

Univerzita Komenského, Prírodovedecká fakulta

**Peter Richter–Roman Pašteka–Miroslav Bielik
a kolektív**

**(Miroslav Hajach, Roland Karcol, Lucia Vreštiaková, Kristián Csicsay, Martin Katona, Eva
Speváková, Eva Szalaiová, Bibiána Kytková)**

UČEBNÉ TEXTY Z MATEMATIKY PRE 1. ROČNÍK GEOLÓGIE

2006

BRATISLAVA

© Mgr. Peter Richter, PhD., RNDr. Roman Pašteka, PhD., doc. RNDr. Miroslav Bielik,
DrSc. a kolektív (Miroslav Hajach, Roland Karcol, Lucia Vreštiaková, Kristián Csicsay, Martin
Katona, Eva Speváková, Eva Szalaiiová, Bibiána Kytková), 2006

ISBN 80-223-2201-6

Úvod

Tieto učebné texty z matematiky sú určené pre prvý ročník geológie na Prírodovedeckej fakulte Univerzity Komenského v Bratislave. Rozdelené sú do jedenástich lekcí, pričom snahou bolo pokryť základné témy úvodu do matematickej analýzy. Tieto témy tvoria teoretické základy mnohých analytických a interpretačných metód, prednášaných a používaných v rôznych odvetviach základnej a aplikovanej geológie. Každá lekcia zodpovedá týždennej prednáške, ktorá trvá dve vyučovacie hodiny.

Každá lekcia obsahuje teoretickú prípravu témy, základné vety, vzorce, poznámky a upozornenia na časté chyby. Všetky vety sú bez dôkazov, pretože sa nazdávame, že pre poslucháčov prvého ročníka geológie nie sú potrebné. Tí študenti, ktorí sa budú neskôr počas štúdia špecializovať na aplikovanú geofyziku alebo ktorí majú hlbší záujem o prezentované učivo, budú potrebovať aj niektoré dôkazy. Zatiaľ ich počas prednášok odkazujeme na štandardné učebnice matematickej analýzy.

Po každej lekcii nasledujú príklady – uvedených je ich približne 400 a sú usporiadané do skupín na základe podobnosti. Príklady sú ťažiskom týchto textov. Všetky príklady sú uvedené spolu s riešeniami a sú originálne (žiaden príklad nie je prevzatý z autormi známych zbierok riešených príkladov).

kolektív autorov

Obsah

Úvod	1
Obsah	4
Lekcia 1 – Množiny	6
Nové pojmy	6
Používané symboly	6
Množiny	6
Intervaly	8
Zobrazenie	9
Vlastnosti množín	9
Absolútna hodnota	10
Príklady	11
Lekcia 2 – Riešenie rovníc	16
Nové pojmy	16
Metódy riešenia rovníc	17
Príklady	21
Lekcia 3 – Funkcie a ich vlastnosti	31
Nové pojmy	31
Funkcia	31
Vlastnosti funkcií	32
Inverzná funkcia	35
Príklady	36
Lekcia 4 – Funkcie a ich grafy	42
Nové pojmy	42
Elementárne funkcie	42
Príklady	52
Lekcia 5 - Limita funkcie 1	58
Nové pojmy	58
Limita	58
Spojitosť funkcie	59
Príklady	60
Lekcia 6 - Limita funkcie 2	65
Nové pojmy	65
Pravidlá pre počítanie limit	65
Príklady	67
Lekcia 7 – Derivácie	71
Nové pojmy	71
Definície derivácie	71
Jednostranná derivácia	72
Príklady	74
Lekcia 8 - Derivácie elementárnych funkcií	77
Nové pojmy	77
Tabuľkové derivácie	77
Pravidlá pre počítanie derivácií	79
Vyššie derivácie	80
Derivácia neobvyklých funkcií	80
L'Hospitalovo pravidlo	80
Taylorov rad	81
Príklady	84

Lekcia 9 - Priebeh funkcií.....	93
Nové pojmy.....	93
Vlastnosti funkcií	93
Postup pri vyšetovaní priebehu funkcie	96
Príklady.....	97
Lekcia 10 – Neurčitý integrál	115
Nové pojmy.....	115
Tabuľkové integrály.....	115
Integrovanie metódou per partes.....	119
Integrovanie substitučnou metódou	120
Príklady.....	122
Lekcia 11 – Určitý integrál	126
Nové pojmy.....	126
Určitý integrál	126
Integrovanie metódou per partes.....	128
Integrovanie substitučnou metódou	128
Využitie určitého integrálu	129
Veta o strednej hodnote určitého integrálu	130
Príklady.....	132
Odporúčaná literatúra.....	136

Lekcia 1 – Množiny

Nové pojmy

- a. Množina, (ne)prázdna množina, (ne)konečná množina, (pravá) podmnožina, (pravá) nadmnožina, zjednotenie, prienik, rozdiel, karteziánsky súčin, potencia
- b. Zobrazenie, obraz množiny, prosté zobrazenie
- c. Horné (dolné) ohraničenie, zhora (zdola) ohraničená množina, supremum, infimum, minimum, maximum
- d. Absolútna hodnota
- e. Interval, zľava (sprava) otvorený (uzavretý) interval, neohraničený interval, okolie

Používané symboly

V nasledovných textoch sa budú vyskytovať nasledovné symboly:

Symbol	Názov	Číta sa
$\forall$	Všeobecný kvantifikátor	Každý, pre každé, všetky
$\exists$	Existenčný kvantifikátor	Existuje
$\wedge$	Konjunkcia	A zároveň
$\vee$	Alternatíva	Alebo
$\Rightarrow$	Implikácia	Z toho vyplýva
$\Leftrightarrow$	Ekvivalencia	Je rovnocenné, je ekvivalentné, práve vtedy
$\in (\notin)$	Patrí (nepatrí)	Patrí, je prvkom (nepatrí, nie je prvkom)
$\cap$	Prienik	Prienik
$\cup$	Zjednotenie	Zjednotenie (pomôcka „Únia“)
$\subset$	Podmnožina	Je podmnožinou
$\supset$	Nadmnožina	Je nadmnožinou
$\rightarrow$	Zobrazenie	Sa zobrazí na
$\rightarrow$	Šípka	Ide k, blíži sa k
∞	Nekonečno	Nekonečno
$\circ$	Kružok	Zložená funkcia

Jednotlivé symboly budú podrobnejšie vysvetlené priamo v texte.

Množiny

Množina. Pojem množina chápeme intuitívne, nedefinuje sa. Ekvivalentnými pojmi sú skupina, súbor.

Prvok množiny. Veci, elementy, členy, častice, súčiastky či položky, ktoré množina obsahuje, sa volajú prvky množiny.

Prázdná množina. Prázdná množina je taká, ktorá neobsahuje ani jeden prvok. Označuje sa $\{ \}$ alebo $\emptyset$.

Neprázdná množina. Neprázdná množina je taká, ktorá obsahuje aspoň jeden prvok.

Konečná množina. Konečná množina je taká, ktorá obsahuje konečný počet prvkov.

Nekonečná množina. Nekonečná množina je taká, ktorá obsahuje nekonečný počet prvkov.

Podmnožina. $B \subset A \Leftrightarrow \forall x \in B : x \in A$ alebo $B \subset A \Leftrightarrow (x \in B \Rightarrow x \in A)$

Množina B je podmnožinou množiny A vtedy, ak sa v množine A nachádzajú všetky prvky, ktoré sú aj v množine B. Podmnožina B je tiež množina. Má vždy menej alebo rovnako veľa prvkov ako množina A. Množina je vždy podmnožinou sama sebe. Napríklad podmnožinou kmeňa *Mollusca* je trieda *Cephalopoda*.

Pravá podmnožina. Pravá podmnožina B je taká podmnožina množiny A, ktorá má menej prvkov ako množina A. Nemôže mať rovnaký počet prvkov.

Nadmnožina. Ak B je podmnožinou množiny A, tak A je nadmnožinou množiny B.

Pravá nadmnožina. Ak B je pravou podmnožinou množiny A, tak A je pravou nadmnožinou množiny B. Musí mať teda viac prvkov ako množina B.

Poznámka a časté chyby. Pri určovaní podmnožín, nadmnožín, pravých podmnožín a pravých nadmnožín sa často stáva, že sa človek sústreďí len na počty prvkov a za podmnožinu určí tú, ktorá má prvkov menej. Treba dať ale pozor, aby všetky prvky podmnožiny boli aj v nadmnožine. Ak by sa v potenciálnej podmnožine našiel čo len jeden prvok iný, ako v potenciálnej nadmnožine, tieto dve množiny nie sú vo vzťahu podmnožina – nadmnožina.

Zjednotenie. $(x \in A \cup B) \Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B)$.

Zjednotenie množín je tiež množina. Je to taká množina, ktorá vznikne zlúčením množín, napr. A a B.

Prienik. $(x \in A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B)$.

Prienik množín je tiež množina. Je to taká množina, v ktorej sú len tie prvky, ktoré sú v daných množinách, napr. A a B.

Rozdiel. $(x \in A - B) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin B)$.

Rozdiel množín je tiež množina. Je to taká množina, v ktorej sú prvky z množiny A, ale nesmú byť v množine B. Je to tá časť, ktorá je v množine A navyše oproti množine B.

Poznámka a časté chyby. Pri určovaní rozdielu množín sa často stáva, že človeku vyjde množina, ktorá má menej ako 0 prvkov. To nie je možné, preto si treba pozrieť, čo sa od čoho odčíta.

Karteziánsky súčin K_{AB} . Karteziánsky súčin množín A a B je množina všetkých usporiadaných dvojíc $[a, b]$, pričom $a \in A \wedge b \in B$.

Poznámka a časté chyby. Pri určovaní karteziánskeho súčinu sa často stáva, že človek si myslí, že $[a, b] = [b, a]$. To je chyba. Dvojica je preto usporiadaná, lebo záleží aj na poradí prvkov.

Potencia. Potencia množiny A je množina všetkých podmnožín množiny A. Zvykne sa označovať P_A .

Poznámka a časté chyby. Pri určovaní potencie sa často stáva, že človek niektoré podmnožiny zabudne. Potencia sa ťažko určuje pri množinách, ktoré majú veľa prvkov alebo dokonca nekonečný počet prvkov.

Intervaly

Otvorený interval. Nech sú dané čísla a, b , pričom $a < b$. Otvorený interval je množina všetkých čísel x takých, že $a < x < b$. Označuje sa (a, b) , alebo $]a, b[$.

Uzavretý interval. Nech sú dané čísla a, b , pričom $a < b$. Uzavretý interval je množina všetkých tých čísel x takých, že $a \leq x \leq b$. Označuje sa $\langle a, b \rangle$ alebo $[a, b]$.

Zľava otvorený interval (sprava uzavretý interval). Nech sú dané čísla a, b , pričom $a < b$. Zľava otvorený interval (sprava uzavretý interval) je množina všetkých čísel x takých, že $a < x \leq b$. Označuje sa $(a, b]$ alebo $]a, b]$.

Sprava otvorený interval (zľava uzavretý interval). Nech sú dané čísla a, b , pričom $a < b$. Sprava otvorený interval (zľava uzavretý interval) je množina všetkých čísel x takých, že $a \leq x < b$. Označuje sa $[a, b)$ alebo $[a, b[$.

Zhora neohraničený interval. Zhora neohraničený interval je taký, ktorý nemá horné ohraničenie.

Zdola neohraničený interval. Zdola neohraničený interval je taký, ktorý nemá dolné ohraničenie.

Okolie. Okolie bodu a je akýkoľvek interval, ktorý obsahuje bod a . Zvykne sa označovať O_a .

Zobrazenie

Zobrazenie. Zobrazenie f množiny A do množiny B je dané vtedy, keď každému prvku z množiny A je priradený práve jeden prvok z množiny B . Označuje sa $f : A \rightarrow B$.

V množine A sú teda predlohy (vzory) pre zobrazenie a v množine B obrazy (výsledky) zobrazenia.

Poznámka a časté chyby. Pri určovaní zobrazenia sa často stáva, že človek priradí jednému prvku z množiny A viac prvkov z množiny B . To je chyba. Ale je možné, a dokonca časté, že viacerým prvkom z množiny A je priradený ten istý prvok z množiny B .

Obraz množiny. Obraz množiny je množina všetkých obrazov prvkov.

Prosté zobrazenie. Prosté zobrazenie je také, pre ktoré platí, že každé dva rôzne prvky z množiny A majú dva rôzne obrazy v množine B .

Poznámka a časté chyby. Pri určovaní prostého zobrazenia sa často stáva, že človek predsa len priradí dvom rôznym prvkom z množiny A jeden a ten istý prvok z množiny B . To je chyba.

Vlastnosti množín

Horné ohraničenie. Horné ohraničenie množiny A je číslo k , ak pre $\forall x \in A$ je $x \leq k$.

Dolné ohraničenie. Dolné ohraničenie množiny A je číslo l , ak pre $\forall x \in A$ je $x \geq l$.

Zhora ohraničená množina. Zhora ohraničená množina je taká, ktorá má horné ohraničenie.

Zdola ohraničená množina. Zdola ohraničená množina je taká, ktorá má dolné ohraničenie.

Ohraničená množina. Množina je ohraničená, ak je ohraničená zdola aj zhora.

Supremum. Supremum je najmenšie horné ohraničenie.

Infimum. Infimum je najväčšie dolné ohraničenie.

Maximum. Ak supremum patrí množine, volá sa maximum.

Minimum. Ak infimum patrí množine, volá sa minimum.

Poznámka a časté chyby. Často si ľudia mýlia supremum s maximom a infimum s minimom, lebo sa nevedia rozhodnúť, či supremum do množiny patrí alebo nie. Často ľudia považujú napríklad zhora ohraničenú množinu za ohraničenú. Ale na to, aby bola množina ohraničená, musí byť ohraničená aj zdola aj zhora.

Absolútna hodnota

Absolútna hodnota. $|a| = \max\{-a, a\}$.

Absolútna hodnota nie je nikdy záporná, či už je číslo a kladné alebo záporné. Bežne sa určí tak, že sa zabudne na znamienko.

Poznámka a časté chyby. Určenie absolútnej hodnoty zabudnutím na znamienko je v poriadku len vtedy, ak sa určuje absolútna hodnota čísla. Ak je pod absolútnou hodnotou funkcia, problém je zložitejší a treba výpočtom zistiť, kde funkcia nadobúda kladné a kde záporné hodnoty.

Príklady

Príklad 1. Ktoré z nasledovných sú množiny? Ktoré sú konečné, ktoré nekonečné? Koľko majú prvkov?

- | | | |
|-----------------------|--------------------------------------|---------------------------------|
| a. čísla 1,2,3 | d. $\{\}$ | g. $\{\{\}\}$ |
| b. $\{a, +, g, 4\}$ | e. $\{\text{stôl, stolička, ryba}\}$ | h. $\{1, 2, \{i\}_{i=1}^{12}\}$ |
| c. $\{n\}_{n=1}^{30}$ | f. $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ | |

Riešenie. Všetky sú množiny.

- | | | |
|------------------------|--------------------------------|------------------------|
| a. Konečná, 3 prvky. | e. Konečná, 3 prvky. | h. Konečná, 14 prvkov. |
| b. Konečná, 4 prvky. | f. Nekonečná, ∞ prvkov. | |
| c. Konečná, 30 prvkov. | g. Konečná, 1 prvok. | |
| d. Konečná, 0 prvkov. | | |

Príklad 2. V ktorých prípadoch $A \subset B$ a kedy $B \subset A$? Kedy sa jedná o pravé podmnožiny?

- | | |
|---|--|
| a. $A=\{1,2\}; B=\{1,2,3\}$ | f. $A=\{x_i\}_{i=1}^5; B=\{x_i\}_{i=1}^6$ |
| b. $A=\{1,2,3\}; B=\{1,2\}$ | g. $A=\mathbb{R}; B=\mathbb{N}$ |
| c. $A=\{\text{jablko}\}; B=\{\text{jablko}\}$ | h. $A=\mathbb{Z}; B=\mathbb{N}$ |
| d. $A=\{\}; B=\{1\}$ | i. $A=\text{nezáporné čísla}; B=\text{kladné čísla}$ |
| e. $A=B=\{\}$ | |

Riešenie.

- | | | |
|-------------------------------|-------------------------------|--------------------------|
| a. $A \subset B$, pravá | d. $A \subset B$, pravá | g. $B \subset A$, pravá |
| b. $B \subset A$, pravá | e. $A \subset B, B \subset A$ | h. $B \subset A$, pravá |
| c. $A \subset B, B \subset A$ | f. $A \subset B$, pravá | i. $B \subset A$, pravá |

Príklad 3. Nájdi $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$, $B - A$.

- | | |
|--|---|
| a. $A=\{1,2,3\}; B=\{1,2\}$ | c. $A=\{x_i\}_{i=1}^5; B=\{x_i\}_{i=1}^6$ |
| b. $A=\{\text{orech, jablko}\}; B=\{\text{hruška, koleso}\}$ | d. $A=\mathbb{Z}; B=\mathbb{N}$ |

Riešenie.

- a. $A \cap B = \{1,2\} = B$, $A \cup B = \{1,2,3\} = A$, $A - B = \{3\}$, $B - A = \{ \}$
- b. $A \cap B = \{ \}$, $A \cup B = \{\text{orech, jablko, hruška, koleso}\}$, $A - B = \{\text{orech, jablko}\} = A$,
 $B - A = \{\text{hruška, koleso}\} = B$
- c. $A \cap B = \{x_i\}_{i=1}^5 = A$, $A \cup B = \{x_i\}_{i=1}^6 = B$, $A - B = \{ \}$, $B - A = \{x_6\}$
- d. $A \cap B = \mathbb{N} = B$, $A \cup B = \mathbb{Z} = A$, $A - B = \mathbb{Z}_0^-$, $B - A = \{ \}$

Príklad 4. Zisti $A \cap B \cap C \cap D$ a $A \cup B \cup C \cup D$.

