi^2} = (p\lambda + q)L(\xi),$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial \eta^2} = (p\mu + q)M(\eta),$$

$$\frac{\partial^2 N}{\partial \zeta^2} = (p\nu + q)N(\zeta).$$

Takto prichádzame k záveru, že funkcie  $L$ ,  $M$  a  $N$  vyhovujú obyčajnej diferenciálnej rovnici typu:

$$\frac{d^2 \psi}{du^2} = [pt(u) + q]\psi,$$

kde  $t(u)$  je dané rovnicou:

$$\left[ \frac{dt(u)}{du} \right]^2 = (a^2 + t)(b^2 + t)(c^2 + t) = f(t). \quad (3.3.6)$$

Túto rovnicu nazývame Laméovou diferenciálnou rovnicou. Pretože:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{du} &= \frac{d\psi}{dt} \cdot \frac{dt}{du} = \frac{d\psi}{dt} \sqrt{f(t)}, \\ \frac{d^2 \psi}{du^2} &= \frac{d}{du} \left[ \frac{d\psi}{dt} \sqrt{f(t)} \right] = \frac{d}{dt} \left[ \frac{d\psi}{dt} \sqrt{f(t)} \right] \frac{dt}{du} = f(t) \frac{d^2 \psi}{dt^2} - \frac{1}{2} f'(t) \end{aligned}$$

tak Laméova rovnica môže byť napísaná v inej forme:

$$f(t) \frac{d^2 \psi}{dt^2} + \frac{1}{2} f'(t) \frac{d\psi}{dt} - (pt + q)\psi = 0, \quad (3.3.7)$$

alebo

$$\frac{d^2 \psi}{dt^2} + \frac{1}{2} \frac{f'(t)}{f(t)} \frac{d\psi}{dt} - \frac{pt + q}{f(t)} \psi = 0. \quad (3.3.8)$$

### 3.4 Riešenia Laméovej rovnice

V použití má veľký význam ten tvar Laméovej rovnice, ktorý sa získa pri  $p = \frac{n}{4}(n+1)$ , kde  $n$  je prirodzené číslo. Možno dokázať, že v takom prípade má rovnica riešenia:

1.  $P(t)$ ,
2.  $\sqrt{a^2+t} \cdot P(t)$ ,  
 $\sqrt{b^2+t} \cdot P(t)$ ,  
 $\sqrt{c^2+t} \cdot P(t)$ ,
3.  $\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)} \cdot P(t)$ ,  
 $\sqrt{(b^2+t)(c^2+t)} \cdot P(t)$ ,  
 $\sqrt{(c^2+t)(a^2+t)} \cdot P(t)$ ,
4.  $\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)} \cdot P(t)$ ,

kde  $P(t)$  je polynóm premennej  $t$ . Aby sme sa o tom presvedčili, predpokladáme, že pri párnom  $n$  je riešením Laméovej rovnice polynóm:

$$\psi = P(t) \sum_{m=0}^{\frac{n}{2}} a_m t^m.$$

Dosadíme tento výraz pre  $\psi$  do rovnice (3.3.7), v ktorej teda predpokladáme  $p = \frac{n}{4}(n+1)$ :

$$f(t) \frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{1}{2} f'(t) \frac{d\psi}{dt} - \left[ \frac{1}{4} n(n+1)t + q \right] \psi = 0 \quad (3.4.1)$$

a dostaneme:

$$f(t) \sum_{m=0}^{\frac{n}{2}} a_m m(m-1) t^{m-2} + \frac{1}{2} f'(t) \sum_{m=0}^{\frac{n}{2}} a_m m t^{m-1} - \left[ \frac{1}{4} n(n+1)t + q \right] \sum_{m=0}^{\frac{n}{2}} a_m t^m = 0.$$

Pretože:

$$f(t) = (a^2+t)(b^2+t)(c^2+t) = t^3 + At^2 + Bt + C,$$

kde je  $A = a^2 + b^2 + c^2$ ;  $B = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$ ;  $C = a^2b^2c^2$  a tak poslednú rovnicu môžeme napísať v tvare:

$$\sum_{m=0}^{\frac{n}{2}} \left\{ \begin{aligned} &a_m m(m-1)(t^3 + At^2 + Bt + C)t^{m-2} \\ &+ a_m m \left( \frac{3}{2}t^2 + At + \frac{B}{2} \right) t^{m-1} \\ &- \left[ \frac{1}{4}n(n+1)t + q \right] a_m t^m \end{aligned} \right\} = 0.$$

Aby rovnica platila je potrebné, aby všetky koeficienty pri rôznych mocninách premennej  $t$  boli rovné nule. Najprv položíme rovné nule koeficienty pri člene obsahujúcom  $t^{\frac{n}{2}+1}$ :

$$a_{\frac{n}{2}} \cdot \frac{n}{2} \left( \frac{n}{2} - 1 \right) + a_{\frac{n}{2}} \cdot \frac{n}{2} \cdot \frac{3}{2} - a_{\frac{n}{2}} \cdot \frac{n(n+1)}{4} = a_{\frac{n}{2}} \left[ \frac{n}{2} \left( \frac{n}{2} - 1 + \frac{3}{2} \right) - \frac{n(n+1)}{4} \right] = 0. \quad (3.4.2)$$

Koeficienty pri člene obsahujúcom  $\frac{n}{t^2}$  budú:

$$a_{\frac{n}{2}-1} \cdot \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \left( \frac{n}{2} - 2 \right) + a_{\frac{n}{2}} \cdot \frac{n}{2} \left( \frac{n}{2} - 1 \right) A + a_{\frac{n}{2}-1} \cdot \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \frac{3}{2} + a_{\frac{n}{2}} \cdot \frac{n}{2} A - \frac{n(n+1)}{4} a_{\frac{n}{2}-1} - q a_{\frac{n}{2}},$$

alebo po jednoduchých úpravách:

$$-a_{\frac{n}{2}} \cdot \left( \frac{n}{2} - 1 \right) + a_{\frac{n}{2}} \cdot \left( \frac{n^2}{4} A - q \right). \quad (3.4.3)$$

Aby bol tento koeficient rovný nule, treba sa podobným spôsobom zaoberať aj s koeficientmi  $q$ ,  $a_{\frac{n}{2}}$  a  $a_{\frac{n}{2}-1}$ . Vo všeobecnom prípade pre koeficienty pri  $t^m$  dostaneme vzťah:

$$\begin{aligned} &a_{m-1} \cdot (m-1)(m-2) + a_m \cdot m(m-1)A + a_{m+1} \cdot m(m+1)B + \\ &a_{m+2} \cdot (m+2)(m+1) + a_{m-1} \cdot (m-1) \frac{3}{2} + a_m mA + a_{m+1} (m+1) \frac{B}{2} - \\ &a_{m-1} \frac{n(n+1)}{4} - qa_m = 0 \end{aligned}$$

alebo po vyňatí členov a s rovnakým indexom:

$$\begin{aligned} &a_{m-1} \cdot \left[ (m-1) \frac{m-1}{2} - \frac{n(n+1)}{2} \right] \\ &+ a_m \cdot (m^2 A - q) \\ &+ a_{m+1} \cdot \left( m + \frac{1}{2} \right) (m+1) B \\ &+ a_{m+2} \cdot (m+2)(m+1) C = 0. \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

Takýchto vzťahov dostaneme celkovo  $\frac{n}{2}+1$ , zodpovedajúc mocninám  $t$  (0,1,2,...). Koeficient

$t^{\frac{n}{2}+1}$  neobsahuje  $q$ . Vo všetkých ostatných parameter  $q$  existuje a tiež sa vo všetkých nachádza  $\left(\frac{n}{2}+1\right)$  koeficientov  $a_i$  s odpovedajúcimi indexmi  $i$ . Zvolíme si jeden z tých koeficientov

ľubovoľne, napr. položíme  $a_{\frac{n}{2}}=1$  a môžeme vylúčiť zo sústavy (3.4.4)  $\frac{n}{2}$  koeficientov

a ostatné budú neurčené. Vo výsledku takéhoto vylúčenia pridáme k rovnici pre  $q$ -tu mocninu  $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ , z čoho možno tvrdiť, že rovnica (3.4.2) bude platiť pri  $\left(\frac{n}{2}+1\right)$  hodnotách  $q$ .

Analogicky možno dokázať, že riešením rovnice (3.4.1) pri párnom  $n$  budú:

$$\sqrt{(b^2+t)(c^2+t)} \cdot \sum_{m=0}^{\frac{n}{2}-1} a_m t^m, \quad (3.4.5)$$

$$\sqrt{(c^2+t)(a^2+t)} \cdot \sum_{m=0}^{\frac{n}{2}-1} b_m t^m, \quad (3.4.6)$$

$$\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)} \cdot \sum_{m=0}^{\frac{n}{2}-1} c_m t^m. \quad (3.4.7)$$

Takýchto riešení pre každý z uvedených troch typov bude  $\frac{n}{2}$  a preto rovnica (3.4.1) umožňuje

získať  $\frac{n}{2}+1+\frac{n}{2}+\frac{n}{2}+\frac{n}{2}=2n+1$  riešení vzhľadom na  $2n+1$  hodnôt parametra  $q$ . V prípade, že

$n$  je nepárne číslo, môžeme nájsť riešenie Laméovej rovnice v tvare:

$$\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)} \cdot \sum_{m=0}^{\frac{n-3}{2}} k_m t^m, \quad (3.4.8)$$

$$\sqrt{(a^2+t)} \cdot \sum_{m=0}^{\frac{n-1}{2}} \alpha_m t^m, \quad (3.4.9)$$

$$\sqrt{(b^2+t)} \cdot \sum_{m=0}^{\frac{n-1}{2}} \beta_m t^m, \quad (3.4.10)$$

$$\sqrt{(c^2+t)} \cdot \sum_{m=0}^{\frac{n-1}{2}} \gamma_m t^m. \quad (3.4.11)$$

Všetky tieto riešenia sa nazývajú Laméovými rovnicami prvého druhu a odlišujú sa medzi sebou pomenovaním funkcií. Tak riešenie tvaru  $P(t)$  sa nazýva Laméovou funkciou prvého druhu a prvého typu. Riešenia tvaru  $P(t)\sqrt{a^2+t}$ ,  $P(t)\sqrt{b^2+t}$  alebo  $P(t)\sqrt{c^2+t}$  sú Laméovými funkciami prvého druhu, druhého typu atď. Číslo  $n$  vstupujúce do Lamého rovníc určuje stupeň rovnice. Laméove funkcie majú rad vlastností, z ktorých sa budeme zaujímať iba o jednu, o vlastnosť ortogonálnosti týchto funkcií.

### 3.5 Ortogonálnosť Lamého funkcií

Nech  $L_m^i(\mu)$  a  $L_n^k(\mu)$  sú dve Lamého funkcie stupňov  $m$  a  $n$ , odpovedajúce dvom daným hodnotám  $q_i$  a  $q_k$  v Leméových rovniciach. V takom prípade máme:

$$f(\mu) \frac{d^2 L_m^i}{d\mu^2} + \frac{1}{2} \frac{dL_m^i}{d\mu} - \left[ \frac{m(m+1)}{4} \mu + q_i \right] L_m^i = 0,$$

$$f(\mu) \frac{d^2 L_n^k}{d\mu^2} + \frac{1}{2} \frac{dL_n^k}{d\mu} - \left[ \frac{n(n+1)}{4} \mu + q_k \right] L_n^k = 0,$$

alebo

$$\sqrt{f(\mu)} \frac{d}{d\mu} \left( \sqrt{f(\mu)} \cdot \frac{dL_m^i}{d\mu} \right) - \left[ \frac{m(m+1)}{4} \mu + q_i \right] L_m^i = 0,$$

$$\sqrt{f(\mu)} \frac{d}{d\mu} \left( \sqrt{f(\mu)} \cdot \frac{dL_n^k}{d\mu} \right) - \left[ \frac{n(n+1)}{4} \mu + q_k \right] L_n^k = 0.$$

Prvú z rovníc vynásobíme  $L_n^k(\mu)$ , druhú  $L_m^i(\mu)$  a potom odčítame jednu rovnicu od druhej a nakoniec tento rozdiel vydelíme  $\sqrt{f(\mu)}$ :

$$\frac{d}{d\mu} \left[ \sqrt{f(\mu)} \left( L_n^k \frac{dL_m^i}{d\mu} - L_m^i \frac{dL_n^k}{d\mu} \right) \right] = \frac{L_m^i L_n^k}{\sqrt{f(\mu)}} \left( \left[ \frac{m(m+1)}{4} - \frac{n(n+1)}{4} \right] \mu + (q_i - q_k) \right). \quad (3.5.1)$$

Analogickú rovnicu môžeme napísať i pre  $L_m^i(\nu)$  a  $L_n^k(\nu)$ , t.j.

$$\frac{d}{d\nu} \left[ \sqrt{f(\nu)} \left( L_n^k \frac{dL_m^i}{d\nu} - L_m^i \frac{dL_n^k}{d\nu} \right) \right] = \frac{L_m^i L_n^k}{\sqrt{f(\nu)}} \left( \left[ \frac{m(m+1)}{4} - \frac{n(n+1)}{4} \right] \nu + (q_i - q_k) \right). \quad (3.5.2)$$

Predpokladajme teraz, že bod so súradnicami  $\lambda, \mu, \nu$  sa pohybuje po povrchu elipsoidu:

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 1 \quad (3.5.3)$$

teda so zmenou súradníc  $\mu$  a  $\nu$  ostáva  $\lambda$  konštantná. Integrujeme za tejto podmienky rovnicu (3.5.1) podľa premennej  $\mu$  od najmenšej hodnoty do najväčšej, teda od  $-b^2$  do  $-c^2$ . Potom dostaneme:

$$\left[ \sqrt{f(\mu)} \left( L_n^k \frac{dL_m^i}{d\mu} - L_m^i \frac{dL_n^k}{d\mu} \right) \right]_{-b^2}^{-c^2} = \frac{m(m+1)-n(n+1)}{4} \int_{-b^2}^{-c^2} \frac{\mu L_m^i L_n^k}{\sqrt{f(\mu)}} d\mu + (q_i - q_k) \int_{-b^2}^{-c^2} \frac{L_m^i L_n^k}{\sqrt{f(\mu)}} d\mu.$$

Tak isto integrujeme rovnicu (3.5.2) v hraniciach jej najväčších a najmenších hodnôt, t.j. v hraniciach  $-a^2$  do  $-b^2$ , čo nám dá:

$$\left[ \sqrt{f(\nu)} \left( L_n^k \frac{dL_m^i}{d\nu} - L_m^i \frac{dL_n^k}{d\nu} \right) \right]_{-a^2}^{-b^2} = \frac{m(m+1)-n(n+1)}{4} \int_{-a^2}^{-b^2} \frac{\nu L_m^i L_n^k}{\sqrt{f(\nu)}} d\nu + (q_i - q_k) \int_{-a^2}^{-b^2} \frac{L_m^i L_n^k}{\sqrt{f(\nu)}} d\nu.$$

Ľavé časti týchto rovníc sa stávajú nulovými, pretože pri vrchnej i pri spodnej hranici  $f(\mu)$  aj  $f(\nu)$  majú hodnoty rovné nule. Preto môžeme písať:

$$\begin{aligned} \frac{m(m+1)-n(n+1)}{4} \int_{-b^2}^{-c^2} \frac{\mu L_m^i(\mu) L_n^k(\mu)}{\sqrt{f(\mu)}} d\mu &= -(q_i - q_k) \int_{-b^2}^{-c^2} \frac{L_m^i(\mu) L_n^k(\mu)}{\sqrt{f(\mu)}} d\mu, \\ \frac{m(m+1)-n(n+1)}{4} \int_{-a^2}^{-b^2} \frac{\nu L_m^i(\nu) L_n^k(\nu)}{\sqrt{f(\nu)}} d\nu &= -(q_i - q_k) \int_{-a^2}^{-b^2} \frac{L_m^i(\nu) L_n^k(\nu)}{\sqrt{f(\nu)}} d\nu. \end{aligned}$$

Vynásobíme navzájom tieto rovnice a dostaneme:

$$\begin{aligned} -(q_i - q_k) \frac{m(m+1)-n(n+1)}{4} \int_{-b^2}^{-c^2} \frac{\mu L_m^i(\mu) L_n^k(\mu)}{\sqrt{f(\mu)}} d\mu \int_{-a^2}^{-b^2} \frac{L_m^i(\nu) L_n^k(\nu)}{\sqrt{f(\nu)}} d\nu = \\ -(q_i - q_k) \frac{m(m+1)-n(n+1)}{4} \int_{-a^2}^{-b^2} \frac{\nu L_m^i(\nu) L_n^k(\nu)}{\sqrt{f(\nu)}} d\nu \int_{-b^2}^{-c^2} \frac{L_m^i(\mu) L_n^k(\mu)}{\sqrt{f(\mu)}} d\mu \end{aligned}$$

alebo po prenesení všetkých členov na jednu stranu:

$$\frac{m(m+1)-n(n+1)}{4} (q_i - q_k) \int_{-b^2}^{-c^2} \int_{-a^2}^{-b^2} \frac{L_m^i(\mu) L_n^k(\mu) L_m^i(\nu) L_n^k(\nu)}{\sqrt{f(\nu)}} (\mu - \nu) d\nu d\mu = 0.$$

Integrál stojaci v poslednej rovnici prebieha celý povrch elipsoidu (3.5.3), pretože pri konštantnom  $\lambda$  zmena  $\mu$  v hraniciach od  $-b^2$  do  $-c^2$  a  $\nu$  v hraniciach od  $-a^2$  do  $-b^2$  umožní bodom so súradnicami  $\lambda$ ,  $\mu$  a  $\nu$  opísať povrch celého elipsoidu. Pretože na všeobecnosť parametrov  $m$ ,  $n$ ,  $q_i$  a  $q_k$  môže byť posledná rovnica prepísaná do tvaru:

$$\int_{-b^2}^{-c^2} \int_{-a^2}^{-b^2} \frac{L_m^i(\mu) L_n^k(\mu) L_m^i(\nu) L_n^k(\nu)}{\sqrt{f(\nu)}} (\mu - \nu) d\nu d\mu = 0, \quad (3.5.4)$$

čo vyjadruje podmienku ortogonálnosti funkcií  $L_m(\mu)$  a  $L_m(\nu)$ .

### 3.6 Rozvoj do radu Lamého funkcií

Na základe úvah, ktoré nás priviedli k zostaveniu Laméovej rovnice, môžeme tvrdiť, že funkcia  $\varphi$ , vyhovujúca Laplaceovej rovnici, môže byť vyjadrená vo forme radu:

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} A_{n/m} L_n^m(\lambda) L_n^m(\mu) L_n^m(\nu) \quad (3.6.1)$$

Snažme sa nájsť koeficient  $A_{n/m}$  tohto radu tak, aby prešiel na povrchy elipsoidu:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

t.j. pri  $\lambda = 0$  v danú funkciu  $F(\mu, \nu)$ . Keď označíme  $A_{n/m} L_n^m(0) = B_{n,m}$ , tak rad pre funkciu  $F(\mu, \nu)$  bude mať tvar:

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} B_{n,m} L_n^m(\mu) L_n^m(\nu).$$

Koeficienty tohto radu môžeme určiť obvyklým spôsobom s využitím vlastnosti ortogonálnosti pre Lamého funkcie. Vynásobíme obe časti tohto radu výrazom:

$$\frac{L_n^m(\mu) L_n^m(\nu) (\mu - \nu)}{\sqrt{f(\mu) f(\nu)}} d\mu d\nu$$

a integrujeme po povrchu daného elipsoidu. Pri tejto integrácii zmiznú z pravej časti všetky členy, pri ktorých sa vrchné, spodné alebo obidva indexy u symbolov predstavujúcich Laméove funkcie, budú odlišovať v indexoch, stojacich v nami zavedenom súčiniteľovi. Preto dostaneme rovnicu pre koeficienty v tvare:

$$B_{n,m} = \frac{\iint \frac{F(\mu, \nu) L_n^m(\mu) L_n^m(\nu)}{\sqrt{f(\mu) f(\nu)}} (\mu - \nu) d\mu d\nu}{\iint \frac{[L_n^m(\mu)]^2 [L_n^m(\nu)]^2}{\sqrt{f(\mu) f(\nu)}} (\mu - \nu) d\mu d\nu}.$$