- a. $A=\{1\}$; $B=\{1,2\}$; $C=\{1,2,3\}$; $D=\{1,2,3,4\}$
- b. $A=\{1\}$; $B=\{1,2\}$; $C=\{1,2,3\}$; $D=\{2,3,4,5\}$
- c. $A=\mathbb{Z}$, $B=\mathbb{N}$, $C=\mathbb{Q}$, $D=\mathbb{R}$
- d. $A=\mathbb{Z}$, $B=\mathbb{N}$, $C=\mathbb{R}$, $D=\{0\}$
- e. $A=\mathbb{Z}$, $B=\mathbb{N}$, $C=\mathbb{R}$, $D=\{ \}$

Riešenie.

- a. $A \cap B \cap C \cap D = 1$, $A \cup B \cup C \cup D = \{1,2,3,4\}$
- b. $A \cap B \cap C \cap D = \{ \}$, $A \cup B \cup C \cup D = \{1,2,3,4,5\}$
- c. $A \cap B \cap C \cap D = \mathbb{N}$, $A \cup B \cup C \cup D = \mathbb{R}$
- d. $A \cap B \cap C \cap D = \{ \}$, $A \cup B \cup C \cup D = \mathbb{R}$
- e. $A \cap B \cap C \cap D = \{ \}$, $A \cup B \cup C \cup D = \mathbb{R}$

Príklad 5. V ktorých prípadoch $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$?

- a. $A=\{1\}$; $B=\{1,2\}$; $C=\{1,2,3\}$
- b. $A=\{\heartsuit\}$; $B=\{\clubsuit, \diamondsuit, \spadesuit\}$; $C=\{\clubsuit, \spadesuit\}$
- c. $A=\{x_i\}_{i=1}^5$; $B=\{x_i\}_{i=1}^6$; $C=\{x_i\}_{i=1}^7$
- d. $A=\mathbb{Z}$; $B=\mathbb{R}$; $C=\{ \}$

Riešenie.

- a. $(A \cap B) \cup C = \{1,2,3\} \neq A \cap (B \cup C) = \{1\}$
- b. $(A \cap B) \cup C = C \neq A \cap (B \cup C) = \{ \}$
- c. $(A \cap B) \cup C = C \neq A \cap (B \cup C) = A$
- d. $(A \cap B) \cup C = \mathbb{Z} = A \cap (B \cup C)$

Príklad 6. Urob karteziánsky súčin množín A a B.

- | | |
|---|-------------------------------------|
| a. $A=\{1,2\}; B=\{s,r\}$ | d. $A=\mathfrak{R}; B=\mathfrak{R}$ |
| b. $A=\{\text{pyrit, chalkopyrit}\}; B=\{\text{jablko, hruška}\}$ | e. $A=\mathbb{Z}; B=\mathbb{Z}$ |
| c. $A=\{\text{zem}\}; B=\{1,2,3,4\}$ | f. $A=\{\}; B=\{1,2\}$ |

Riešenie.

- a. $\{[1,s],[1,r],[2,s],[2,r]\}$
- b. $\{[\text{pyrit, jablko}], [\text{pyrit, hruška}], [\text{chalkopyrit, jablko}], [\text{chalkopyrit, hruška}]\}$
- c. $\{[\text{zem},1], [\text{zem},2], [\text{zem},3], [\text{zem},4]\}$
- d. Všetky body súradnicovej sústavy, danej osami x a y
- e. Všetky body súradnicovej sústavy, danej osami x a y, ale také, ktoré sú priesečníkmi priamok $x=c; c \in \mathbb{Z}$ a $y=c; c \in \mathbb{Z}$. Sú to teda všetky tie body, ktorých súradnice sú celé čísla.
- f. $\{\}$

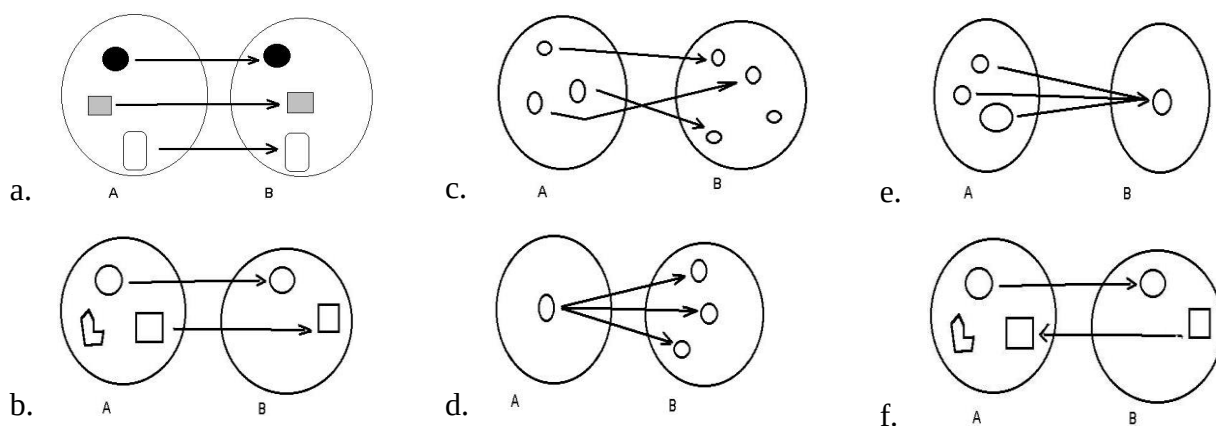
Príklad 7. Urči potenciu množiny A.

- | | |
|--------------------------|--------------------|
| a. $A=\{1,2,3\}$ | c. $A=\{\}$ |
| b. $A=\{\text{jablko}\}$ | d. $A=\{a,b,c,d\}$ |

Riešenie.

- a. $\{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$
- b. $\{\{\}, \{\text{jablko}\}\}$
- c. $\{\{\}, \{\}\}$
- d. $\{\{\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}, \{a,b,c,d\}\}$

Príklad 8. Ktoré sú zobrazenia $A \rightarrow B$?



Riešenie.

- Je to zobrazenie, pretože každému prvku z A sa priradí práve jeden prvok z B.
- Nie je zobrazenie, pretože nie každému prvku z A sa priradí niečo z B priradí.
- Je to zobrazenie, pretože každému prvku z A sa priradí práve jeden prvok z B. Nevadí, že sa celé B nevyčerpalo.
- Nie je zobrazenie, pretože jednému prvku z A sa priradil viac ako jeden prvok z B.
- Je to zobrazenie, pretože každému prvku z A sa priradí práve jeden prvok z B. Nevadí, že viac prvkov sa zobrazilo na jeden.
- Nie je zobrazenie $A \rightarrow B$, pretože aj z B sa zobrazuje.

Príklad 9. Zisti, či je množina A zhora (zdola) ohraničená, či je ohraničená a nájdi nejaké horné (dolné) ohraničenie.

- | | | |
|---|---------------------------------|----------------------------------|
| a. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ | d. $A = \{i\}_{i=1}^{100}$ | g. $A = \{s^2\}_{s=-5}^{\infty}$ |
| b. $A = \{-1000, 0, 1000\}$ | e. $A = \{i\}_{i=-1000}^{-20}$ | h. $A = \{s^3\}_{s=-\infty}^2$ |
| c. $A = \{\text{jablko}, \text{hruška}, \text{orech}\}$ | f. $A = \{s^2\}_{s=0}^{\infty}$ | |

Riešenie.

- | | |
|--------------------------------------|--------------------------------|
| a. Ohraničená, $l=0, k=10$ | e. Ohraničená, $l=-5550, k=10$ |
| b. Ohraničená, $l=-100000, k=100000$ | f. Ohraničená zdola, $l=-10$ |
| c. Nezoraditeľná množina | g. Ohraničená zdola, $l=-110$ |
| d. Ohraničená, $l=0, k=100$ | h. Ohraničená zhora, $k=9$ |

Príklad 10. Nájdi supremum, maximum, infimum a minimum množiny A .

a. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

e. $A = \left\{ \frac{1}{i} \right\}_{i=1}^{100}$

h. $A = \left\{ \frac{1}{i} \right\}_{i=1}^{\infty}$

b. $A = \{-1000, 0, 1000\}$

f. $A = (1; 5)$

i. $A = (-1; 3)$

c. $A = (-1; 2]$

g. $A = \left\{ \frac{1}{i} \right\}_{i=1}^{100}$

j. $A = \left\{ \frac{1}{i} \right\}_{i=-\infty}^{\infty}$

d. $A = \{\text{jablko}, \text{hruška}, \text{orech}\}$

Riešenie.

a. $\inf A = 1, \min A = 1, \sup A = 6, \max A = 6$

b. $\inf A = -1000, \min A = -1000, \sup A = 1000, \max A = 1000$

c. $\inf A = -1, \text{minimum nemá}, \sup A = 2, \max A = 2$

d. Nezoraditeľná množina

e. $\inf A = 1, \min A = 1, \sup A = 100, \max A = 100$

f. $\inf A = 1, \min A = 1, \sup A = 5, \text{maximum nemá}$

g. $\inf A = 0,01, \min A = 0,01, \sup A = 1, \max A = 1$

h. $\inf A = 0, \text{minimum nemá}, \sup A = 1, \max A = 1$

i. $\inf A = -1, \text{minimum nemá}, \sup A = 3, \text{maximum nemá}$

j. Neohraničená množina

Lekcia 2 – Riešenie rovníc

Nové pojmy

- a. Ekvivalentné a neekvivalentné úpravy
- b. Osamostatňovanie neznámej, diskriminant, koreň rovnice

Riešenie rovníc patrí medzi najdôležitejšie časti matematiky. Z pohľadu týchto učebných textov je táto kapitola najdôležitejšia zo všetkých. Hneď na úvod treba povedať, že obrovské množstvo procesov v geológii je riadených procesmi opísanými rovnicami, ktoré riešenie nemajú. Je tu však mnoho dejov alebo aspoň ich priblížení, za ktorými stoja riešiteľné rovnice. Geológ si musí tiež uvedomiť, že niektoré rovnice (deje, procesy) riešenie nemajú, iné majú jedno, dve, tri alebo aj nekonečne veľa. Znamená to, že ak sme našli riešenie pre danú rovnicu, ešte to automaticky neznamená, že je problém vyriešený. Počet riešení závisí od typu rovnice. K týmto riešeniam sa dá dospieť úpravami, ktoré sa delia na ekvivalentné a neekvivalentné.

Ekvivalentné úpravy. Sú to také, ktoré neovplyvňujú počet riešení. Patria medzi ne:

- a. pripočítanie alebo odčítanie rovnakého čísla od oboch strán rovnice
- b. násobenie alebo delenie oboch strán rovnakým číslom (okrem nuly)

Neekvivalentné úpravy. Sú to také, pri ktorých sa riešenia strácajú alebo naopak vznikajú nové. Patria medzi ne:

- a. umocňovanie a odmocňovanie
- b. logaritmovanie
- c. násobenie alebo delenie oboch strán premennou

Poznámka. Vždy sa hovorí o úprave oboch strán rovnice. Nie je možné upraviť iba jednu stranu s tým, že druhá zostane nezmenená. Tým by vznikla úplne iná rovnica. Úprava jednej strany rovnice musí mať protiváhu na druhej strane, aby sa rovnica zmenila iba vizuálne, ale jej obsahová stránka musí zostať zachovaná.

Poznámka. Násobenie alebo delenie oboch strán premennou je neekvivalentná úprava preto, lebo premenná zastupuje všetky možné čísla, a teda aj nulu. A násobenie rovnice nulou rovnicu zničí a delenie nulou nemá zmysel.

Metódy riešenia rovníc

Metód riešenia rovníc je mnoho, pretože typov rovníc je mnoho. Každý typ sa vyznačuje osobitným spôsobom riešenia, prípadne osobitným postupom. Je však možné nájsť aj spoločné kroky pre riešenie viacerých alebo dokonca všetkých typov (napríklad ekvivalentné úpravy). V ďalšom texte sa obmedzíme na riešenie iba najzákladnejších typov rovníc.

Poznámka. Niekedy nie je jasné, čo to vlastne ten pojem „vyriešiť rovnicu“ znamená. V skutočnosti to znamená, že premennú treba osamostatniť, teda použiť také ekvivalentné úpravy, aby premenná zostala na jednej strane a všetko ostatné na druhej strane. Inak povedané: Treba nájsť také x , pre ktoré platí $f(x) = 0$.

Konštantné rovnice. Sú to rovnice typu $f(x) = c$. Keďže funkcia nemá vo svojom predpise premennú, nie je čo riešiť.

Lineárne rovnice. Sú to rovnice typu $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$. Treba teda riešiť rovnicu $ax + b = 0$. Rovnicu riešime v dvoch krokoch:

1. Od obidvoch strán odčítame b a dostaneme: $ax = -b$.
2. Obe strany predelíme a a dostaneme: $x = -\frac{b}{a}$.

Kvadratické rovnice. Sú to rovnice typu $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Treba teda riešiť rovnicu $ax^2 + bx + c = 0$. Rovnicu riešime najčastejšie pomocou diskriminantu. Diskriminant je pomocná veličina a jej predpis je: $D = b^2 - 4ac$.

Riešenie je potom:
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Poznámka. Z predpisu vidno, že riešenia môžu byť dve (keď je diskriminant kladný), môže byť jedno-dvojnásobný koreň (keď je diskriminant nulový), ale riešenie nemusí existovať vôbec (keď je diskriminant záporný). Závisí to od konštant a, b, c .

Polynomicke rovnice vyššieho rádu. Sú to rovnice typu $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + x + c$, $a \neq 0$. Treba teda riešiť rovnicu $ax^n + bx^{n-1} + \dots + x + c = 0$. Rovnica sa vo všeobecnosti nemusí dať vyriešiť. Postup riešenia je známy iba pre niektoré typy, preto sa ním nebudeme bližšie zaoberať.

Exponenciálne rovnice. Sú to rovnice typu $f(x) = M^{ax} + b$, $M \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 0$. Treba teda riešiť rovnicu $M^{ax} + b = 0$. Rovnicu riešime najčastejšie pomocou logaritmovania:

1. Od obidvoch strán odčítame b a dostaneme: $M^{ax} = -b$.
2. Zlogaritmujeme obe strany rovnice. Zvolíme logaritmus pri základe M . Dostaneme: $\log_M M^{ax} = \log_M(-b)$. Exponent sa teraz dá zapísať pred logaritmus: $ax \log_M M = \log_M(-b)$. Keďže $\log_M M = 1$, dostaneme $ax = \log_M(-b)$.
3. Obe strany predelíme a a dostaneme: $x = \frac{1}{a} \log_M(-b)$.

Poznámka. Z predpisu vidno, že riešenie môže byť jedno (keď je b záporné), ale riešenie nemusí existovať vôbec (keď je b kladné).

Logaritmické rovnice. Sú to rovnice typu $f(x) = \log_M(ax) + b$, $M \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 0$. Treba teda riešiť rovnicu $\log_M(ax) + b = 0$. Keďže sme exponenciálnu rovnicu riešili pomocou logaritmovania, rovnicu logaritmickú riešime pomocou exponenciálnej operácie:

1. Od obidvoch strán odčítame b a dostaneme: $\log_M(ax) = -b$.
2. Na obe strany rovnice aplikujeme exponencovanie. Zvolíme základ M : $M^{\log_M(ax)} = M^{-b}$. Pri takto vhodne zvolenom základe nám ostane $ax = M^{-b}$.
3. Obe strany predelíme a a dostaneme: $x = \frac{1}{a} M^{-b}$.

Poznámka. Logaritmus záporných čísel a nuly nie je definovaný. Preto túto rovnicu budeme riešiť iba za istých okolností: v prípade, že a je kladné, riešenie hľadáme pre kladné x , v prípade, že a je záporné, riešenie hľadáme pre záporné x .

Goniometrické rovnice. Sú to rovnice typu $f(x) = \sin(ax) + b$, $f(x) = \cos(ax) + b$, $f(x) = \operatorname{tg}(ax) + b$, $f(x) = \operatorname{cotg}(ax) + b$. Všetky sa riešia podobným postupom, preto riešenie ukážeme na príklade $\sin(ax) + b = 0$. Najväčší problém je to, že táto funkcia je periodická. Postup riešenia je nasledovný:

1. Od obidvoch strán odčítame b a dostaneme: $\sin(ax) = -b$.
2. Aplikujeme inverznú funkciu, teda arkussínus a dostaneme: $ax = \arcsin(-b)$.

3. Obe strany predelíme a a dostaneme: $x = \frac{1}{a} \arcsin(-b)$.

Poznámka. Predošlý výsledok je iba čiastočná pravda. Hoci vieme, že cyklometrické funkcie sú inverzné ku goniometrickým, nemôžeme jednoducho aplikovať na obe strany inverznú operáciu, pretože cyklometrické funkcie majú iný definičný obor. Stratila by sa nám periodickosť. Korektne sa postupuje tak, že sa položí otázka: Sínus čoho je rovný $-b$? Toto sa elegantne vyrieši na jednotkovej kružnici. V lekcii 3 sme zistili, že sínus a kosínus sú periodické s periódou 360° a tangens a kotangens s periódou 180° . Preto ak nám vyjde výsledok ako nejaký uhol φ , je potrebné si uvedomiť, že $\varphi + 360^\circ$ predstavuje pre sínus a kosínus tiež výsledok (pre tangens a kotangens je to, prirodzene, $\varphi + 180^\circ$). Konečný výsledok sa teda zapisuje $\varphi \pm k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$, prípadne v uhlovej miere $\varphi \pm k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$ (pre sínus a kosínus) a $\varphi \pm k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}$, prípadne v uhlovej miere $\varphi \pm k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$ (pre tangens a kotangens).

Poznámka. Pri riešení goniometrických rovníc často pomôže preformulovanie zadania nasledovne: Ak máme vyriešiť rovnicu, ktorej predpis je $\sin(\varphi) = A$, tak otázka znie: „Sínus akého uhla je A ?“ Podobne aj pre ostatné goniometrické funkcie.

Cyklometrické rovnice. Sú to rovnice typu $f(x) = \arcsin(ax) + b$, $f(x) = \arccos(ax) + b$, $f(x) = \arctan(ax) + b$, $f(x) = \operatorname{arccot} g(ax) + b$. Cyklometrické rovnice sa riešia podobne ako rovnice goniometrické pomocou inverzie. Postup je však opačný. Tento krát nie je neznámou uhol φ , ale dĺžka. Ak máme vyriešiť rovnicu, ktorej predpis je $\arcsin(A) = \varphi$, tak otázka znie: „Sínus uhla φ je koľko?“ Podobne aj pre ostatné cyklometrické funkcie. Postup riešenia je presne taký, ako v prípade goniometrických rovníc, preto riešenie rovnice $\arcsin(ax) + b = 0$ je $x = \frac{1}{a} \sin(-b)$. Podobne aj pre ostatné cyklometrické funkcie.

Poznámka. Takmer vždy je prehľadnejšie riešiť tieto rovnice pomocou jednotkovej kružnice. Keď sa na obrázok nakreslia potrebné uhly, prípadne dĺžky, výsledok je jasný.

Hyperbolické rovnice. Sú to rovnice typu $f(x) = \sinh(ax) + b$, $f(x) = \cosh(ax) + b$, $f(x) = \operatorname{tgh}(ax) + b$, $f(x) = \operatorname{cotg} h(ax) + b$. Riešiť hyperbolické rovnice nie je jednoduché. Dôvodom je to, že hyperbolické funkcie sú zložené

z exponenciálnych funkcií. Obyčajne sa však postupuje tak, že sa samotná funkcia nerozdeľuje na jednotlivé exponenciálne členy. Rieši sa prostým invertovaním, teda výsledok sa uvádza pomocou inverznej funkcie k danej hyperbolickej. Postup riešenia je presne taký, ako v prípade goniometrických rovníc, preto riešenie rovnice $\sinh(ax) + b = 0$ je $x = \frac{1}{a} \arg \sinh(-b)$. Podobne aj pre ostatné hyperbolické funkcie.

Hyperbolometrické rovnice. Sú to rovnice typu $f(x) = \arg \sinh(ax) + b$, $f(x) = \arg \cosh(ax) + b$, $f(x) = \argt gh(ax) + b$, $f(x) = \operatorname{argcotg} h(ax) + b$. Riešiť hyperbolometrické rovnice nie je jednoduché. Dôvodom je to, že hyperbolometrické funkcie sú zložené z logaritmickej funkcie a odmocnín. Obyčajne sa však postupuje tak, že sa samotná funkcia neprepisuje pomocou logaritmov. Rieši sa prostým invertovaním, teda výsledok sa uvádza pomocou inverznej funkcie k danej hyperbolometrickej. Postup riešenia je presne taký, ako v prípade goniometrických rovníc, preto riešenie rovnice $\arg \sinh(ax) + b = 0$ je $x = \frac{1}{a} \sinh(-b)$. Podobne aj pre ostatné hyperbolometrické funkcie.

Príklady

Príklad 11. Vyrieš nasledovné lineárne rovnice:

a. $6x - 5 = \frac{1}{3}$

d. $2x + 3 - 6x = 1,5x + 3\left(2 - \frac{x}{9}\right)$

b. $-\frac{2-x}{3} = 6$

c. $3 = 5 - \frac{2}{x}$

Riešenie.

- a. Najskôr k oboj stranám rovnice pričítame 5 a dostaneme $6x = \frac{1}{3} + 5 = \frac{1}{3} + \frac{15}{3} = \frac{16}{3}$.

Predelíme 6 a máme $x = \frac{16}{18} = \frac{8}{9}$.

- b. Najskôr obe strany rovnice vynásobíme 3 a dostaneme $-(2-x)=18$. Znamienko mínus vložíme do zátvorky a máme $(-2+x)=18$. Zátvorka už nie je potrebná a stačí k oboj stranám rovnice pričítať dvojku. Výsledok je $x=20$.

- c. Nesmieme sa dať pomýliť tým, že neznáma je v menovateli. Určíme podmienky riešenia ($x \neq 0$) a vynásobíme obe strany rovnice premennou. Nejedná sa o hyperbolu, pretože keď vynásobíme premennou, dostaneme $3x=5x-2$. Členy s neznámou dáme na jednu stranu a dostaneme $3x-5x=2$, z toho $-2x=2$ a po predelení mínus dvojkou je výsledok $x=-1$.

- d. Odstránenie zátvoriek je (skoro) vždy prvé, preto vynásobíme členy v zátvorke trojkou: $2x + 3 - 6x = 1,5x + 6 - \frac{x}{3}$. Na jednu stranu (napríklad na ľavú) prenesieme všetko s neznámou (samozrejme s opačným znamienkom) a na druhú stranu (pravú) prenesieme všetko ostatné (tiež s opačným znamienkom). Dostaneme: $2x - 6x - 1,5x + \frac{x}{3} = 6 - 3$. Na ľavej strane vyberieme neznámu pred zátvorku a máme: $(2 - 6 - 1,5 + 1/3)x = 3$. V zátvorke je dokopy $-31/6$, preto týmto predelíme obe strany rovnice. Výsledok je: $x = \frac{3}{-31/6} = -\frac{18}{31}$.

Príklad 12. Vyrieš nasledovné kvadratické rovnice:

a. $x^2 + 3x = -2$

c. $x^2 + x = -1$

b. $-x^2 = 1 + 2x$

Riešenie.

a. Rovnicu prepíšeme na tvar $x^2 + 3x + 2 = 0$ a riešime pomocou diskriminantu.

Keďže sa jedná o kvadratickú rovnicu, vo všeobecnosti očakávame dve riešenia:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm 1}{2}. \quad \text{Preto} \quad x_1 = \frac{-3 + 1}{2} = -1 \quad \text{a}$$

$$x_2 = \frac{-3 - 1}{2} = -2.$$

b. Rovnicu prepíšeme na tvar $-x^2 - 2x - 1 = 0$, vynásobíme obe strany rovnice -1, čím dostaneme $x^2 + 2x + 1 = 0$ a riešime pomocou diskriminantu.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 0}{2}. \quad \text{Obe riešenia sú teda rovnaké,}$$

teda je len jedno riešenie (dvojnásobný koreň): $x = -1$.

c. Rovnicu prepíšeme na tvar $x^2 + x + 1 = 0$ a riešime pomocou diskriminantu.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}. \quad \text{Diskriminant je záporný,}$$

pod odmocninou ale záporné číslo nemôže byť, preto rovnica nemá riešenie.

Príklad 13. Vyrieš nasledovné mocninové rovnice:

a. $(x - 89)^5 + 2 = 6$

b. $-2x^3 - 2 = 14$

d. $x^8 = x^7$

c. $\frac{10}{x^{0,33}} - 1 = 2$

Riešenie.

a. Od oboch strán rovnice odčítame 2, dostaneme tvar $(x - 89)^5 = 4$ a odmocníme:

$$x - 89 = \sqrt[5]{4}. \quad \text{K oboom stranám pričítame 89 a výsledok je } x = \sqrt[5]{4} + 89.$$

- b. K oboj stranám rovnice pričítame 2, dostaneme tvar $-2x^3 = 16$ a predelíme -2:

$$x^3 = \frac{16}{-2} = -8. \text{ Potom } x = \sqrt[3]{-8} = -2. \text{ Netreba sa ľakať, že bolo pod odmocninou}$$

záporné číslo, odmocnina bola totiž nepárna.

- c. K oboj stranám rovnice pričítame 1 a dostaneme tvar $\frac{10}{x^{0,33}} = 3$. Vynásobíme obe

$$\text{strany rovnice } x^{0,33} \text{ a predelíme 3. Dostaneme } \frac{10}{3} = x^{0,33}. \text{ Výsledok je } x = \sqrt[0,33]{10/3}.$$

Ak je potrebné číslo, vyčíslime na kalkulačke, avšak obvykle sa výsledok necháva v takomto tvare. Vynásobili sme však neznámou, preto sa treba presvedčiť, čo by sa stalo, keby bola náhodou nulová. Dosadíme teda do zadania $x=0$ a vyjde nám

$$\frac{10}{0^{0,33}} = 3. \text{ Nula v menovateli nemá zmysel, preto žiadne riešenie sa pri vynásobení}$$

neznámou nestratilo.

- d. Obe strany rovnice predelíme x^7 a dostaneme $x=1$. Predelili sme však neznámou, preto sa treba presvedčiť, čo by sa stalo, keby bola náhodou nulová. Dosadíme teda do zadania $x=0$ a vyjde nám $0^8 = 0^7$, čiže $0=0$. Ľavá strana sa rovná pravej, preto aj nula je riešením. Rovnica má teda riešenia dve.

Príklad 14. Vyrieš nasledovné exponenciálne rovnice:

a. $3e^{2(x-9)} - 1 = 2$

c. $5^{9(x+1)} + 21 = -19$

b. $-5e^{-x/6} = 2 - 3$

d. $-3^{x/9} - 3 = -5$

Riešenie.

- a. K oboj stranám rovnice pričítame 1, dostaneme $3e^{2(x-9)} = 3$, predelíme 3 a máme $e^{2(x-9)} = 1$. Obe strany rovnice zlogaritmujeme pri základe e a dostaneme $\ln e^{2(x-9)} = \ln 1$, čo je to isté, ako $\ln e^{2(x-9)} = 0$. $2(x-9)$ dáme pred logaritmus, dostaneme $2(x-9) \ln e = 0$, čo je to isté, ako $2(x-9) = 0$. Predelíme obe strany rovnice 2, dostaneme $x - 9 = 0$, k oboj stranám pričítame 9 a výsledok je $x = 9$.
- b. Rovnicu vynásobíme -1, dostaneme $5e^{-x/6} = -2 + 3 = 1$ a predelíme 5: $e^{-x/6} = 1/5$. Obe strany rovnice zlogaritmujeme pri základe e a dostaneme $\ln e^{-x/6} = \ln(1/5)$.

$-x/6$ dáme pred logaritmus, dostaneme $-\frac{x}{6} \ln e = \ln(1/5)$, čo je to isté, ako

$-\frac{x}{6} = \ln(1/5)$. Obe strany už len vynásobíme -6 a výsledok je $x = -6 \ln(1/5)$.

c. Od oboch strán rovnice odčítame 21, dostaneme $5^{9(x+1)} = -40$ a zlogaritmujeme pri základe 5, čím dostaneme $\log_5 5^{9(x+1)} = \log_5(-40)$. $9x+9$ dáme pred logaritmus a dostaneme $(9x+1) \log_5 5 = \log_5(-40)$, čo je to isté, ako $9x+1 = \log_5(-40)$. Od oboch strán odčítame 1, $9x = \log_5(-40) - 1$, obe strany rovnice predelíme 9 a výsledok je $x = \frac{1}{9}(\log_5(-40) - 1)$. Úpravy boli ale aj tak zbytočné, pretože rovnica aj tak nemá riešenie, keďže logaritmus záporných čísel nie je definovaný.

d. K obom stranám rovnice pričítame 3, dostaneme $-3^{x/9} = -2$. Obe strany kvôli prehľadnosti vynásobíme -1, čím dostaneme $3^{x/9} = 2$. Zlogaritmujeme pri základe 3, čím dostaneme $\log_3 3^{x/9} = \log_3 2$. $x/9$ dáme pred logaritmus a dostaneme $\frac{x}{9} \log_3 3 = \log_3 2$, čo je to isté, ako $\frac{x}{9} = \log_3 2$. Obe strany rovnice vynásobíme 9 a výsledok je $x = 9 \log_3 2$.

Príklad 15. Vyrieš nasledovné goniometrické rovnice:

a. $2 \sin(\varphi - 5) + 2 = 3$

c. $-\tan(\varphi) + 200 = 200$

b. $0,5 \cos(2\varphi) - \frac{\sqrt{2}}{4} = 0$

d. $-\cot g(\varphi) + 2\sqrt{3} = 7\sqrt{3} / 3$

Riešenie.

a. Od oboch strán rovnice odčítame 2, dostaneme $2 \sin(\varphi + 5^\circ) = 1$ a predelíme 2, čím dostaneme $\sin(\varphi + 5^\circ) = 0,5$. Výsledok je $\varphi + 5^\circ = \arcsin 0,5$, čiže $\varphi = \arcsin 0,5 - 5^\circ$. Kalkulačka dá výsledok $30^\circ - 5^\circ = 25^\circ$. Ako už bolo povedané, goniometrické funkcie sú periodické, preto nás takýto rýchly postup pripravil o polovicu pravdy. Korektné riešenie sa dosiahne otázkou: Sínus akého uhla je 0,5? Pomocou jednotkovej kružnice a dĺžky 0,5 na osi y vidíme, že riešenie je 30° a 150° . Po odčítaní 5° dostaneme 25° a 145° . Ani toto ešte nie je koniec, pretože sínus má

periódu 360° , teda k výsledku je možné pridať aj ľubovoľný počet „otočiek“ o 360° . Úplný výsledok je: $\varphi = 25^\circ + k \cdot 360^\circ$ a $\varphi = 145^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

- b. Kvôli cviku sa v tomto príklade nebudú používať stupne, ale radiány. K oboj stranám rovnice pričítame $\sqrt{2}/4$, dostaneme $0,5 \cos(2\varphi) = \frac{\sqrt{2}}{4}$, predelíme 0,5 a máme $\cos(2\varphi) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Zvádza nás použiť inverznú funkciu, čím by sme prešli na tvar $2\varphi = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$, čo síce je pravda, ale nie celá. Korektné riešenie sa dosiahne otázkou: Kosínus akého uhla je $\sqrt{2}/2$? Pomocou jednotkovej kružnice a dĺžky $\sqrt{2}/2$ na osi x vidíme, že riešenie je uhol $\pi/4$, ako aj uhol $7\pi/4$. Medzivýsledok je teda $2\varphi = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ a $2\varphi = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Toto platí pre uhol 2φ , preto ešte obe strany predelíme 2. Úplný výsledok je: $\varphi = \frac{\pi}{8} + k\pi$ a $\varphi = \frac{7\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- c. Od oboch strán rovnice odčítame 200, dostaneme $-\tan(\varphi) = 0$ a vynásobíme -1, čím dostaneme $\tan(\varphi) = 0$. Inverznou funkciou dostaneme výsledok $\varphi = \arctan 0 = 0$, ale ako obvykle pri goniometrických rovniciach to nestačí. Korektné riešenie sa dosiahne otázkou: Tangens akého uhla je 0? Pomocou jednotkovej kružnice a dĺžky 0 na osi y vidíme, že riešenie je 0° a 180° . Ani toto ešte nie je koniec, pretože tangens má periódu 180° , teda k výsledku je možné pridať aj ľubovoľný počet „otočiek“ o 180° . Úplný výsledok je: $\varphi = 0^\circ + k \cdot 180^\circ$ a $\varphi = 180^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}$. Avšak tieto dva zápisy predstavujú to isté, preto stačí $\varphi = k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}$.
- d. Kvôli cviku sa v tomto príklade nebudú používať stupne, ale radiány. Od oboch strán rovnice odčítame $2\sqrt{3}$, dostaneme $-\cot g(\varphi) = \sqrt{3}/3$ a vynásobíme -1, čím dostaneme $\cot g(\varphi) = -\sqrt{3}/3$. Inverznou funkciou dostaneme výsledok $\varphi = \operatorname{arc cot} g \frac{-\sqrt{3}}{3} = \frac{2\pi}{3}$, ale ako obvykle pri goniometrických rovniciach to nestačí. Korektné riešenie sa dosiahne otázkou: Kotangens akého uhla je $-\sqrt{3}/3$?

Pomocou jednotkovej kružnice a dĺžky $-\sqrt{3}/3$ na osi x vidíme, že riešenie je uhol $\varphi = \frac{2\pi}{3}$, ako aj uhol $\varphi = \frac{5\pi}{3}$. Ani toto ešte nie je koniec, pretože kotangens má periódu π , teda k výsledku je možné pridať aj ľubovoľný počet „polotáčiek“ o π . Úplný výsledok je: $\varphi = \frac{2\pi}{3} + k\pi$ a $\varphi = \frac{5\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Avšak tieto dva zápisy predstavujú to isté, preto stačí $\varphi = \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Príklad 16. Vyrieš nasledovné cyklometrické rovnice:

- a. $2 \arcsin(x) + 30^\circ = 210^\circ$ c. $50^\circ = 10^\circ - \arctan(0,01x)$
b. $20 \arccos(2x) + \pi = \pi / 2 - 3 \arccos(2x)$ d. $\pi = \pi - \operatorname{arc} \cot g(4x)$

Riešenie.

- Od oboch strán rovnice odčítame 30° , dostaneme $2 \arcsin(x) = 180^\circ$, predelíme 2 a máme $\arcsin(x) = 90^\circ$. Aplikujeme inverznú funkciu a máme výsledok $x = \sin 90^\circ = 1$. Rovnako vhodná je otázka: Sínus 90° je koľko? Tu sa nemusíme obávať ďalších riešení, pretože cyklometrické funkcie nie sú periodické.
- Kvôli cviku sa v tomto príklade nebudú používať stupne, ale radiány. π prenesieme na pravú stranu (samozrejme s opačným znamienkom) a $-3 \arccos(2x)$ na ľavú (tiež s opačným) a dostaneme $20 \arccos(2x) + 3 \arccos(2x) = \pi / 2 - \pi$. Na ľavej aj pravej strane sa dajú členy sčítať: $23 \arccos(2x) = -\pi / 2$. Predelíme 23, dostaneme $\arccos(2x) = -\pi / 46$ a aplikujeme inverznú funkciu: $2x = \cos(-\pi / 46)$. Predelíme 2 a výsledok je $x = 0,5 \cos(-\pi / 46)$. Ak by bolo potrebné, vyčíslime na kalkulačke.
- Od oboch strán rovnice odčítame 10° , dostaneme $40^\circ = -\arctan(0,01x)$, obe strany vynásobíme -1 a máme $-40^\circ = \arctan(0,01x)$. Aplikujeme inverznú funkciu a máme $0,01x = \tan(-40^\circ)$. Obe strany rovnice predelíme 0,01 a výsledok je $x = 100 \tan(-40^\circ)$. Ak by bolo potrebné, vyčíslime na kalkulačke.