Vidíme, že koeficienty  $B_{n,m}$  a hodnotu  $L_n^m(0)$  poznáme a nie je ťažké nájsť hodnotu koeficientov  $A_{n/m}$ . Tento rozvoj môže byť použitý k riešeniu Dirichletovej vnútornej úlohy. Pri skúmaní výrazov pre Laméove funkcie prvého druhu, ktorými sme sa zoberali, ľahko prídeme na to, že sa tieto funkcie s nárastom  $\lambda$  blížia nekonečnu. Zväčšovaniu  $\lambda$  odpovedá zväčšovanie elipsoidu, t.j. vzdďľovaniu bodu od súradnicového počiatku. Blíženie funkcie  $L_n^m(\lambda)$  k nekonečnu odpovedá blíženiu sa potenciálovej funkcie  $\varphi$ , vyjadrenej radom (3.6.1) k nekonečnu pre nekonečne vzdialené body, čo protirečí základnej vlastnosti potenciálovej

funkcie. Z toho prichádzame k záveru, že k riešeniu Dirichletovej vonkajšej úlohy treba použiť iný (druhý) druh elipsoidálnych funkcií, výskum ktorých musí byť prevedený ako výskum integrálov Laméovej rovnice, odlišných od tých vyššie získaných.

### 3.7 Lamého funkcia druhého druhu

Vráťme sa opäť k Laméovej rovnici, ktorej vyhovujú Laméove funkcie prvého druhu, ktorú vezmeme v tvare:

$$\sqrt{f(t)} \frac{d}{dt} \left( \sqrt{f(t)} \frac{dL_n^m}{dt} \right) = \left[ \frac{n(n+1)}{4} - qm \right] L_n^m.$$

Označíme skutočnosť, že funkcia  $F_n^m$  je druhým (lineárne nezávislým) riešením tejto rovnice takouto identitou:

$$\sqrt{f(t)} \frac{d}{dt} \left( \sqrt{f(t)} \frac{dF_n^m}{dt} \right) = \left[ \frac{n(n+1)}{4} - qm \right] F_n^m.$$

Vynásobíme prvú rovnicu  $F_n^m$  a druhú  $L_n^m$  a po ich odčítaní dostaneme:

$$\sqrt{f(t)} \cdot L_n^m \frac{d}{dt} \left( \sqrt{f(t)} \frac{dF_n^m}{dt} \right) - \sqrt{f(t)} \cdot F_n^m \frac{d}{dt} \left( \sqrt{f(t)} \frac{dL_n^m}{dt} \right) = 0,$$

alebo po malej úprave:

$$\frac{d}{dt} \left[ \sqrt{f(t)} \left( L_n^m \frac{dF_n^m}{dt} - F_n^m \frac{dL_n^m}{dt} \right) \right] = 0.$$

Z tejto rovnice bezprostredne dostaneme

$$L_n^m \frac{dF_n^m}{dt} - F_n^m \frac{dL_n^m}{dt} = \frac{C}{\sqrt{f(t)}}.$$

Keď obidve časti tejto rovnice vydělíme  $L_n^m$  dostaneme sa k rovnici:

$$\frac{L_n^m \frac{dF_n^m}{dt} - F_n^m \frac{dL_n^m}{dt}}{[L_n^m]^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{F_n^m}{L_n^m} \right) = \frac{C}{[L_n^m]^2 \sqrt{f(t)}},$$

a jej integrovaním:

$$\frac{F_n^m}{L_n^m} = \int \frac{C dt}{[L_n^m]^2 \sqrt{f(t)}} + C'.$$

Aby sme do tejto rovnice nezavádzali novú integračnú konštantu  $C'$ , napíšeme namiesto neurčitého integrálu určitý, s hranicami  $t$  a  $\infty$ , a pretože ľahko zbadáme, že hodnota integrálu v hranici  $\infty$  je nulová, tak máme:

$$F_n^m(t) = CL_n^m \int_{\infty}^t \frac{dt}{[L_n^m]^2 \sqrt{f(t)}} = -CL_n^m \int_t^{\infty} \frac{dt}{[L_n^m]^2 \sqrt{f(t)}}. \quad (3.7.1)$$

Konštantu  $C$ , ktorá figuruje v poslednom výraze, zvolíme tak, aby:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left( F_n^m t^{\frac{n+3}{2}} \right) = 1, \quad (3.7.2)$$

čo je rovnocenné rovnici:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{dF_n^m}{dt} t^{\frac{n+3}{2}} \right) = -\frac{n+1}{2}. \quad (3.7.3)$$

Súvislosť medzi poslednými rovnicami ľahko zistíme na základe nasledujúcich úvah. Derivujeme výraz (3.7.2) a dostaneme:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{dF_n^m}{dt} t^{\frac{n+1}{2}} + \frac{n+1}{2} F_n^m t^{\frac{n-1}{2}} \right) = 0.$$

Poslednú rovnicu vynásobíme  $t$  a máme:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{dF_n^m}{dt} t^{\frac{n+3}{2}} + \frac{n+1}{2} F_n^m t^{\frac{n+1}{2}} \right) = 0,$$

alebo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{dF_n^m}{dt} t^{\frac{n+3}{2}} \right) = -\lim_{t \rightarrow \infty} \left( F_n^m t^{\frac{n+1}{2}} \right) = -\frac{n+1}{2}.$$

Na druhej strane, zo skúmania funkcie  $L_n^m$  sa môžeme presvedčiť, že tieto funkcie obsahujú  $t$  v najvyššej mocnine rovnej  $n/2$  a preto, že koeficient stojaci pri člene s touto najvyššou mocninou  $t$  je rovný 1, tak:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left( L_n^m t^{\frac{n}{2}} \right) = 1. \quad (3.7.4)$$

Z tohto analogickým spôsobom dostaneme:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{dL_n^m}{dt} t^{\frac{n}{2}+1} \right) = \frac{n}{2}. \quad (3.7.5)$$

Pre voľbu výrazu pre  $F_n^m(t)$  sme mali rovnicu:

$$L_n^m \frac{dF_n^m}{dt} - F_n^m \frac{dL_n^m}{dt} = \frac{C}{\sqrt{f(t)}}.$$

Vynásobíme obe časti tejto rovnice  $t^{\frac{3}{2}} = t^{-\frac{n}{2} + \frac{n+3}{2}} = t^{-\frac{n}{2} + \frac{n+1}{2} + 1}$  a dostaneme:

$$L_n^m t^{-\frac{n}{2}} \frac{dF_n^m}{dt} t^{\frac{n+3}{2}} - F_n^m \frac{dL_n^m}{dt} t^{\frac{n+1}{2}} = \frac{C t^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{f(t)}}.$$

Prejdime k hraniciam a môžeme písať:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left( L_n^m t^{-\frac{n}{2}} \right) \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{dF_n^m}{dt} t^{\frac{n+3}{2}} \right) - \lim_{t \rightarrow \infty} \left( F_n^m t^{\frac{n+1}{2}} \right) \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{dL_n^m}{dt} t^{-\frac{n+2}{2}} \right) = C \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{f(t)}} \right).$$

Keďže počítame s tým, že výraz  $\sqrt{f(t)} = \sqrt{(a^2 + t)(b^2 + t)(c^2 + t)}$  obsahuje člen s najvyššou mocninou  $t$  rovnou  $2/3$ , a koeficientom rovným  $1$  a s uvážením výrazov (3.7.2), (3.7.3), (3.7.4) a (3.7.5), (2'), dostaneme:

$$1 \left( -\frac{n+1}{2} \right) - 1 \cdot \frac{n}{2} = C,$$

alebo

$$C = -\frac{2n+1}{2}.$$

Takto nájdeme konečne výraz pre  $F_n^m(t)$ :

$$F_n^m(t) = \frac{2n+1}{2} L_n^m(t) \int_t^\infty \frac{dt}{[L_n^m(t)]^2 \sqrt{(a^2 + t)(b^2 + t)(c^2 + t)}}. \quad (3.7.6)$$

Podoba týchto riešení a rovnice (3.7.2) dokazujú, že tieto riešenia už majú tú vlastnosť, že pri  $t \rightarrow \infty$  sa  $F_n^m(t)$  blíži k nule. Na druhej strane pri  $t \rightarrow 0$  sa  $F_n^m(t)$  blíži k nekonečnu. Preto tieto funkcie môžu byť zavedené do výrazov pre potenciál bodov s hodnotami  $\lambda$ , ktoré sa môžu stať nekonečnými (ležiacich na elipsoidoch s veľkými polosami) a nebudú v rozvojoch potenciálu, v ktorých súradnica  $\lambda$  nadobúda takmer nulových hodnôt.

## 4. Príklady na Lamého funkcie

### 4.1 Magnetizácia homogénneho elipsoidu v homogénnom magnetickom poli

V teórii interpretácie magnetického prieskumu je veľmi dôležitá úloha o magnetizácii elipsoidu v magnetickom poli Zeme, ktoré je možné s dostatočnou presnosťou považovať za homogénne. Túto úlohu sa tu pokúsime riešiť, pričom zo začiatku sa zameriame na najjednoduchší prípad elipsoidu a jeho magnetizácie, keď magnetizujúce pole sa stotožní s jednou z jeho hlavných osí. Úlohu sformulujeme nasledovne: v homogénnom magnetickom poli sa nachádza homogénny elipsoid s polosami  $a_1 = \sqrt{a^2 + \lambda_1}$ ,  $b_1 = \sqrt{b^2 + \lambda_1}$  a  $c_1 = \sqrt{c^2 + \lambda_1}$ , ktorého magnetická susceptibilita  $\mu_0$  je odlišná od magnetickej susceptibility vonkajšieho prostredia. Hľadáme výraz k vyčísleniu potenciálu vnútri i mimo elipsoidu.

Potenciál  $\varphi_0$  vonkajšieho homogénneho poľa vo všeobecnom prípade môže byť určený výrazom:

$$\varphi_0 = -Xx - Yy - Zz$$

kde  $X$ ,  $Y$  a  $Z$  sú konštanty rovné komponentom poľa na súradnicových osiach. Keď pole účinkuje pozdĺž osi  $X$ , tak vzorec pre potenciál sa zjednoduší na:

$$\varphi_0 = -Xx,$$

alebo, po zavedení eliptických súradníc:

$$\varphi_0 = -X \frac{\sqrt{(a^2 + \lambda)(a^2 + \mu)(a^2 + \nu)}}{\sqrt{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}}.$$

V tomto výraze ľahko zbadáme tvar  $L_n^m(\lambda)L_n^m(\mu)L_n^m(\nu)$ , keď prijmem  $L_n^m(\lambda) = \sqrt{a^2 + \lambda}$ ,  $L_n^m(\mu) = \sqrt{a^2 + \mu}$  a  $L_n^m(\nu) = \sqrt{a^2 + \nu}$ , čo odpovedá Laméovej rovnici pri  $n = 1$ . Pokúsime sa získať riešenie Laplaceovej rovnice pre vnútornú oblasť v tvare:

$$\varphi_1 = A \sqrt{(a^2 + \lambda)(a^2 + \mu)(a^2 + \nu)}.$$

V takom prípade je riešenie Laplaceovej rovnice pre vonkajší priestor:

$$\varphi_0 = BF(\lambda) \sqrt{(a^2 + \mu)(a^2 + \nu)}.$$

Konštanty  $A$  a  $B$  je potrebné určiť z podmienok na rozhraní daného elipsoidu, kde musí platiť spojitosť potenciálov a spojitosť normálovej zložky magnetickej indukcie. Keď označíme

potenciál vo vnútornom priestore  $\varphi_1 = \varphi_0 + \varphi_i$  a potenciál pre vonkajší priestor  $\varphi_2 = \varphi_0 + \varphi_e$ , tieto hraničné podmienky možno napísať:

$$\begin{aligned} (\varphi_1)_{\lambda=\lambda_1} &= (\varphi_2)_{\lambda=\lambda_1}, \\ \left( \mu \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \right)_{\lambda=\lambda_1} &= \left( \mu \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \right)_{\lambda=\lambda_1}, \end{aligned}$$

pričom predpokladáme, že magnetická susceptibilita vonkajšieho prostredia je rovná jednotke a rovnica daného elipsoidu má tvar:

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda_1} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda_1} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda_1} = 1.$$

Napísaným podmienkam môžeme dať zrejme tvar:

$$\begin{aligned} (\varphi_i)_{\lambda=\lambda_1} &= (\varphi_e)_{\lambda=\lambda_1}, \\ \left[ \mu_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} + \mu_0 \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \right]_{\lambda=\lambda_1} &= \left[ \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} + \frac{\partial \varphi_e}{\partial n} \right]_{\lambda=\lambda_1}, \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

alebo

$$\left[ (\mu_0 - 1) \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} \right]_{\lambda=\lambda_1} = \left[ \frac{\partial \varphi_e}{\partial n} - \mu_0 \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \right]_{\lambda=\lambda_1}. \quad (4.1.2)$$

Okrem toho, pretože máme:

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial n} = \sqrt{\left( \frac{\partial \lambda}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \lambda}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \lambda}{\partial z} \right)^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda},$$

tak druhú podmienku môžeme napísať v tvare:

$$\left[ (\mu_0 - 1) \frac{\partial \varphi_0}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=\lambda_1} = \left[ \frac{\partial \varphi_e}{\partial \lambda} - \mu_0 \frac{\partial \varphi_i}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=\lambda_1}.$$

Po dosadení  $\varphi_i$ ,  $\varphi_e$  a  $\varphi_0$  do rovníc (4.1.1) a (4.1.2) dostaneme:

$$A \sqrt{a^2 + \lambda_1} \sqrt{(a^2 + \mu)(a^2 + \nu)} = BF(\lambda) \sqrt{(a^2 + \mu)(a^2 + \nu)}, \quad (4.1.3)$$

$$\frac{(\mu_0 - 1) X}{\sqrt{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}} \frac{\sqrt{(a^2 + \mu)(a^2 + \nu)}}{2\sqrt{a^2 + \lambda_1}} = \left[ B \left( \frac{\partial F}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=\lambda_1} - \frac{\mu_0 A}{2\sqrt{a^2 + \lambda_1}} \right] \sqrt{(a^2 + \mu)(a^2 + \nu)}. \quad (4.1.4)$$

Pretože  $F(\lambda)$  podľa všeobecných pravidiel zostrojenia tejto funkcie má tvar:

$$\frac{3}{2} \sqrt{a^2 + \lambda} \cdot \int_{\lambda}^{\infty} \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda) \sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}} = \frac{3}{2} \sqrt{a^2 + \lambda} \cdot \int_{\lambda}^{\infty} \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda) \sqrt{f(\lambda)}},$$

tak

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F(\lambda)}{\partial \lambda} &= \frac{3}{4} \frac{1}{\sqrt{a^2 + \lambda}} \int_{\lambda}^{\infty} \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda) \sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}} \\
&\quad - \frac{3}{2} \frac{\sqrt{a^2 + \lambda}}{(a^2 + \lambda) \sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}} = \\
&= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + \lambda}} \int_{\lambda}^{\infty} \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda) \sqrt{f(\lambda)}} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + \lambda} \sqrt{f(\lambda)}}
\end{aligned}$$

a rovnice (4.1.3) a (4.1.4) sa prepíšu nasledovne:

$$\begin{aligned}
A &= B \frac{3}{2} \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda) \sqrt{f(\lambda)}}, \\
(\mu_0 - 1) \frac{X}{\sqrt{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}} &= B \left[ \frac{3}{2} \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda) \sqrt{f(\lambda)}} - \frac{3}{\sqrt{f(\lambda_1)}} \right] - \mu_0 A.
\end{aligned}$$

Keď označíme  $\int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda) \sqrt{f(\lambda)}} = K(\lambda_1)$  a  $\frac{X}{\sqrt{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}} = C$  tak posledné rovnice

budú vyzerat' jednoduchšie:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{3}{2} K(\lambda_1) B, \\
(\mu_0 - 1) C &= B \left[ \frac{3}{2} K(\lambda_1) - \frac{3}{\sqrt{f(\lambda_1)}} \right] - \mu_0 A.
\end{aligned}$$

Riešením týchto rovníc vzhľadom k  $A$  a  $B$  dostaneme:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{(\mu_0 - 1) C K(\lambda_1)}{\frac{2}{\sqrt{f(\lambda_1)}} + (\mu_0 - 1) K(\lambda_1)}, \\
B &= -\frac{2}{3} \frac{(\mu_0 - 1) C}{\frac{2}{\sqrt{f(\lambda_1)}} + (\mu_0 - 1) K(\lambda_1)}.
\end{aligned}$$

Tieto výrazy môžeme prepísať nasledovne: pretože  $\mu_0 = 1 + 4\pi\kappa$ , kde  $\kappa$  nech je susceptibilita materiálu, tak  $\mu_0 - 1 = 4\pi\kappa$ . Polosi daného elipsoidu sú rovné  $\sqrt{a^2 + \lambda}$ ,  $\sqrt{b^2 + \lambda}$  a  $\sqrt{c^2 + \lambda}$  – označíme ich ako  $a_1$ ,  $b_1$  a  $c_1$ , a potom môžeme napísať namiesto  $\sqrt{f(\lambda_1)} = \sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}$  výraz  $a_1 b_1 c_1$ . V integráli  $K(\lambda_1)$  rovnom

$\int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda)\sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}}$  zameníme premennú  $\lambda$  premennou  $t$  vzťahom  $t = \lambda - \lambda_1$ .

Pri takomto dosadení je  $d\lambda = dt$ , a:

$$a^2 + \lambda = a^2 + t + \lambda_1 = a_1^2 + t,$$

$$b^2 + \lambda = b^2 + t + \lambda_1 = b_1^2 + t,$$

$$c^2 + \lambda = c^2 + t + \lambda_1 = c_1^2 + t,$$

a spodná hranica sa stane nulovou, takže dostaneme:

$$K(\lambda_1) = \int_0^{\infty} \frac{dt}{(a_1^2 + t)\sqrt{(a_1^2 + t)(b_1^2 + t)(c_1^2 + t)}}.$$

Pre koeficienty  $A$  a  $B$  môžeme teda napísať výrazy:

$$\begin{aligned} A &= -\frac{4\pi\kappa \int_0^{\infty} \frac{dt}{(a_1^2 + t)\sqrt{(a_1^2 + t)(b_1^2 + t)(c_1^2 + t)}}}{\frac{2}{a_1 b_1 c_1} + 4\pi\kappa \int_0^{\infty} \frac{dt}{(a_1^2 + t)\sqrt{(a_1^2 + t)(b_1^2 + t)(c_1^2 + t)}}} C = \\ &= \frac{2\pi\kappa a_1 b_1 c_1 \int_0^{\infty} \frac{dt}{(a_1^2 + t)\sqrt{(a_1^2 + t)(b_1^2 + t)(c_1^2 + t)}}}{1 + 2\pi\kappa a_1 b_1 c_1 \int_0^{\infty} \frac{dt}{(a_1^2 + t)\sqrt{(a_1^2 + t)(b_1^2 + t)(c_1^2 + t)}}} \cdot \frac{X}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}, \\ B &= -\frac{2}{3} \frac{2\pi\kappa a_1 b_1 c_1}{1 + 2\pi\kappa a_1 b_1 c_1 \int_0^{\infty} \frac{dt}{(a_1^2 + t)\sqrt{(a_1^2 + t)(b_1^2 + t)(c_1^2 + t)}}} \cdot \frac{X}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}. \end{aligned}$$