- d. Na oboch stranách je π s rovnakým znamienkom, preto sa zrušia a máme $0 = -\operatorname{arc} \cot g(4x)$, čiže $\operatorname{arc} \cot g(4x) = 0$. Aplikujeme inverznú funkciu a máme $4x = \cot g(0)$. Obe strany rovnice predelíme 4 a výsledok je $x = 0,25 \cot g(0) = \infty$.

Príklad 17. Vyrieš nasledovné hyperbolické rovnice:

a. $2\sinh(x/3) = 5$

d. $-2 = -3 + \frac{\cot gh(x/5)}{2}$

b. $\cosh(2x) = 2 \cosh(x)^2 - 1$

c. $\frac{3}{\tanh(6x)} = 6$

Riešenie.

- a. Najskôr predelíme obe strany rovnice dvojkou a dostaneme $\sinh(x/3)=5/2$. Aplikujeme inverznú funkciu a dostaneme $x/3=\operatorname{argsinh}(5/2)$. Vynásobíme obe strany trojkou a výsledok je $x=3\operatorname{argsinh}(5/2)$.

Poznámka. Ak by sa niekto rozhodol pre iný postup, mohol by zadanú rovnicu $2 \sinh(x/3) = 5$ prepísať pomocou exponenciál na $2 \frac{e^{x/3} - e^{-x/3}}{2} = 5$. Dvojky sa vykrátia a ostane $e^{x/3} - e^{-x/3} = 5$. Exponenciálne rovnice riešme logaritmovaním, preto obe strany zlogaritmuje a máme $\log(e^{x/3} - e^{-x/3}) = \log 5$. Tým sme sa ale dostali do slepej uličky, pretože logaritmus rozdielu (ako aj súčtu) sa ďalej upraviť nedá.

Poznámka. Výsledok zapísaný pomocou hyperbolometrickej funkcie je možné upraviť ešte pomocou logaritmu nasledovne:

$x = 3 \arg \sinh(5/2) = 3 \ln \left(5/2 + \sqrt{(5/2)^2 + 1} \right)$. V takto zapísanom výsledku sa nám ale nič nezjednodušilo, tak či onak je na vyčíslenie potrebný počítač alebo kalkulačka.

- b. Od oboch strán rovnice odčítame $2 \cosh(2x)$, dostaneme $-\cosh(2x) = -9$, čo je to isté, ako $\cosh(2x) = 9$. Aplikujeme inverznú funkciu a dostaneme $2x = \arg \cosh 9$. Predelíme 2 a výsledok je $x = 0,5 \arg \cosh 9$. Ak by bolo potrebné, vyčíslime na kalkulačke.

- c. Obe strany rovnice vynásobíme $\tanh(6x)$ a predelíme 6, dostaneme $\frac{3}{6} = \tanh(6x)$, čiže $6x = \arg \tanh \frac{1}{2}$. Predelíme 6 a výsledok je $x = \frac{1}{6} \arg \tanh \frac{1}{2}$. Ak by bolo potrebné, vyčíslime na kalkulačke. Vynásobili sme však neznámou, preto sa treba presvedčiť, čo by sa stalo, keby bola náhodou nulová. Dosadíme teda do zadania $x = 0$ a vyjde nám $\frac{3}{\tanh(0)} = 6$. $\tanh(0) = 0$ a nula v menovateli nemá zmysel, preto žiadne riešenie sa pri vynásobení neznámou nestratilo.
- d. K oboj stranám rovnice pričítame 3 a dostaneme $\frac{\cot gh(x/5)}{2} = 1$. Vynásobíme 2 a máme $\cot gh(x/5) = 2$. Aplikujeme inverznú funkciu a dostaneme $x/5 = \tanh 2$. Obe strany vynásobíme 5 a výsledok je $x = 5 \tanh 2$. Ak by bolo potrebné, vyčíslime na kalkulačke.

Príklad 18. Vyrieš nasledovné hyperbolometrické rovnice:

- a. $3 \arg \sinh(5x - 1) = 5$
- b. $0 = \arg \cosh(3 + 2x)$
- c. $\frac{10}{\arg \tanh(30x)} + 2 = 8$
- d. $1 = 2 - \frac{10}{\arg \cot gh(x/2)}$

Riešenie.

- a. Predelíme obe strany rovnice 3, dostaneme $\arg \sinh(5x - 1) = 5/3$ a aplikujeme inverznú funkciu: $5x - 1 = \sinh(5/3)$. K oboj stranám rovnice pričítame 1, dostaneme $5x = \sinh(5/3) + 1$, predelíme 5 a výsledok je $x = \frac{1}{5}(\sinh(5/3) + 1)$.
- b. Rovno aplikujeme inverznú funkciu a dostaneme $3 + 2x = \cosh 0 = 1$. Od oboch strán rovnice odčítame 3, dostaneme $2x = -2$, predelíme 2 a výsledok je $x = -1$.
- c. Od oboch strán rovnice odčítame 2, dostaneme $\frac{10}{\arg \tanh(30x)} = 6$, vynásobíme $\arg \tanh(30x)$ a predelíme 6 a máme $\frac{5}{3} = \frac{10}{6} = \arg \tanh(30x)$. Aplikujeme inverznú

Z jednotkovej kružnice zistíme, že sú to uhly $30^\circ + k \cdot 360^\circ$ a $150^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

Riešenie teda pokračuje v dvoch: $1^\circ - x^5 = 30^\circ + k \cdot 360^\circ$ a $1^\circ - x^5 = 150^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$. Po odčítaní 1° od oboch strán rovnice a vynásobením -1 máme $x^5 = -29^\circ - k \cdot 360^\circ$ a $x^5 = -149^\circ - k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$. $+k \cdot 360^\circ$ a $-k \cdot 360^\circ$ predstavuje to isté, pretože sa jedná o „otočky“ v kladnom alebo zápornom smere, ale vždy celé, preto rovnice prepíšeme na tvary $x^5 = k \cdot 360^\circ - 29^\circ$ a $x^5 = k \cdot 360^\circ - 149^\circ, k \in \mathbb{Z}$. Odmocníme a výsledok je $x = \sqrt[5]{k \cdot 360^\circ - 29^\circ}$ a $x = \sqrt[5]{k \cdot 360^\circ - 149^\circ}, k \in \mathbb{Z}$. Netreba sa ľakať, že pod odmocninou sú aj záporné čísla, odmocnina je totiž nepárna.

- c. Od oboch strán odčítame 1, dostaneme $\sqrt[3]{\log_3(x^2 - 1)^4} = 1$. Odmocníme a máme $\log_3(x^2 - 1)^4 = \sqrt[3]{1} = 1$. Aplikujeme inverznú funkciu, teda exponenciálu a máme $3^{\log_3(x^2 - 1)^4} = 3^1$, čo je to isté, ako $(x^2 - 1)^4 = 3$. Odmocníme a máme $x^2 - 1 = \pm \sqrt[4]{3}$ (preto dva výsledky, lebo odmocnina je párna). O oboch stranách pričítame 1, dostaneme $x^2 = 1 \pm \sqrt[4]{3}$. Odmocníme a máme $x = \pm \sqrt{1 \pm \sqrt[4]{3}}$. Zdalo by sa, že sú výsledky 4, ale nie je tak, pretože pod párnou odmocninou nemôže byť záporné číslo, preto 2 výsledky sú $x = \pm \sqrt{1 + \sqrt[4]{3}}$.

Lekcia 3 – Funkcie a ich vlastnosti

Nové pojmy

- Funkcia, rovnosť funkcií, graf funkcie, súčet, rozdiel, súčin a podiel funkcií, zložená funkcia
- Rastúca, klesajúca, nerastúca, neklesajúca a monotónna funkcia, ohraničená funkcia, konvexná a konkávna funkcia, periodická funkcia, párna a nepárna funkcia, prostá funkcia
- Inverzná funkcia

Funkcia

Funkcia. Nech M a N sú číselné množiny. Zobrazenie f , ktoré každému prvku $x \in M$ priradí práve jeden prvok z množiny N , je funkcia. Množina M sa volá definičný obor funkcie f (označuje sa $D(f)$), množina $N=f(M)$ sa volá obor hodnôt funkcie f (označuje sa $H(f)$). Označenie funkcie ako zobrazenia: $f : M \rightarrow N$.

Poznámka. Podľa toho, aké sú číselné množiny M a N , poznáme rôzne funkcie. Napríklad $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ je postupnosť, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je reálna funkcia reálnej premennej, $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ je reálna funkcia komplexnej premennej a podobne.

Poznámka. Niekedy sa z definície nerozumie, čo to vlastne ten definičný obor a obor hodnôt je. V niektorých prípadoch je definičný obor zadáný, v tom prípade máme oblasť výskytu funkcie predpísanú. Keď nie je zadáný, vyplýva z predpisu funkcie. Treba si uvedomiť, že definičný obor je všetko to, čo má zmysel do predpisu dosadiť. Obvykle je to množina všetkých reálnych čísel, ale v prípade odmocnín len nezáporné čísla, v prípade logaritmov kladné a podobne. Obor hodnôt je potom všetko to, čo mi môže z funkcie vyjsť.

Rovnosť funkcií. Funkcie $f(x)$ a $g(x)$ sa rovnajú vtedy a len vtedy, keď sú definované na tej istej množine M a pre $\forall x \in M : f(x) = g(x)$.

Poznámka a časté chyby. Za rovnajúce sa funkcie sa niekedy považujú aj tie funkcie, ktoré vyzerajú podobne, ale jedna je definovaná na inej množine. To je chyba, definované musia byť na tej istej množine.

Graf funkcie. Graf funkcie, definovanej na množine M , je množina všetkých usporiadaných dvojíc $[x, f(x)]$.

Súčet (rozdiel) funkcií. Nech je funkcia $f(x)$ definovaná na množine M_1 a funkcia $g(x)$ definovaná na množine M_2 . Ich súčet (rozdiel) je funkcia definovaná na množine $M_1 \cap M_2$ takto: $(f \pm g)x = f(x) \pm g(x)$.

Súčin funkcií. Nech je funkcia $f(x)$ definovaná na množine M_1 a funkcia $g(x)$ definovaná na množine M_2 . Ich súčin je funkcia definovaná na množine $M_1 \cap M_2$ takto: $(fg)x = f(x)g(x)$.

Podiel funkcií. Nech je funkcia $f(x)$ definovaná na množine M_1 a funkcia $g(x)$ definovaná na množine M_2 . Ich podiel je funkcia definovaná na množine $M_1 \cap M_2$ takto: $(f/g)x = f(x)/g(x)$ tam, kde $g(x) \neq 0$.

Poznámka a časté chyby. Ľudia sa často nevedia rozhodnúť, či je súčet (rozdiel, súčin, podiel) funkcií definovaný na prieniku alebo na zjednotení množín. Vždy je to na prieniku, pretože pri týchto operáciách sa definičný obor nemôže rozšíriť. Funguje to tak, že jedna funkcia svojim definičným oborom „vyhryzne“ časť definičného oboru druhej funkcie. Pri podiele funkcií sa niekedy ide mechanicky a zabúda sa na prípad, kedy $g(x) = 0$.

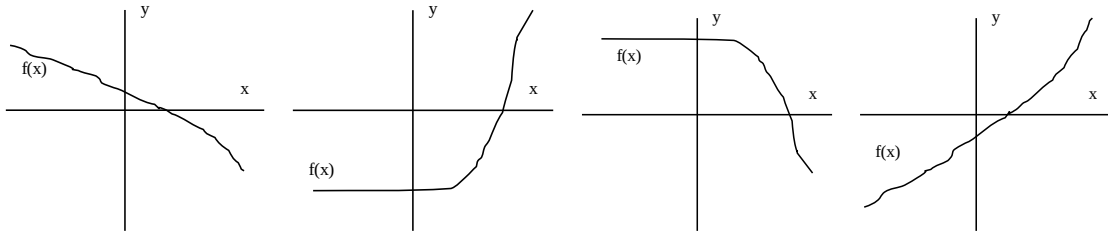
Zložená funkcia. Zložená funkcia $h(x)$ je taká funkcia, ktorá je argumentom inej funkcie, teda $h(x) = f(x) \circ g(x) = (f \circ g)x = f(g(x))$.

Vlastnosti funkcií

Rastúca (klesajúca) funkcia (Obr. 1). Nech je funkcia $f(x)$ definovaná na množine M . Ak pre $\forall x_1, x_2 \in M$ také, že pre $x_1 < x_2$ platí, že $f(x_1) < f(x_2)$ (prípadne $f(x_1) > f(x_2)$), funkcia sa volá rastúca (prípadne klesajúca).

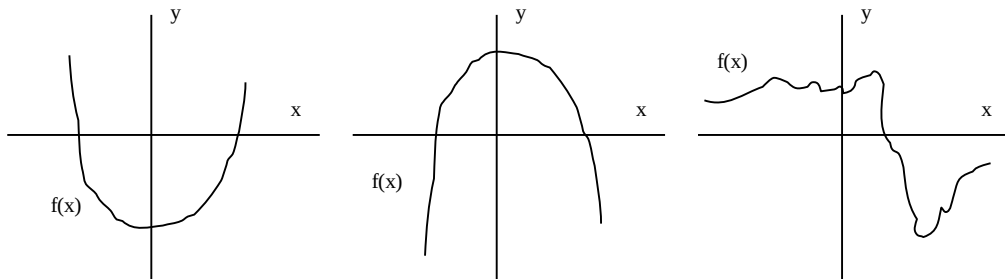
Poznámka. Ak sa pripustia aj neostre nerovnosti, funkcia sa volá nerastúca (prípadne neklesajúca).

Monotónna funkcia (Obr. 1). Spoločný názov pre rastúcu, klesajúcu, nerastúcu a neklesajúcu funkciu je funkcia monotónna.



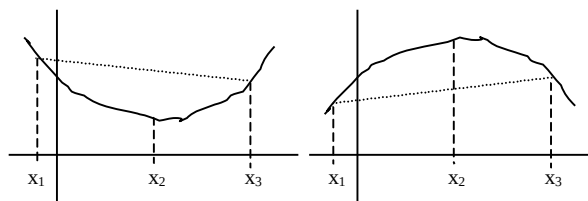
Obr. 1. Monotónne funkcie. Zľava: Klesajúca funkcia, neklesajúca funkcia, nerastúca funkcia a rastúca funkcia.

Ohraničená funkcia (Obr. 2). Ak existuje také číslo k , pre ktoré platí, že $f(x) < k$ (prípadne $f(x) > k$) pre $\forall x \in M$, funkcia sa volá ohraničená zhora (prípadne zdola). Ak je funkcia ohraničená zhora aj zdola, volá sa ohraničená.



Obr. 2. Zľava: Zdola ohraničená funkcia, zhora ohraničená funkcia a ohraničená funkcia.

Konvexná a konkávna funkcia (Obr. 3). Nech je funkcia $f(x)$ definovaná na intervale I . Ak pre ľubovoľné tri body $x_1 < x_2 < x_3$ z intervalu I platí, že bod $[x_2; f(x_2)]$ leží pod úsečkou, spájajúcou body $[x_1; f(x_1)]$ a $[x_3; f(x_3)]$, funkcia je rýdzo konvexná. Ak leží nad úsečkou, funkcia je rýdzo konkávna.

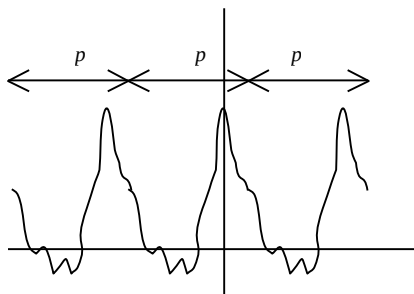


Obr. 3. Vľavo: Rýdzo konvexná funkcia. Vpravo: Rýdzo konkávna funkcia.

Poznámka. Je zaujímavé, že v geografii sa konvexná a konkávna funkcia definuje presne opačne ako v matematike. Táto nejednoznačnosť a zmätok sú spôsobené historickým vývojom, preto si pri riešení praktických úloh treba dobre premyslieť, čo sa myslí pod konkávnym a čo pod konvexným tvarom.

Poznámka. Ak pripúšťame možnosť, že bod leží pod úsečkou alebo na nej, funkcia je „len“ konvexná. Ak leží nad úsečkou alebo na nej, funkcia je „len“ konkávna.

Periodická funkcia (Obr. 4). Nech je funkcia $f(x)$ definovaná na množine M . Nech $p \in \mathbb{R}^+$. Ak pre $\forall x \in M$ platí, že $f(x) = f(x + p)$, funkcia je periodická. Číslo p sa volá perióda funkcie.

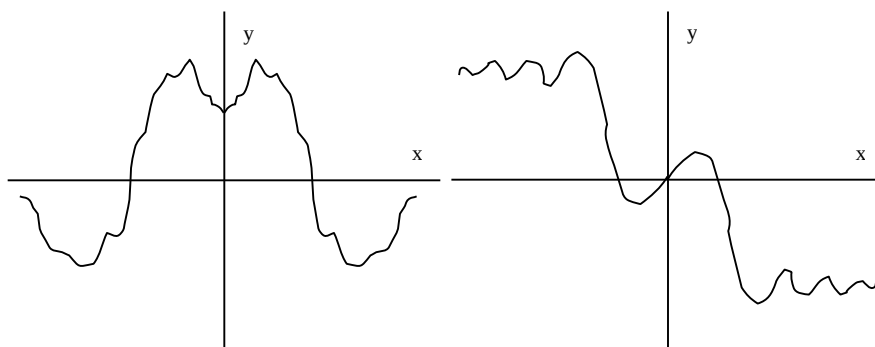


Obr. 4. Periodická funkcia s periódou p .

Poznámka. Z definície periodickej funkcie vidno, že aj p je perióda, tak aj $2p$, $3p$... sú periódy. Dohoda je taká, že pod periódou sa rozumie najmenšia perióda.

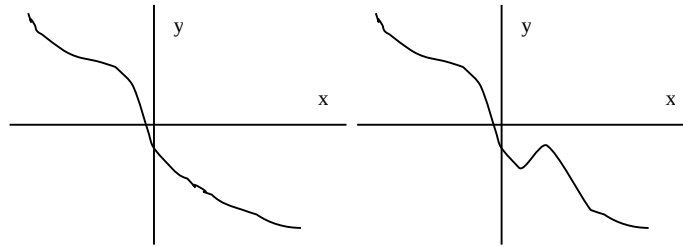
Párna funkcia (Obr. 5). Nech je funkcia $f(x)$ definovaná na množine M . Ak pre $\forall x \in M$ platí, že $f(x) = f(-x)$, funkcia je párna. Je to teda taká funkcia, ktorá je symetrická podľa osi y .

Nepárna funkcia (Obr. 5). Nech je funkcia $f(x)$ definovaná na množine M . Ak pre $\forall x \in M$ platí, že $f(x) = -f(-x)$, funkcia je nepárna. Je to teda taká funkcia, ktorá je symetrická podľa stredu súradnicovej sústavy.



Obr. 5. Vľavo: Párna funkcia (symetrická podľa osi y). Vpravo: Nepárna funkcia (symetrická podľa stredu).

Prostá funkcia (Obr. 6). Nech je funkcia $f(x)$ definovaná na množine M . Funkcia je prostá, ak pre $\forall x_1, x_2 \in M; x_1 \neq x_2 : f(x_1) \neq f(x_2)$. Je to teda taká funkcia, ktorú ľubovoľná priamka rovnobežná s osou x pretne nanajvýš raz.

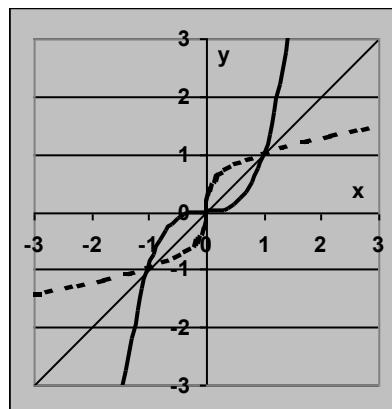


Obr. 6. Vľavo: Prostá funkcia. Vpravo: Neprostá funkcia.

Inverzná funkcia

Inverzná funkcia. Nech je prostá funkcia $y = f(x)$ definovaná na množine M . Funkcia $f^{-1}(y) = x$, definovaná na množine N , sa volá inverzná funkcia k funkcii f .

Poznámka. Funkcie $y = f(x)$ a $f^{-1}(y) = x$ sú súmerne združené podľa priamky $y = x$.

Obr. 7. Funkcia a k nej inverzná sú symetrické podľa priamky $y = x$.

Poznámka a časté chyby. Pri hľadaní inverznej funkcie ľudia často postupujú mechanicky a nevšimnú si, že funkcia nie je prostá. Toto nie je možné, pretože po inverzii by nevznikla funkcia, na grafe by sa objavili dva body nad sebou. Ako sa uvidí ďalej, k niektorým funkciám, ako napríklad k funkcii sínus, poznáme inverznú funkciu arkus sínus. Prísne vzaté k funkcii sínus neexistuje inverzná funkcia, pretože nie je prostá. Skutočnosť je taká, že funkcia arkus sínus je inverzná funkcia k funkcii sínus, definovanej na intervale $(-\pi/2; \pi/2]$. Presne takto sa to v praxi robí. Ak chceme vytvoriť inverznú funkciu k neprostej funkcii, najskôr okrešeme definičný obor tak, aby sa funkcia stala prostou a až potom vytvoríme funkciu inverznú.

Príklady

Príklad 20. Ktoré z nasledovných predpisov predstavujú funkciu? Ktoré sú prosté?

a. $y = 2x^5 - 5$

b. $f(x) = 123$

c. $g(y) = x^2 - x + \sin x$

d.

x	1	2	-5	7	1.5
y	-5	0	0.2	10	1

e.

x	1	2	-5	7	1.5
y	-5	2	0.2	10	1

f.

x	1	2	-5	2	1.5
y	-5	0	0.2	10	1

Riešenie. Funkcie sú všetky okrem prípadu f, pretože dvojke sú priradené dve rôzne hodnoty. Prostá je v prípade a a d.

Príklad 21. Ktoré funkcie sa rovnajú?

a. $y = 2x^5 - 5, x \in \mathbb{R}$

b. $y = 2x^5 - 5, x \in \mathbb{N}$

c. $y = -5 + 2x^5, x \in \mathbb{R}$

d. $y = 2x^5 - 5, x \in \mathbb{R} \cap \mathbb{N}$

e.

x	1	2	-5	7	1.5
y	-5	0	0.2	10	1

f.

x	1	-5	2	1.5	7
y	-5	0.2	0	1	10

Riešenie. Funkcie v prípadoch a a c sa rovnajú, pretože definičný obor aj funkcia sú rovnaké. To, že členy sú prehodené, nemá na funkciu vplyv. Funkcie v prípadoch b a d sa tiež rovnajú, pretože $\mathbb{R} \cap \mathbb{N} \equiv \mathbb{N}$, teda aj definičný obor majú rovnaký. Funkcie v prípadoch e a f sa tiež rovnajú. To, že jednotlivé hodnoty sú uvedené v rôznom poradí, nemá na funkciu vplyv.

Príklad 22. Zistite definičný obor funkcií.

a. $y = 2x^5 - 5$

b. $f(x) = 123$

c. $y = \sqrt{x+1}$

d. $y = \sqrt{x^2 + 1}$

e. $y = \sqrt{x^2 - 4}$

f. $f(x) = \log(2x + 3)$

g. $y = \log \sqrt{x}$

h. $y = \sqrt{\log x}$

Riešenie.

- a. Dosadiť je možné čokoľvek, preto $D(y) = \mathbb{R}$. Možné výsledky tiež pokrývajú všetky reálne čísla, preto $H(y) = \mathbb{R}$.
- b. Dosadiť je možné čokoľvek, na výsledok to nemá vplyv, preto $D(f) = \mathbb{R}$. Výsledok je jediný možný, a to hodnota 123, preto $H(f) = 123$.
- c. Pod odmocninou môžu byť iba nezáporné čísla, preto riešime rovnicu $x + 1 \geq 0$. Z toho vyplýva, že $D(y) = \langle 1; \infty \rangle$. Naopak, neexistuje číslo, ktoré by nemohlo byť výsledkom, preto $H(y) = \mathbb{R}$.
- d. Pod odmocninou môžu byť iba nezáporné čísla, preto riešime rovnicu $x^2 + 1 \geq 0$. Lenže to je vždy, preto $D(y) = \mathbb{R}$. Znova neexistuje číslo, ktoré by nemohlo byť výsledkom, preto $H(y) = \mathbb{R}$.
- e. Pod odmocninou môžu byť iba nezáporné čísla, preto riešime rovnicu $x^2 - 4 \geq 0$. Z toho vyplýva, že $|x| \geq 2$, preto $D(y) = (-\infty; -2] \cup [2; \infty)$. Znova neexistuje číslo, ktoré by nemohlo byť výsledkom, preto $H(y) = \mathbb{R}$.
- f. Logaritmus má zmysel len pre kladné čísla, preto riešime rovnicu $2x + 3 > 0$. Z toho vyplýva, že $D(f) = (1.5; \infty)$. Znova neexistuje číslo, ktoré by nemohlo byť výsledkom, preto $H(f) = \mathbb{R}$.
- g. Logaritmus má zmysel len pre kladné čísla, preto riešime rovnicu $\sqrt{x} > 0$. Z toho vyplýva, že $D(y) = \mathbb{R}^+$. Znova neexistuje číslo, ktoré by nemohlo byť výsledkom, preto $H(y) = \mathbb{R}$.
- h. Odmocnina má zmysel len pre nezáporné čísla, preto riešime rovnicu $\log x \geq 0$. Z toho vyplýva, že $D(y) = \langle 1; \infty \rangle$. Keď budeme dosadzovať hodnoty z definičného oboru, zistíme, že akékoľvek kladné číslo vyjsť môže, ale záporné žiadne. Pri dosadení nuly vyjde nula, preto $H(y) = \mathbb{R}^+$.

Príklad 23. Z daných funkcií vytvorte zloženú funkciu.

- a. $f(x) = x^2$, $g(x) = \sin x$
- b. $f(x) = 2 \log x$, $g(x) = 5 \cos x$
- c. $f(x) = x^x$, $g(x) = \tan x$
- d. $f(x) = 12$, $g(x) = 5e^{2x} - 6$
- e. $f(x) = x^2$, $g(x) = \sin x$, $h(x) = \sqrt{x}$

Riešenie.

- a. $f \circ g = (\sin x)^2$, $g \circ f = \sin x^2$
- b. $f \circ g = 2 \log(5 \cos x)$, $g \circ f = 5 \cos(2 \log x)$
- c. $f \circ g = (\tan x)^{\tan x}$, $g \circ f = \tan x^x$
- d. $f \circ g = 12$, $g \circ f = 5e^{24} - 6$
- e. $f \circ g \circ h = (\sin \sqrt{x})^2$, $f \circ h \circ g = (\sqrt{\sin x})^2 = |\sin x|$, $g \circ f \circ h = \sin(\sqrt{x})^2 = \sin|x|$,
 $g \circ h \circ f = \sin(\sqrt{x^2}) = \sin|x|$, $h \circ f \circ g = \sqrt{(\sin x)^2} = |\sin x|$, $h \circ g \circ f = \sqrt{\sin x^2}$

Príklad 24. Vytvorte súčet, rozdiel, súčin a podiel funkcií.

- a. $f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 6, x \in (-1; 10)$
- b. $f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \log x, x \in (1; 2)$
- c. $f(x) = \tan x^2, x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \log x, x \in (-1; 0)$
- d. $f(x) = \sqrt{x+6}, x \in (-5; 1)$, $g(x) = e^x, x \in (5; 6)$

Riešenie.

- a. $f + g = x^2 + 6$, $f - g = x^2 - 6$, $fg = 6x^2$, $f / g = x^2 / 6$. V týchto štyroch prípadoch $D = (-1; 10)$. V prípade $g / f = 6 / x^2$ sa definičný obor musí oklieštiť ešte aj o nulu, pretože tá v menovateli nemôže byť, preto tu $D = (-1; 10) - \{0\}$.

- b. $f + g = \sin x + \log x$, $f - g = \sin x - \log x$, $fg = \sin x \cdot \log x$, $f / g = \sin x / \log x$. V týchto štyroch prípadoch $D = \langle 1; 2 \rangle$. V prípade $g / f = \log x / \sin x$ sa definičný obor musí oklieštiť ešte aj o hodnotu $\pi/2$, pretože tu funkcia sínus nadobúda nulu. Preto tu $D = \langle 1; 2 \rangle - \{\pi / 2\}$.
- c. Nie je možné nič vytvoriť, pretože pre funkciu logaritmus máme predpísaný definičný obor $\langle -1; 0 \rangle$, ale funkcia logaritmus je definovaná len pre kladné čísla.
- d. Nie je možné nič vytvoriť, pretože definičné obory majú prázdny prienik, výsledná funkcia nie je nikde definovaná.

Príklad 25. Ktorá funkcia je periodická a akú má periódu?

- a. $y = 2x + 3$ b. $y = 3x^2 - 3$

Riešenie.

- a. Riešime rovnicu $2x + 3 = 2(x + p) + 3$. Z toho vyplýva $p = 0$, teda funkcia nie je periodická.
- b. Riešime rovnicu $3x^2 + 3 = 3(x + p)^2 + 3$. Z toho vyplýva $2xp + p^2 = 0$, ale p musí byť konštanta, nesmie byť funkciou x . Teda funkcia nie je periodická.

Príklad 26. Ktorá funkcia je párna?

- a. $f(x) = x^2 + 8$ b. $f(x) = (x - 2)^2 + 8$

Riešenie.

- a. Ak má byť funkcia párna, muselo by platiť $f(x) = f(-x)$, teda $x^2 + 8 = (-x)^2 + 8$. Z toho vyplýva $x^2 = x^2$, čo je identita, preto funkcia je naozaj párna.
- b. Ak má byť funkcia párna, muselo by platiť $f(x) = f(-x)$, teda $(x-2)^2 + 8 = (-x-2)^2 + 8$. Z toho vyplýva $-2x = 2x$, čo nie je platné pre všetky x , preto funkcia párna nie je.

Príklad 27. Ktorá funkcia je nepárna?

- a. $f(x) = x^3$ b. $f(x) = x^3 + 3$

Riešenie.

- a. Ak má byť funkcia nepárna, muselo by platiť $f(x) = -f(-x)$, teda $x^3 = -(-x)^3$. Z toho vyplýva $x^3 = x^3$, čo je identita, preto funkcia je naozaj nepárna.
- b. Ak má byť funkcia nepárna, muselo by platiť $f(x) = -f(-x)$, teda $x^3 + 3 = -((-x)^3 + 3)$. Z toho vyplýva $3 = -3$, čo nie je pravda, preto funkcia nepárna nie je.

Príklad 28. Nájdí inverznú funkciu k daným funkciám.

- | | |
|----------------------|----------------------------|
| a. $y = x^3$ | e. $y = \frac{6}{x} + 11$ |
| b. $y = x + 10$ | |
| c. $y = 1 + \log 2x$ | f. $y = \frac{2}{x^{800}}$ |
| d. $y = 3^x - 2$ | |

Riešenie.

- a. $x = \sqrt[3]{y}$. Tu by niekto mohol tvrdiť, že je potrebné zmenšiť definičný obor na $y \in \mathbb{R}_0^+$, aby pod odmocninou neboli záporné čísla. Ale to nie je potrebné, pretože sa jedná o nepárnu odmocninu a tá sa dá vypočítať aj pre záporné čísla. Dnešné počítače ju vedia vypočítať, ale staršie kalkulačky vyhadzovali chybu.
- b. $x = y - 10$
- c. $x = \frac{1}{2}10^{y-1}$. Tu je zaujímavé, že definičný obor pôvodnej funkcie je kladné reálne čísla, ale definičný obor inverznej funkcie je všetky reálne čísla.
- d. $y + 2 = 3^x$, potom zlogaritmujeme obe strany rovnice a vyjde $\log(y + 2) = \log 3^x = x \log 3$, preto $x = \frac{\log(y + 2)}{\log 3}$. Tu je zaujímavé, že definičný obor pôvodnej funkcie sú všetky reálne čísla, ale definičný obor inverznej funkcie je reálne čísla väčšie ako 2.
- e. $x = \frac{6}{y - 11}$. Tu je zaujímavé, že definičný obor pôvodnej funkcie je $\mathbb{R} - \{0\}$, ale definičný obor inverznej funkcie je $\mathbb{R} - \{11\}$.

f. $x = \sqrt[800]{\frac{2}{y}}$

Lekcia 4 – Funkcie a ich grafy

Nové pojmy

- a. Elementárna funkcie, konštanta, lineárna, mocninová, exponenciálna, logaritmická, goniometrické, cyklometrické, hyperbolické a hyperbolometrické funkcie

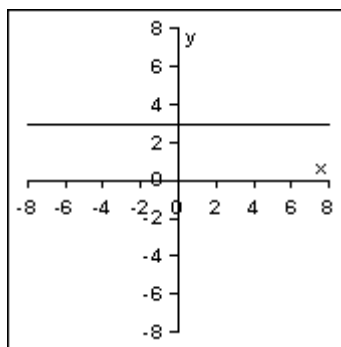
Elementárne funkcie

Úvod. Rôzni autori chápu za elementárne funkcie rôzne. Za elementárne funkcie budeme považovať tieto funkcie:

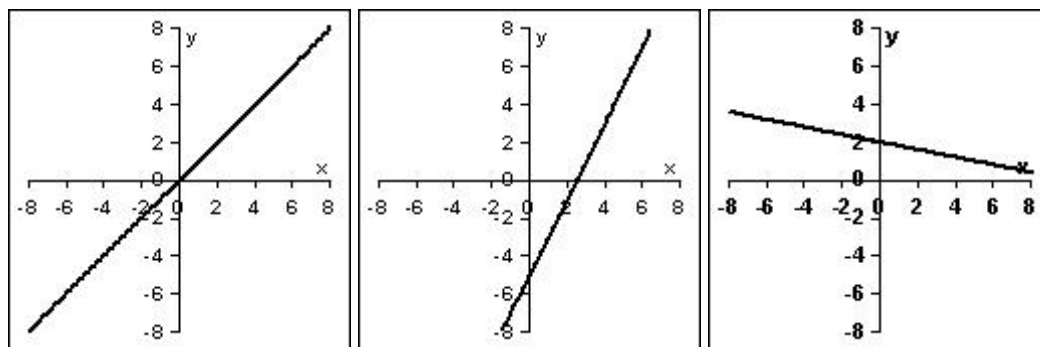
- a. Konštanta
- b. Lineárna
- c. Mocninová
- d. Exponenciálna
- e. Logaritmická
- f. Goniometrické
- g. Cyklometrické
- h. Hyperbolické
- i. Hyperbolometrické

Poznámka. V niektorých knihách sa píše, že logaritmickú funkciu nie je možné považovať za elementárnu, pretože je to inverzná funkcia k exponenciálnej. V podobnom vzťahu sú aj goniometrické funkcie k cyklometrickým a hyperbolické k hyperbolometrickým. Niektorí autori dokonca hovoria, že takáto „oklieštená“ sada funkcií sa volá základné elementárne funkcie a všetky funkcie, ktoré sme z nich schopní vytvoriť pomocou operácií súčtu, rozdielu, súčinu, podielu a pomocou skladania funkcií, sa volajú elementárne. Nebudem do tejto nejednoty vnášať ďalší chaos. Zavediem iba pojem elementárne funkcie, kam bude patriť uvedených 9 typov.