Výraz  $2\pi\kappa a_1 b_1 c_1 \int_0^{\infty} \frac{dt}{(a_1^2 + t)\sqrt{(a_1^2 + t)(b_1^2 + t)(c_1^2 + t)}}$  si označíme písmenom  $L$ . Treba podotknúť,

že hodnota tohto výrazu závisí iba od rozmerov elipsoidu, ktorý bol zadaný a nezávisí od súradníc bodu, pre ktorý sa hľadá potenciál. Pri tomto označení budú mať výrazy pre  $A$  a  $B$  tvar:

$$\begin{aligned} A &= -\frac{\kappa L}{1 + \kappa L} \cdot \frac{X}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}, \\ B &= -\frac{2}{3} \cdot \frac{2\pi\kappa a_1 b_1 c_1}{1 + \kappa L} \cdot \frac{X}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}. \end{aligned}$$

Dosadíme takto získané hodnoty  $A$  a  $B$  do vzťahov pre  $\varphi_i$ ,  $\varphi_e$  a dostaneme.

$$\begin{aligned}\varphi_i &= \frac{\kappa L}{1+\kappa L} \cdot X \cdot \frac{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\mu)(c^2+\nu)}}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}, \\ \varphi_e &= -\frac{2}{3} \cdot \frac{2\pi\kappa a_1 b_1 c_1}{1+\kappa L} \cdot X \cdot F(\lambda) \frac{\sqrt{(a^2+\mu)(a^2+\nu)}}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)} = \\ &= -\frac{2}{3} \cdot \frac{2\pi\kappa a_1 b_1 c_1}{1+\kappa L} \cdot X \cdot \frac{3}{2} \sqrt{(a^2+\lambda)} \frac{\sqrt{(a^2+\mu)(a^2+\nu)}}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\mu)(c^2+\nu)}}.\end{aligned}$$

Vrátime sa ku karteziánskym súradniciam a môžeme tieto výrazy napísať v tvare:

$$\varphi_i = -\frac{\kappa L}{1+\kappa L} \cdot X \cdot x, \quad (4.1.5)$$

$$\varphi_e = -\frac{\kappa L}{1+\kappa L} \cdot X \cdot x \cdot 2\pi a_1 b_1 c_1 \int_u^\infty \frac{du}{(a^2+u)\sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}}. \quad (4.1.6)$$

V poslednom výraze je premenná/symbol  $\lambda$  pod integrálom nahradená premennou/symbolom  $u$ . Dolná hranica integrálu, vstupujúca do výrazu pre  $\varphi_e$ , sa určí ako kladný koreň rovnice:

$$\frac{x^2}{a^2+u} + \frac{y^2}{b^2+u} + \frac{z^2}{c^2+u} = 1.$$

Tento výraz pre  $\varphi_e$  má zmysel len pri takých hodnotách súradníc  $x$ ,  $y$  a  $z$ , keď  $u$ , považovaný za kladný koreň rovnice vyššie napísanej, vyhovuje nerovnosti:

$$u > \lambda_1,$$

t.j. zvolený bod sa nachádza mimo elipsoidu.

Analogicky možno dokázať, že pre homogénne polia, orientované v smeroch osí  $y$  a  $z$ , môžeme pre vnútorné a vonkajšie potenciály písať výrazy:

$$\left. \begin{aligned}\varphi_i &= -\frac{\kappa M}{1+\kappa M} \cdot Y \cdot y \\ \varphi_e &= -\frac{\kappa M}{1+\kappa M} \cdot Y \cdot y \cdot 2\pi a_1 b_1 c_1 \int_u^\infty \frac{du}{(b^2+u)\sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}}\end{aligned} \right\} \text{pre } \varphi_0 = -Y \cdot y,$$

$$\left. \begin{aligned}\varphi_i &= -\frac{\kappa N}{1+\kappa N} \cdot Z \cdot z \\ \varphi_e &= -\frac{\kappa N}{1+\kappa N} \cdot Z \cdot z \cdot 2\pi a_1 b_1 c_1 \int_u^\infty \frac{du}{(c^2+u)\sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}}\end{aligned} \right\} \text{pre } \varphi_0 = -Z \cdot z,$$

kde

$$M = 2\pi\kappa a_1 b_1 c_1 \int_0^\infty \frac{dt}{(b_1^2 + t)\sqrt{(a_1^2 + t)(b_1^2 + t)(c_1^2 + t)}},$$

$$N = 2\pi\kappa a_1 b_1 c_1 \int_0^\infty \frac{dt}{(c_1^2 + t)\sqrt{(a_1^2 + t)(b_1^2 + t)(c_1^2 + t)}},$$

a spodná hranica integrálov sa určí tými istými podmienkami, ako vo výraze pre  $\varphi_e$  v prípade poľa, pôsobiaceho pozdĺž osi  $x$ . V prípade, kedy potenciál magnetizujúceho homogénneho poľa je daný rovnicou:

$$\varphi_0 = -X \cdot x - Y \cdot y - Z \cdot z$$

t.j. smer poľa sa nekryje ani s jednou z hlavných osí elipsoidu, môžeme použiť získané riešenia a aditívne vlastnosti potenciálu a napísať:

$$\varphi_i = -\frac{\kappa L}{1 + \kappa L} \cdot X \cdot x - \frac{\kappa M}{1 + \kappa M} \cdot Y \cdot y - \frac{\kappa N}{1 + \kappa N} \cdot Z \cdot z,$$

$$\varphi_e = -2\pi a_1 b_1 c_1 \left[ \begin{aligned} &\frac{\kappa}{1 + \kappa L} \cdot X \cdot x \int_u^\infty \frac{du}{(a^2 + u)\sqrt{f(u)}} + \\ &\frac{\kappa}{1 + \kappa M} \cdot Y \cdot y \int_u^\infty \frac{du}{(b^2 + u)\sqrt{f(u)}} + \\ &\frac{\kappa}{1 + \kappa N} \cdot Z \cdot z \int_u^\infty \frac{du}{(c^2 + u)\sqrt{f(u)}} \end{aligned} \right].$$

Fyzikálny zmysel získaného riešenia je v tom, že v homogénnom magnetickom poli homogénny elipsoid sa zmagnetizuje homogénne, avšak demagnetizačné faktory pozdĺž každej z osí sú rôzne. Integrály, vstupujúce do výrazu pre potenciál homogénneho zmagnetizovaného elipsoidu, vo vonkajšom prostredí, sú eliptickými integrálmi. V prípade dvojosého elipsoidu, napr. keď  $a > b = c$  je možné integrovanie previesť analyticky až do konca a riešenia sú bežnou súčasťou tabuliek integrálov.