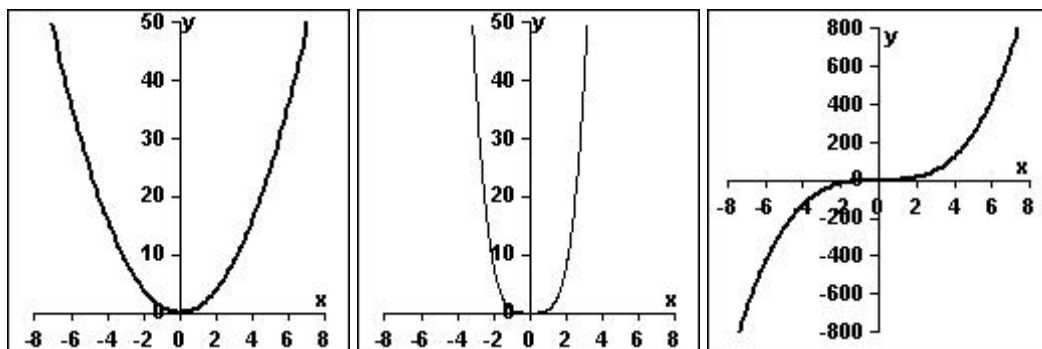
Konštantná funkcia (konštanta) (Obr. 8). Konštantná funkcia (konštanta) je daná predpisom $y = c$, $x \in \mathbb{R}$. Je to teda taká funkcia, ktorá sa nemení.

Obr. 8. $y = 3$.

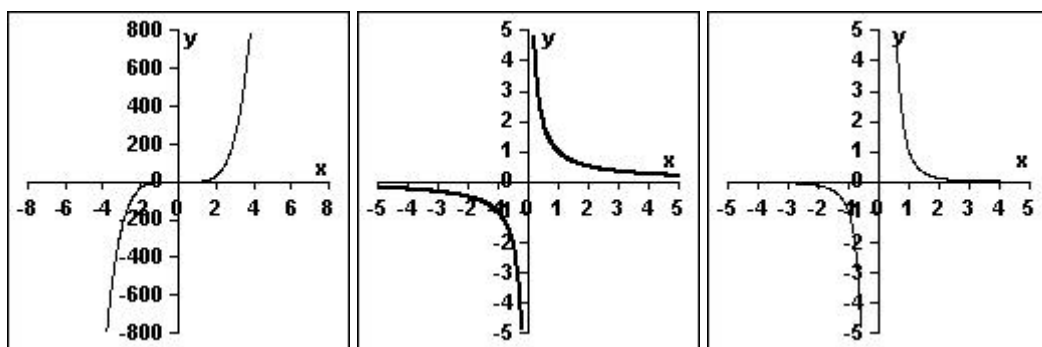
Lineárna funkcia (Obr. 9). Lineárna funkcia je daná predpisom $y = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. a, b sú konštanty, ktoré ovplyvňujú polohu a sklon funkcie. Kladné (záporné) b posúva funkciu nahor (nadol). Pre kladné (záporné) a je funkcia rastúca (klesajúca). Čím je a ďalej od nuly, tým je funkcia „roztiahnutejšia“ v zvislom smere.

Obr. 9. Vľavo: $y = x$. V strede: $y = 2x - 5$. Vpravo: $y = -0,2x + 2$.

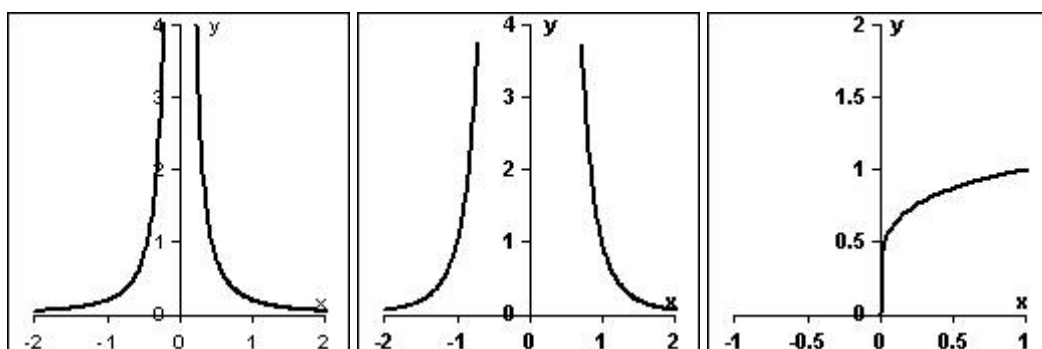
Mocninová funkcia (Obr. 10 až Obr. 13). Mocninová funkcia je daná predpisom $y = ax^b + c$. $a, c \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{Z} \cup (0;1)$. a, b, c sú konštanty, ktoré ovplyvňujú polohu a tvar funkcie. Čím je a ďalej od nuly, tým je funkcia „roztiahnutejšia“ v zvislom smere. Dve konštanty a , ktoré majú rovnakú absolútnu hodnotu, ale líšia sa znamienkom, vytvoria funkcie symetrické podľa osi x . Kladné (záporné) c posúva funkciu nahor (nadol). Konštanta b zodpovedá za tvar funkcie a má niekoľko podôb. Pre kladné párne b je to funkcia „parabolového“ typu, pre kladné nepárne $b > 1$ je to funkcia „kubického“ typu, pre záporné párne b je to funkcia „komínového“ typu a pre záporné nepárne b je to funkcia „hyperbolového“ typu. Inak je to pri necelých hodnotách konštanty b . Pre $b \in (0;1)$ je to funkcia „odmocninového“ typu.



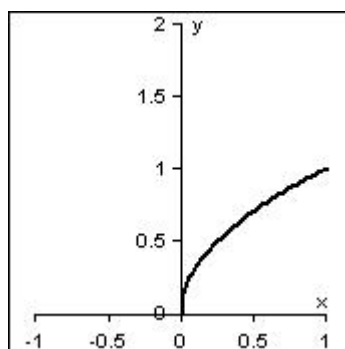
Obr. 10. Vľavo: $y = x^2$. V strede: $y = 0,5x^4$. Vpravo: $y = 2x^3$.



Obr. 11. Vľavo: $y = x^5$. V strede: $y = x^{-1}$. Vpravo: $y = x^{-3}$.



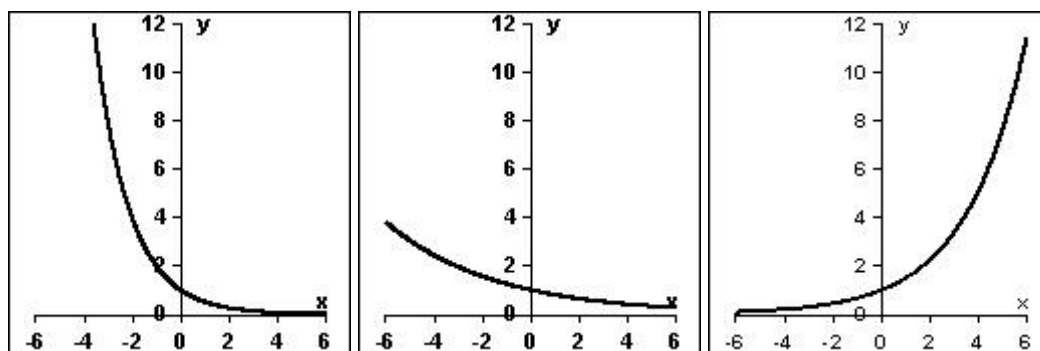
Obr. 12. Vľavo: $y = 0,2x^{-2}$. V strede: $y = x^{-4}$. Vpravo: $y = x^{0,2}$.



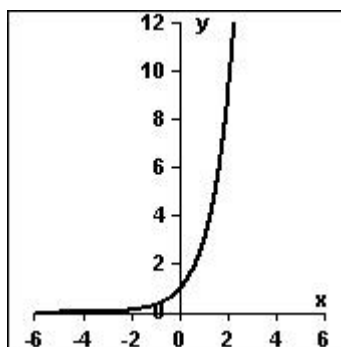
Obr. 13. $y = x^{0,5}$

Poznámka. Mocninová funkcia sa niekedy definuje inak. Jej predpis je rovnaký, ale definičný obor konštanty b býva rôzny. Niekedy sa pripúšťa $b \in \mathbb{R}^+$, niekedy aj $b \in \mathbb{R}$, ale potom je potrebné si uvedomiť, že definičný obor samotnej mocninovej funkcie je výrazne závislý od hodnoty konštanty b .

Exponenciálna funkcia (Obr. 14 až Obr. 15). Exponenciálna funkcia je daná predpisom $y = ab^x + c$, $a, c \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^+$. Čím je a ďalej od nuly, tým je funkcia „roztiahnutejšia“ v zvislom smere. Dve konštanty a , ktoré majú rovnakú absolútnu hodnotu, ale líšia sa znamienkom, vytvoria funkcie symetrické podľa osi x . Kladné (záporné) c posúva funkciu nahor (nadol). Konštantu b zodpovedá za strmosť a sklon funkcie. Pre $b \in (0;1)$ je funkcia klesajúca, pre $b > 1$ rastúca.



Obr. 14. Vľavo: $y = 0,5^x$. V strede: $y = 0,8^x$. Vpravo: $y = 1,5^x$.



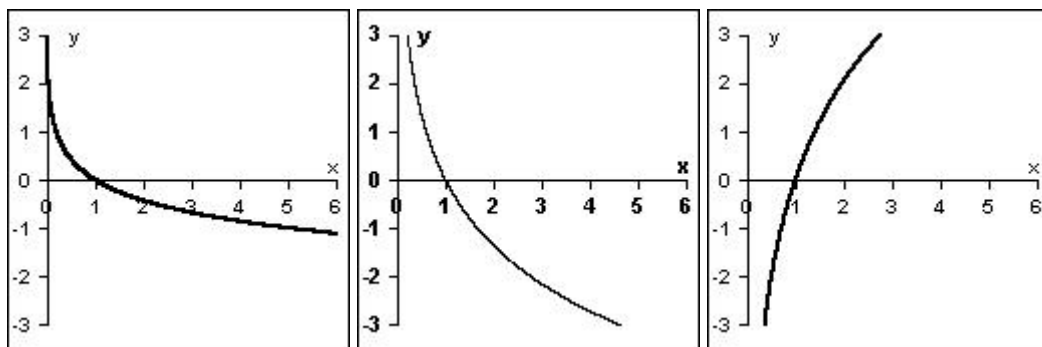
Obr. 15. $y = 3^x$.

Poznámka. Exponenciálna funkcia sa niekedy definuje inak. Jej predpis je rovnaký, ale definičný obor konštanty b býva rôzny. Niekedy sa pripúšťa aj $b \in \mathbb{R}$, ale potom je potrebné si uvedomiť, že definičný obor samotnej mocninovej funkcie je výrazne závislý od hodnoty konštanty b .

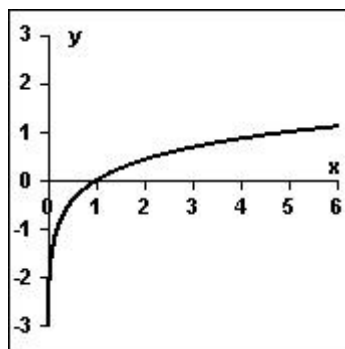
Poznámka. Exponenciálna funkcia sa v prírode a praxi najčastejšie vyskytuje v tvare $y = e^x$, kde $e \approx 2,7182818284590...$ je takzvané Eulerovo číslo. Je iracionálne.

Poznámka. Exponenciálna funkcia sa okrem zápisu $y = e^x$ niekedy zvykne označovať aj $y = \exp(x)$.

Logaritmická funkcia (Obr. 16 až Obr. 17). Logaritmická funkcia je inverzná k exponenciálnej. Je daná predpisom $y = a \log_b x + c$, $a, c \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$. Čím je a ďalej od nuly, tým je funkcia „rozťahnutejšia“ v zvislom smere. Dve konštanty a , ktoré majú rovnakú absolútnu hodnotu, ale líšia sa znamienkom, vytvoria funkcie symetrické podľa osi x . Kladné (záporné) c posúva funkciu nahor (nadol). Konštanta b sa nazýva základ logaritmu. Pre $b \in (0;1)$ je funkcia klesajúca, pre $b > 1$ rastúca.



Obr. 16. Vľavo: $y = \log_{0,2} x$. V strede: $y = \log_{0,6} x$. Vpravo: $y = \log_{1,4} x$.

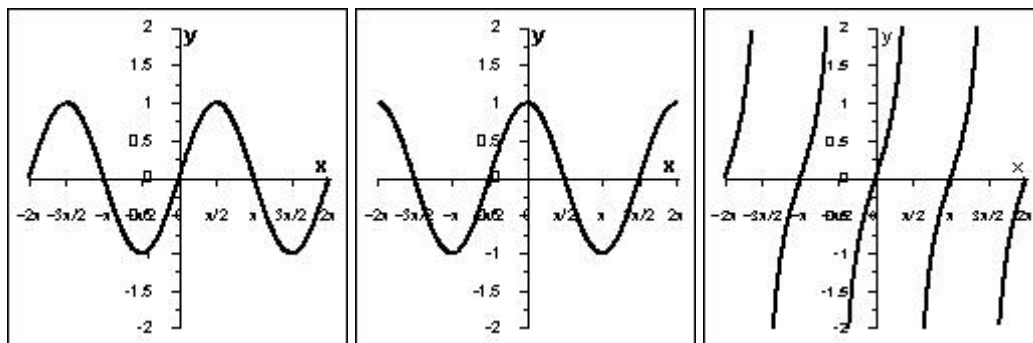


Obr. 17. $y = \log_5 x$.

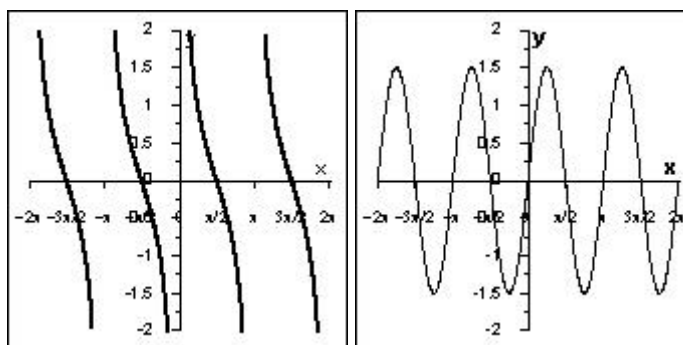
Poznámka. Logaritmická funkcia sa v prírode a praxi najčastejšie vyskytuje v tvare $y = \log_e x = \ln x$, kde je Eulerovo číslo. Tento logaritmus sa nazýva prirodzený. V prípade, že sa vyskytuje tvar $y = \log x$ bez základu, myslí sa základ 10. Tento logaritmus sa nazýva dekadický.

Goniometrické funkcie (Obr. 18 až Obr. 19). Goniometrické funkcie sú dané predpismi $y = a \sin(bx) + c$, $y = a \cos(bx) + c$, $y = a \tan(bx) + c$, $y = a \cotg(bx) + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. Čím je a ďalej od nuly, tým je funkcia „rozťahnutejšia“ v zvislom smere.

Dve konštanty a , ktoré majú rovnakú absolútnu hodnotu, ale líšia sa znamienkom, vytvoria funkcie symetrické podľa osi x . Kladné (záporné) c posúva funkciu nahor (nadol). Pre vyššie konštanty b je funkcia „spučenějšía“ vo vodorovnom smere, pre nižšie hodnoty „rozťahnutejšia“.

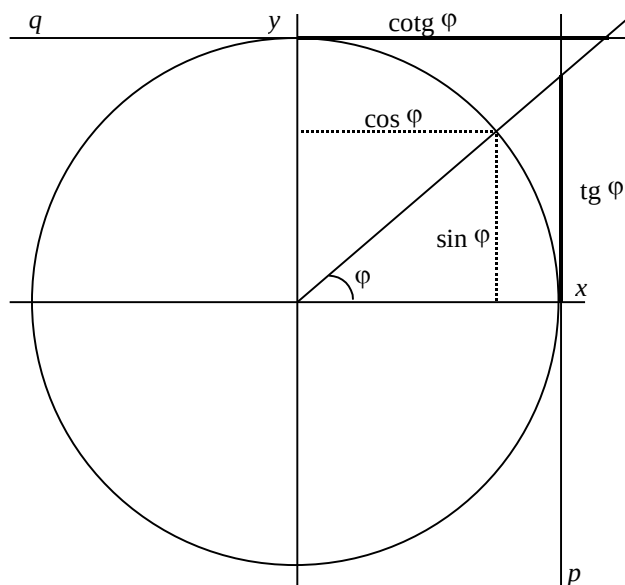


Obr. 18. Vľavo: $y = \sin x$. V strede: $y = \cos x$. Vpravo: $y = \tan x$.



Obr. 19. Vľavo: $y = \cotg x$. Vpravo: $y = 1.5 \sin(2x)$.

Poznámka. Mnoho textov o trigonometrii definuje funkcie sínus, kosínus, tangens a kotangens pomocou tzv. jednotkovej kružnice. Jednotková kružnica je taká kružnica, ktorej polomer je jedna jednotka (nie je podstatné, aká, môže to byť 1 cm, ale aj 1 km podľa toho, v čom meriame). Nakreslíme jednotkovú kružnicu a jej stred umiestnime do počiatku súradnicovej sústavy x, y (Obr. 20).



Obr. 20. Jednotková kružnica, vyšetovaný uhol φ a goniometrické funkcie pre tento uhol.

Ku kružnici zostrojíme dotyčnicu p v bode $[1,0]$ a dotyčnicu q v bode $[0,1]$. Od kladného smeru osi x v kladnom smere (proti smeru hodinových ručičiek) nanesieme uhol φ , ktorého sínus (kosínus, tangens, kotangens) chceme vypočítať. Z obrázka je zrejmé, o ktoré dĺžky sa jedná, ale uveďme tieto definície aj slovne:

Sínus uhla φ je y -ová súradnica priesečníku sprievodiča tohto uhla s jednotkovou kružnicou.

Kosínus uhla φ je x -ová súradnica priesečníku sprievodiča tohto uhla s jednotkovou kružnicou.

Tangens uhla φ je y -ová súradnica priesečníku sprievodiča tohto uhla s dotyčnicou k jednotkovej kružnici zostrojenej v bode $[1,0]$.

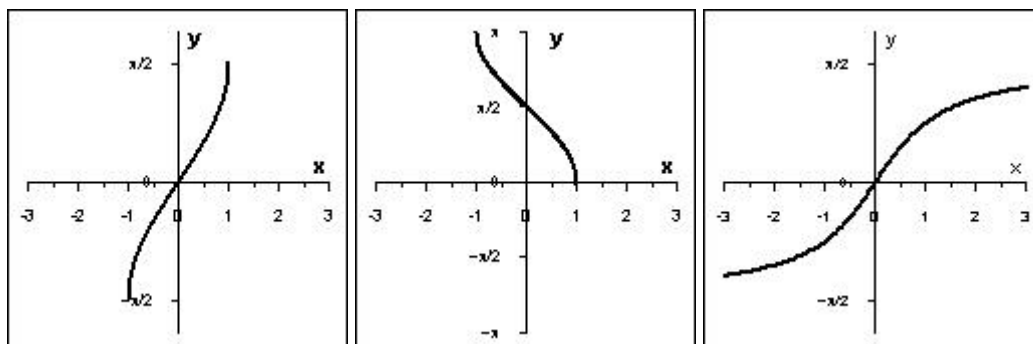
Kotangens uhla φ je x -ová súradnica priesečníku sprievodiča tohto uhla s dotyčnicou k jednotkovej kružnici zostrojenej v bode $[0,1]$.

Poznámka. Teraz je tiež jasné, odkiaľ sa vzali názvy pre tangens a kotangens. Vyplýva to z ich definície pomocou dotyčníc (tangent - dotyčnica).

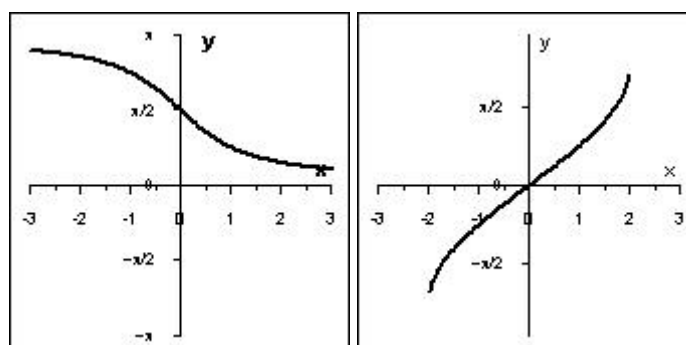
Poznámka. Je zaujímavé, že by stačilo definovať funkciu sínus, pretože ostatné tri sú z nej odvodené. Vzťahy sú nasledovné: $\cos x = \sin(90^\circ - x)$, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ a

$$\cotg x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Cyklometrické funkcie (Obr. 21 až Obr. 22). Cyklometrické funkcie sú inverzné ku goniometrickým. Sú dané predpismi $y = a \arcsin(bx) + c$, $y = a \arccos(bx) + c$, $y = a \arctan(bx) + c$, $y = a \operatorname{arccotg}(bx) + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. Čím je a ďalej od nuly, tým je funkcia „roztiahnutejšia“ v zvislom smere. Dve konštanty a , ktoré majú rovnakú absolútnu hodnotu, ale líšia sa znamienkom, vytvoria funkcie symetrické podľa osi x . Kladné (záporné) c posúva funkciu nahor (nadol). Pre vyššie konštanty b je funkcia „spučenejšia“ vo vodorovnom smere, pre nižšie hodnoty „roztiahnutejšia“.

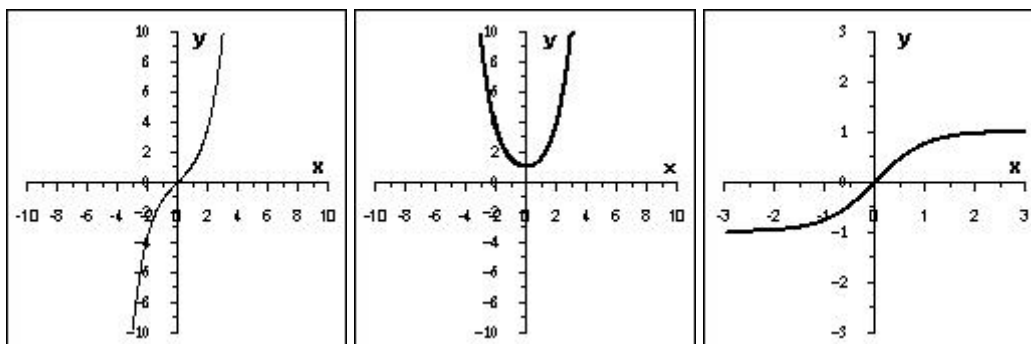


Obr. 21. Vľavo: $y = \arcsin x$. V strede: $y = \arccos x$. Vpravo: $y = \arctan x$.

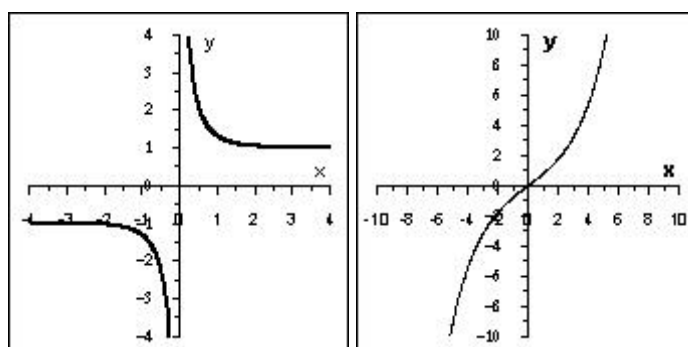


Obr. 22. Vľavo: $y = \operatorname{arccotg} x$. Vpravo: $y = 1,5 \arcsin(0,5x)$.

Hyperbolické funkcie (Obr. 23 až Obr. 24). Hyperbolické funkcie sú dané predpismi $y = a \sinh(bx) + c$, $y = a \cosh(bx) + c$, $y = a \tanh(bx) + c$, $y = a \operatorname{cotgh}(bx) + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. Čím je a ďalej od nuly, tým je funkcia „roztiahnutejšia“ v zvislom smere. Dve konštanty a , ktoré majú rovnakú absolútnu hodnotu, ale líšia sa znamienkom, vytvoria funkcie symetrické podľa osi x . Kladné (záporné) c posúva funkciu nahor (nadol). Pre vyššie konštanty b je funkcia „spučenejšia“ vo vodorovnom smere, pre nižšie hodnoty „roztiahnutejšia“.



Obr. 23. Vľavo: $y = \sinh x$. V strede: $y = \cosh x$. Vpravo: $y = \tanh x$.

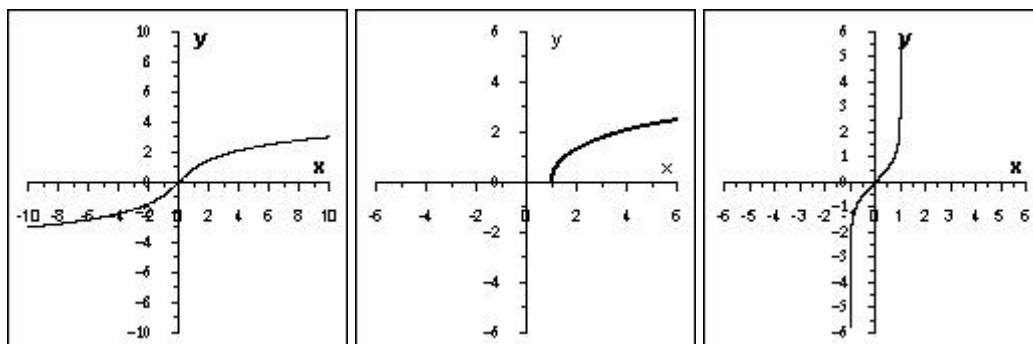


Obr. 24. Vľavo: $y = \operatorname{cotgh} x$. Vpravo: $y = 1,5 \sinh(0,5x)$.

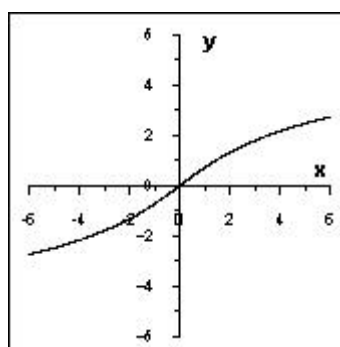
Poznámka. Hyperbolické funkcie sú v skutočnosti kombinácie exponenciálnych. Vzťahy medzi nimi sú nasledovné: $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$,

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \text{ a } \operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x}.$$

Hyperbolometrické funkcie (Obr. 25 až Obr. 26). Hyperbolometrické funkcie sú inverzné k hyperbolickým. Sú dané predpismi $y = a \operatorname{arcsinh}(bx) + c$, $y = a \operatorname{arccosh}(bx) + c$, $y = a \operatorname{arctanh}(bx) + c$, $y = a \operatorname{arccotgh}(bx) + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. Čím je a ďalej od nuly, tým je funkcia „rozťahnutejšia“ v zvislom smere. Dve konštanty a , ktoré majú rovnakú absolútnu hodnotu, ale líšia sa znamienkom, vytvoria funkcie symetrické podľa osi x . Kladné (záporné) c posúva funkciu nahor (nadol). Pre vyššie konštanty b je funkcia „spučenejšia“ vo vodorovnom smere, pre nižšie hodnoty „rozťahnutejšia“.



Obr. 25. Vľavo: $y = \operatorname{arcsinh} x$. V strede: $y = \operatorname{arccosh} x$. Vpravo: $y = \operatorname{arctanh} x$.



Obr. 26. $y = 1,5 \operatorname{arcsinh} x$.

Hyperbolometrické funkcie je možné prepísať aj pomocou logaritmov. Je to však pokročilejšia téma. Zaujímavosť si môžu definície pozrieť na http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/techdoc/ref/func_b12.html. Parametre či konštanty pri funkciách, ktoré sme prebrali doteraz, ovplyvňujú tvar, strmosť a polohu na osi y . Môže ale nastať aj prípad, že voľný parameter je priamo v argumente funkcie, teda $y = f(x)$ sa mení na $y = f(x - d)$. Tento voľný parameter ovplyvňuje polohu či posun funkcie po osi x . Tvar funkcie sa ale nemení.

Poznámka. Treba si uvedomiť a dať pozor na nasledovné: $f(x) + c$ znamená posun funkcie po osi y o c jednotiek nahor a $f(x) - c$ znamená posun funkcie po osi y o c jednotiek nadol. Naproti tomu $f(x - d)$ znamená posun funkcie po osi x o d jednotiek doprava a $f(x + d)$ znamená posun funkcie po osi x o d jednotiek doľava.

Príklady

Príklad 29. Načrtni graf nasledovných funkcií:

- | | | |
|---|---|---|
| a. $4 \arctan(x+2) + 6$ | n. $6 \cosh(5x+2) - 8$ | cc. $-7.1,1^x - 11$ |
| b. $2(x-2)^{-3} + 6$ | o. $7^{x/3} - 5$ | dd. $-10 \cos(6-2x) - 200$ |
| c. $-3 \sinh(4-5x) - 6$ | p. $-2 \cosh(-2-x) + 2$ | ee. $-x^{-1} + 2$ |
| d. $2x^3 - 6$ | q. $2 \log_{0,5}(x+1) + 1$ | ff. $-2 \operatorname{arctanh}(-0,2x+12) + 1$ |
| e. $-(x-10)^{0,1}$ | r. $2,2 \cos(x-1) - 1$ | gg. $-2 \log_3(5x-2) - 1$ |
| f. $0,1 \operatorname{arccotg}(3-2x) + 1$ | s. $x^2 + x - 2$ | hh. $0,5 \operatorname{cotgh}(x+3) + 2$ |
| g. $\frac{1}{x+2} - 3$ | t. $2 \arcsin(2-3x) - 5$ | ii. $4 \tan(x+1) + 2$ |
| h. $0,5 \operatorname{cotg}(0,5x+2) + 3$ | u. $2,2 \operatorname{cotgh}(2-3x) - 2$ | jj. $-2x + 3$ |
| i. $-5 \tan(1-2x) - 1$ | v. $-5 \log_{0,1}(x+5) + 6$ | kk. $\operatorname{arccotgh}(x+3) - 1$ |
| j. $2.0,5^x - 1$ | w. $\sin(x+2) - 1$ | ll. $6 \operatorname{cotg}(1-3x) - 5$ |
| k. $-5 \arctan(2-x) - 1$ | x. $11 \tanh(2x+1) - 1$ | mm. $-(x+2)^{11} - 3$ |
| l. $10.0,9^{2x} + 2$ | y. $2x^{0,7} - 1$ | nn. $\arcsin(2x-1) + 1$ |
| m. $0,5 \arccos(0,25x-2) + 10$ | z. $-2 \sin(3-3x) + 3$ | oo. $0,5 \log_8(2x-5) + 3$ |
| | aa. $2(x+1)^{-1} - 2$ | pp. $-3 \arccos(0,2x-3) + 3$ |
| | bb. $-12 \tanh(1,1x-2) + 7$ | |
| qq. $\frac{2}{(x-3)^2} - 1$ | uu. -2 | yy. $-(x+2)^6 + 2$ |
| rr. $3 \operatorname{arccotg}(x+1,1) + 1,2$ | vv. $3 \operatorname{arcsinh}(x+2) + 2$ | zz. $-\operatorname{arccosh}(-1-x) - 1$ |
| | ww. $x^2 - 2x - 15$ | |
| ss. $0,5x^{800} - 2$ | xx. $-3 \operatorname{arcsinh}(2-5x) - 6$ | aaa. $-3 \ln 2x + 1$ |
| tt. $2 \sinh(2x+3) + 4$ | | bbb. $2(x-2)^{-4} + 10$ |

ccc. $5 \operatorname{arccosh}(3x - 1) + 5$

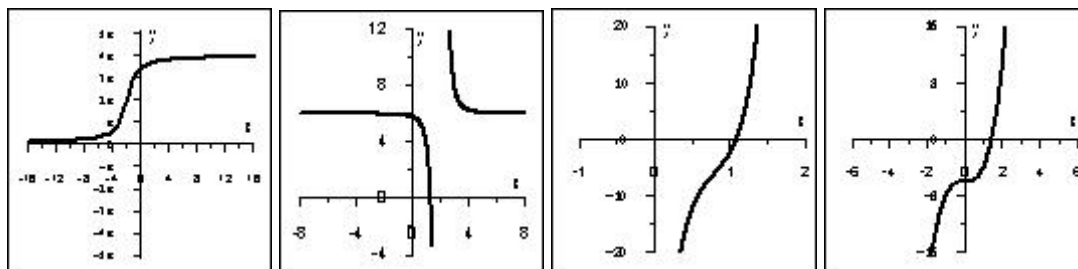
ddd. $50x - 1$

eee. $1,58 \operatorname{arctanh}(2x + 2) + 3$

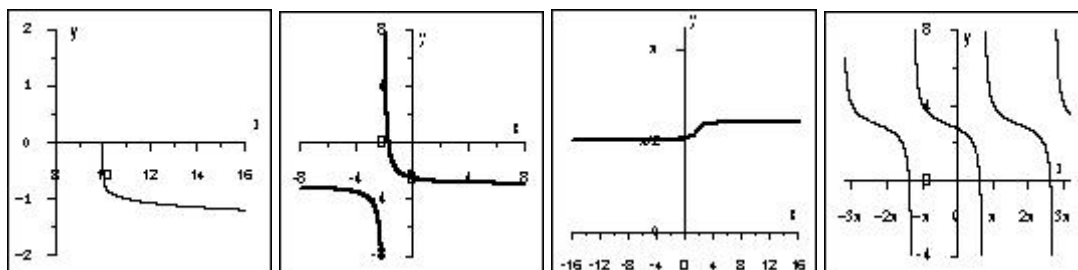
fff. $-x^2 + 4x - 3$

ggg. $-2 \operatorname{arccotgh}(3x - 1) - 2$

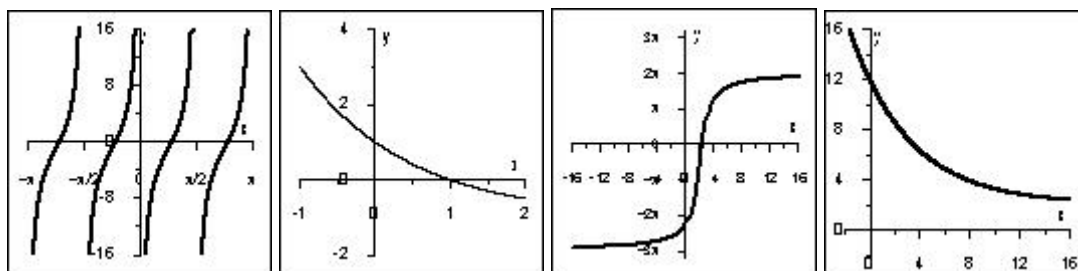
Riešenie. Každý príklad je vyobrazený ako graf. Všetky príklady sú elementárne funkcie. Funkcie sú posunuté nahor o istú hodnotu, doľava o inú hodnotu, perióda je niekoľkokrát menšia, funkcia je zrkadlovo zobrazená a podobne.



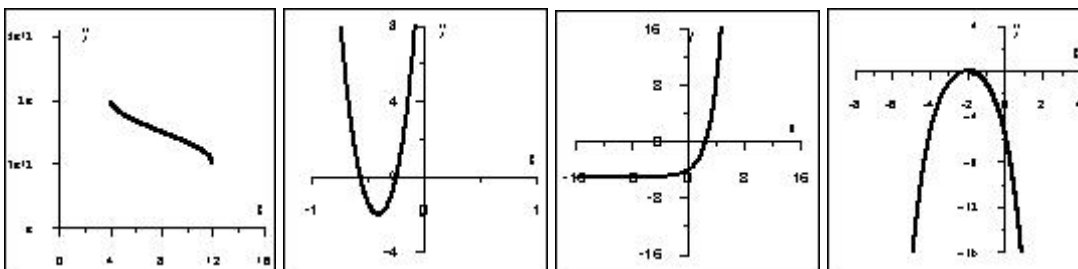
Obr. 27. **Riešenie príkladu a-d.** Zľava: $4 \arctan(x+2) + 6$; $2(x-2)^{-3} + 6$; $-3 \sinh(4-5x) - 6$; $2x^3 - 6$.