## 4.2 Určenie kapacity elipsoidu

Z množiny jednoduchých príkladov na použitie Laméových funkcií vyriešime ešte úlohu určenia elektrickej kapacity vodivého elipsoidu. Nech je elipsoid, daný osami:

$$a_1 = \sqrt{a^2 + \lambda_1},$$

$$b_1 = \sqrt{b^2 + \lambda_1},$$

$$c_1 = \sqrt{c^2 + \lambda_1},$$

nabitý na potenciál  $\varphi_0$ . Vo vonkajšom priestore takýto elipsoid vyvolá elektrostatické pole, ktorého potenciál sa bude blížiť k nule so vzrastajúcou vzdialenosťou. Vnútri elipsoidu, nakoľko je tento vodičom, bude mať potenciál konštantnú hodnotu  $\varphi_0$ . Vo vonkajšom priestore vyhovuje potenciálová funkcia Laplaceovej rovnici a preto, s použitím všeobecného príkladu získania potenciálovej funkcie, dospejeme k nutnosti riešenia Laméovej rovnice:

$$\sqrt{f(\lambda)} \frac{d}{d\lambda} \left( \sqrt{f(\lambda)} \frac{dL}{d\lambda} \right) = L \left[ \frac{n(n+1)}{4} \lambda + q \right].$$

Pretože vnútri elipsoidu je potenciál konštantný, t.j. súčin  $L(\lambda)L(\mu)L(\nu)$  má konštantnú hodnotu, tak derivácia  $\frac{dL}{d\lambda} = 0$  a my musíme položiť  $n = q = 0$ . Preto riešenie napísanej rovnice pre vonkajší priestor budeme skúmať s ohľadom na tieto podmienky. Inak povedané, budeme hľadať takú funkciu  $F(\lambda)$ , ktorá vyhovuje rovnici.

$$\frac{d}{d\lambda} \left( \sqrt{f(\lambda)} \frac{dF(\lambda)}{d\lambda} \right) = 0.$$

Riešime túto rovnicu a nájdeme.

$$\sqrt{f(\lambda)} \frac{dF(\lambda)}{d\lambda} = A,$$

kde  $A$  je konštanta. Ďalej:

$$F(\lambda) = A \int_{\lambda}^{\infty} \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}}.$$

Takto potenciálna funkcia vo vonkajšom priestore môže byť napísaná v tvare:

$$\varphi = \frac{1}{2} L(\mu) L(\nu) \int_{\lambda}^{\infty} \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}}. \quad (4.2.1)$$

Pretože v danom prípade, ako už bolo povedané, funkcie  $L(\mu)$  a  $L(\nu)$  sú konštantami, tak posledná rovnica sa môže napísať ako:

$$\varphi = A_0 \int_{\lambda}^{\infty} \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}}, \quad (4.2.2)$$

kde

$$A_0 = \frac{1}{2} L(\mu) L(\nu).$$

V tejto rovnici položíme hodnotu  $\lambda$  rovnú  $\lambda_1$  a dostaneme potenciál na povrchu elipsoidu. Označíme veličinu tohto náboja  $Q$  a vyčíslime tok elektrickej sily guľou veľkého polomeru. S použitím Gaussovej vety potom dostaneme:

$$-4\pi r^2 \frac{d\varphi}{dr} = 4\pi Q.$$

Túto rovnicu prepíšeme:

$$-d\varphi = Q \frac{dr}{r^2}$$

a po integrovaní podľa premennej  $r$  v hraniciach od nula do  $\infty$  dostaneme.

$$\varphi_r = \frac{Q}{r},$$

t.j. pri dostatočne veľkom  $r$  sa súčin  $\varphi \cdot r$  blíži ku  $Q$ . Tento predpoklad napíšeme v tvare:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (\varphi \cdot r) = Q.$$

V našom prípade, pri  $\varphi = A_0 \int_{\lambda}^{\infty} \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}}$  zväčšeniu  $r$  odpovedá nárast spodnej hranice integrálu.

Lahko sa presvedčíme, že pri náraste  $\lambda$ , platí nasledujúci vzťah:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left( \sqrt{\lambda} A_0 \int_{\lambda}^{\infty} \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}} \right) = A_0 \sqrt{\lambda} \int_{\lambda}^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^{\frac{3}{2}}} = 2A_0 \sqrt{\lambda} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2A_0.$$

Preto môžeme napísať:

$$2A_0 = Q.$$

Určenú hodnotu  $A_0$  dosadíme do výrazu pre  $\varphi_0$  a dostaneme:

$$\varphi_0 = \frac{Q}{2} \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}}. \quad (4.2.3)$$

Takto nájdeme výraz pre kapacitu  $C$  nášho elipsoidu:

$$C = \frac{Q}{\varphi_0} = \frac{2}{\int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}}} = \frac{2}{\int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{(a_1^2 + t)(b_1^2 + t)(c_1^2 + t)}}}. \quad (4.2.4)$$

V osobitnom prípade splošteného elipsoidu,  $a_1 < b_1 = c_1$ , prejde tento vzorec na:

$$C_1 = \frac{2}{\int_0^{\infty} \frac{dt}{(b_1^2 + t)\sqrt{a_1^2 + t}}}.$$

Tento integrál môžeme riešiť substitúciou  $a_1^2 + t = u^2$  a dostaneme:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{dt}{(b_1^2 + t)\sqrt{a_1^2 + t}} &= 2 \int_{a_1}^{\infty} \frac{du}{b_1^2 - a_1^2 + u^2} = \frac{2}{\sqrt{b_1^2 - a_1^2}} \left[ \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{b_1^2 - a_1^2}} \right]_{a_1}^{\infty} = \frac{2}{\sqrt{b_1^2 - a_1^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{b_1^2 - a_1^2}}{a_1} \\ &= \frac{2}{\sqrt{b_1^2 - a_1^2}} \operatorname{arcsin} \frac{\sqrt{b_1^2 - a_1^2}}{b_1}. \end{aligned}$$

Po určení hodnoty integrálu dostaneme pre kapacitu elipsoidu:

$$C_1 = \frac{\sqrt{b_1^2 - a_1^2}}{\operatorname{arcsin} \frac{\sqrt{b_1^2 - a_1^2}}{b_1}}.$$

Keď sa polos  $a_1$  znižuje, až sa stane veličinou nekonečne malou, tak nami skúmaný rotačný elipsoid sa stane diskom s polomerom  $b_1$ . Pre kapacitu takéhoto disku dostaneme z predchádzajúceho vzorca:

$$C_2 = \frac{2b_1}{\pi}.$$

## Literatúra

- Andrews, L.C., 1985: Special functions for engineers and applied mathematicians. Macmillan Publishing Company, 357 p.
- Bell, W.W., 1968: Special functions for scientists and engineers. D. van Nostrand Company, Ltd., London, 247 p.
- Lebedev, N.N., 1965: Special functions and their applications. Prentice-Hall, Inc. (English edition translated by R. Silverman), 308 p.
- Zaborovskij, A.N., 1939: Špeciálne funkcie v geofyzike. Vydavateľstvo Gonti (v ruštine).