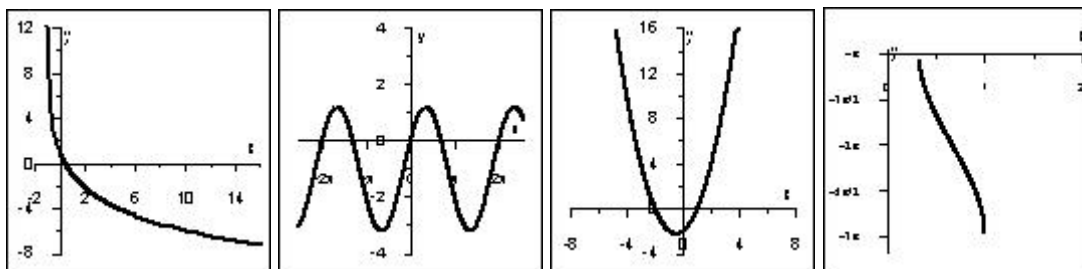
Obr. 28. **Riešenie príkladu e-h.** Zľava: $-(x-10)^{0,1}$; $0,1 \operatorname{arccotg}(3-2x) + 1$; $\frac{1}{x+2} - 3$; $0,5 \cot g(0,5x+2) + 3$.



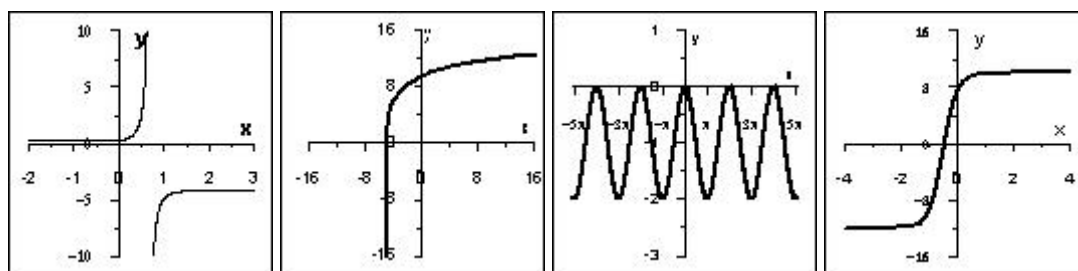
Obr. 29. **Riešenie príkladu i-l.** Zľava: $-5 \tan(1-2x) - 1$; $2 \cdot 0,5^x - 1$; $-5 \arctan(2-x) - 1$; $10 \cdot 0,9^{2x} + 2$.



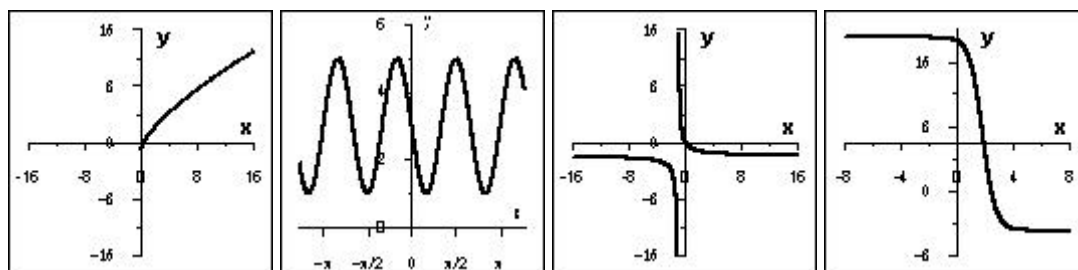
Obr. 30. Riešenie príkladu m-p. Zľava: $0,5 \arccos(0,25x - 2) + 10$; $6 \cosh(5x + 2) - 8$; $7^{x/3} - 5$; $-2 \cosh(-2 - x) + 2$



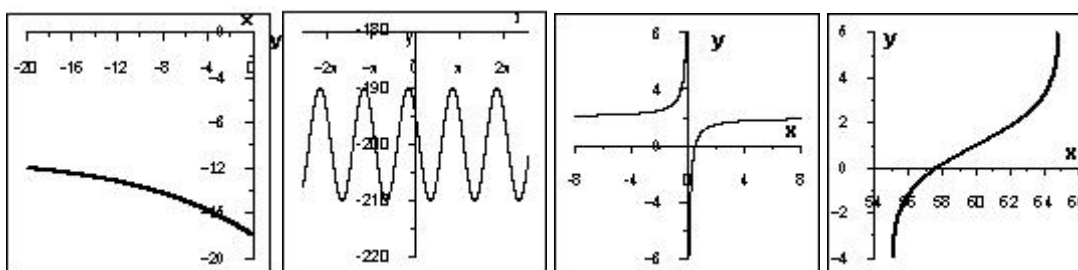
Obr. 31. Riešenie príkladu q-t. Zľava: $2 \log_{0,5}(x + 1) + 1$; $2,2 \cos(x - 1) - 1$; $x^2 + x - 2$; $2 \arcsin(2 - 3x) - 5$



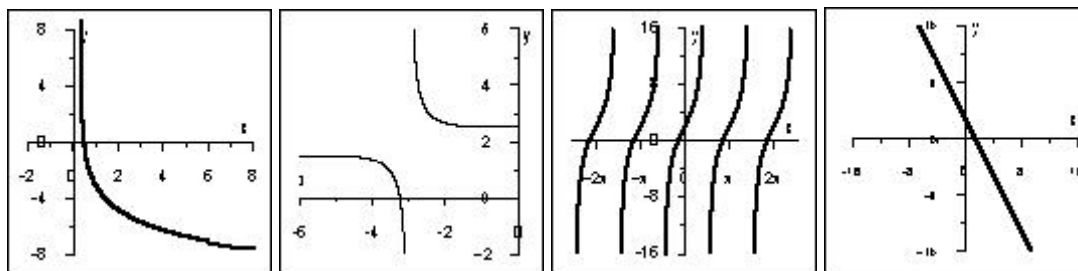
Obr. 32. Riešenie príkladu u-x. Zľava: $2,2 \cotgh(2 - 3x) - 2$; $-5 \log_{0,1}(x + 5) + 6$; $\sin(x + 2) - 1$; $11 \tanh(2x + 1) - 1$



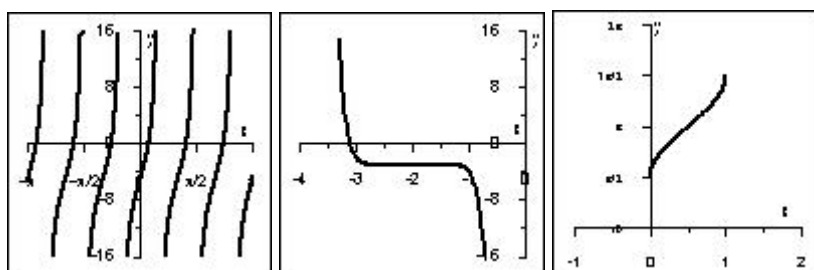
Obr. 33. Riešenie príkladu y-bb. Zľava: $2x^{0,7} - 1$; $-2 \sin(3 - 3x) + 3$; $2(x + 1)^{-1} - 2$; $-12 \tanh(1,1x - 2) + 7$.



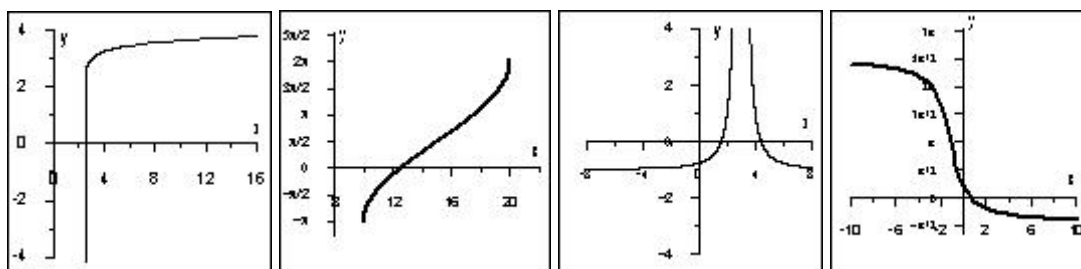
Obr. 34. Riešenie príkladu cc-ff. Zľava: $-7,11^x - 11$; $-10 \cos(6 - 2x) - 200$; $-x^{-1} + 2$; $-2 \operatorname{arctanh}(-0,2x + 12) + 1$.



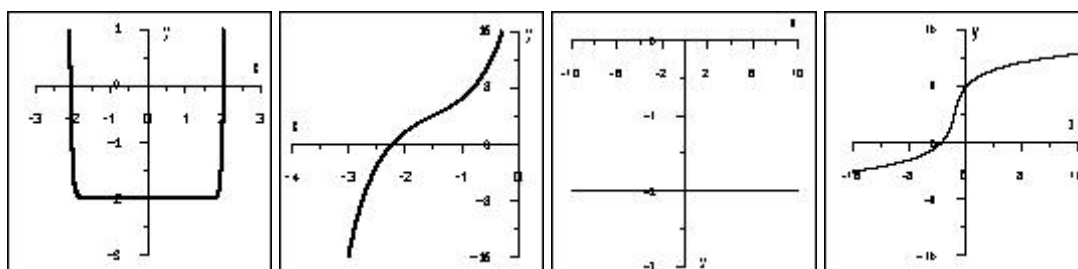
Obr. 35. Riešenie príkladu gg-jj. Zľava: $-2 \log_3(5x-2) - 1$; $0,5 \operatorname{cotgh}(x+3) + 2$; $4 \tan(x+1) + 2$; $-2x + 3$



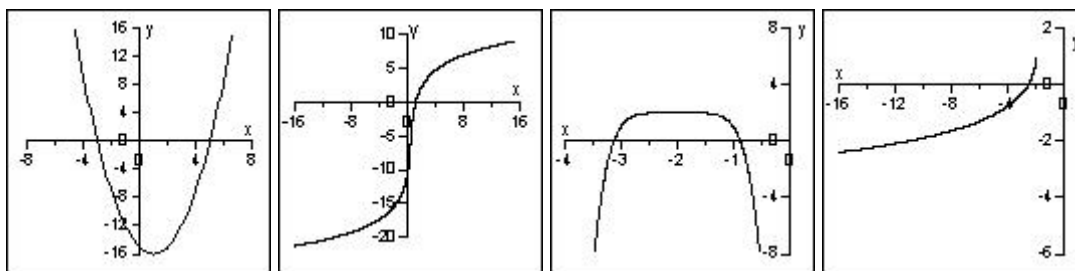
Obr. 36. Riešenie príkladu kk-nn. Zľava: $\operatorname{arccotgh}(x+3) - 1$; $6 \operatorname{cotg}(1-3x) - 5$; $-(x+2)^{11} - 3$; $\arcsin(2x-1) + 1$



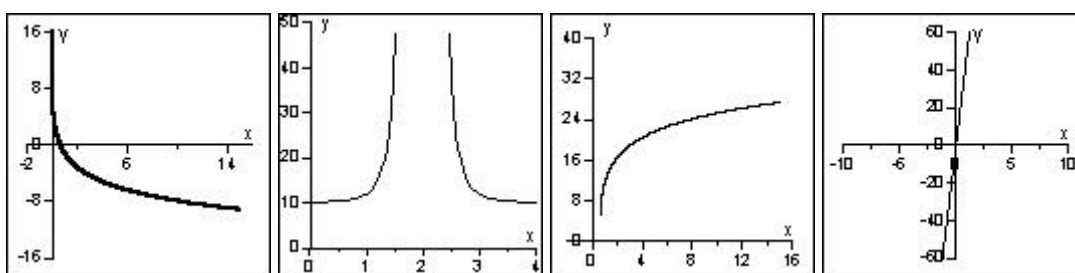
Obr. 37. Riešenie príkladu oo-rr. Zľava: $0,5 \log_8(2x-5) + 3$; $-3 \arccos(0,2x-3) + 3$; $\frac{2}{(x-3)^2} - 1$; $3 \operatorname{arccotg}(x+1,1) + 1,2$



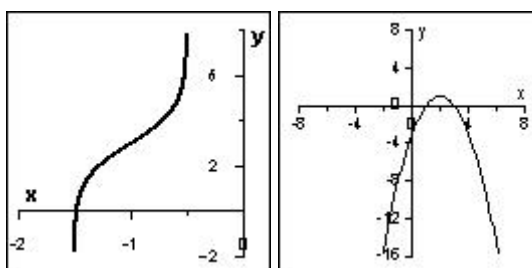
Obr. 38. Riešenie príkladu ss-vv. Zľava: $0,5x^{800} - 2$; $2 \sinh(2x+3) + 4$; -2 ; $3 \operatorname{arcsinh}(x+2) + 2$



Obr. 39. Riešenie príkladu ww-zz. Zľava: $x^2 - 2x - 15$; $-3 \operatorname{arcsinh}(2 - 5x) - 6$; $-(x + 2)^6 + 2$; $-\operatorname{arccosh}(-1 - x) - 1$



Obr. 40. Riešenie príkladu aaa-ddd. Zľava: $-3 \ln 2x + 1$; $2(x - 2)^{-4} + 10$; $5 \operatorname{arccosh}(3x - 1) + 5$; $50x - 1$



Obr. 41. Riešenie príkladu eee-ggg. Zľava: $1,58 \operatorname{arctanh}(2x + 2) + 3$; $-x^2 + 4x - 3$

Poznámka. Všetky tieto grafy sú grafy elementárnych funkcií. Podľa mňa by kreslenie grafov týchto funkcií mal rutinne zvládnuť absolútne každý študent. Ak by bola výučba menej prísna, dali by sa odpustiť cyklometrické a hyperbolometrické funkcie, pretože tieto sa menej používajú, ale ostatné považujem za nutný základ.

Lekcia 5 - Limita funkcie 1

Nové pojmy

- a. Limita, vlastná a nevlastná limita, limita sprava a zľava
- b. Funkcia spojitá v bode a na množine, bod nespojitosti prvého a druhého druhu

Limita

Definícia limity. Funkcia f má v bode a limitu b práve vtedy, keď pre každé číslo $\varepsilon > 0$ existuje také číslo $\delta > 0$, že pre každé $x \neq a$ z definičného oboru platí, že ak $|x - a| < \delta$, tak $|f(x) - b| < \varepsilon$. Pomocou kvantifikátorov je definícia zapísaná nasledovne:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, x \neq a : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Poznámka. Málokto definíciu limity pochopí hlbšie. Obyčajne sa limita chápe len intuitívne ako nejaká hodnota, ku ktorej sa funkcia blíži a môže, ale aj nemusí v nej skončiť. Je možné si limitu predstaviť aj ako bod, ku ktorému sa graf dostane nekonečne blízko a môže, ale nemusí sa až do tohto bodu dostať.

Vlastná a nevlastná limita. Ak je limita reálne číslo, je to vlastná limita. Niekedy sa stane, že limita vychádza nekonečno (graf neobmedzene rastie alebo klesá). Vtedy je to nevlastná limita. Týmto sa ale možnosti nevyčerpali. Existujú aj prípady, keď limita neexistuje. Napríklad vtedy, keď sa zdá, že funkcia má dve limity (napríklad keď osciluje). Limita ale môže byť iba jedna, preto v takomto prípade funkcia limitu nemá.

Limita sprava a zľava. Limita sprava a zľava sú dva nové pojmy, ktoré je možné veľmi presne zdefinovať pomocou definície limity. Nebudeme to robiť. Limitu zľava a sprava je najlepšie pochopiť intuitívne. Limita hovorila o tom, ako sa funkcia správa v istom okolí vyšetrovaného bodu. Limita sprava, prípadne zľava hovorí o tom, ako sa funkcia správa v istom pravom, prípadne ľavom okolí vyšetrovaného bodu. Je vhodné ju teda zaviesť pre prípady, kedy funkcia „začína“ od istej hodnoty, ako napríklad $\sqrt{x}$ začína od nuly.

Poznámka. Limita sprava a limita zľava sa nemusia rovnať, aj keď vo väčšine príkladov to tak je. Môže sa tiež stať, že limita z jednej strany existuje, a z druhej strany neexistuje. Takýchto príkladov je málo.

Spojitosť funkcie

Spojité funkcia v bode. Nech je funkcia $f(x)$ definovaná na množine M . Funkcia je spojitá v bode $x_0 \in M$, ak $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

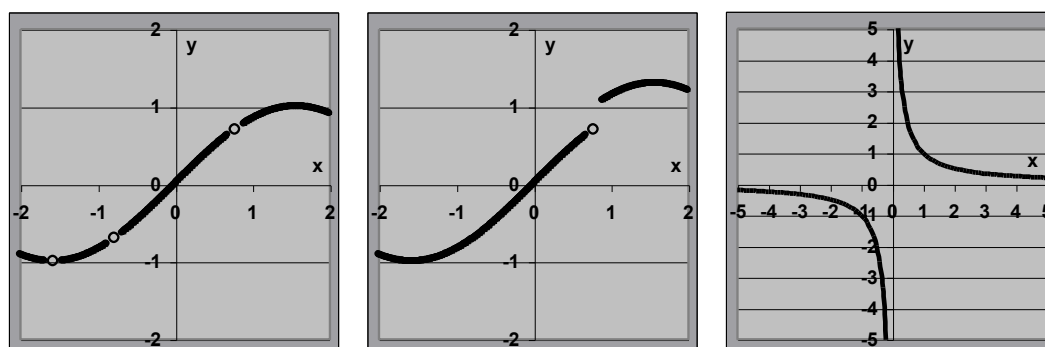
Spojité funkcia na množine. Ak je funkcia spojitá v každom bode množiny M , je spojitá na množine M .

Bod nespojitosti. Bod, v ktorom funkcia nie je spojitá, sa volá bod nespojitosti.

Bod nespojitosti prvého druhu. Ak má funkcia bod nespojitosti, ale má v ňom konečnú limitu sprava alebo zľava, je to bod nespojitosti prvého druhu (Obr. 42).

Bod nespojitosti druhého druhu (Obr. 42). Ak má funkcia bod nespojitosti a nemá v ňom konečnú limitu sprava alebo zľava, je to bod nespojitosti druhého druhu.

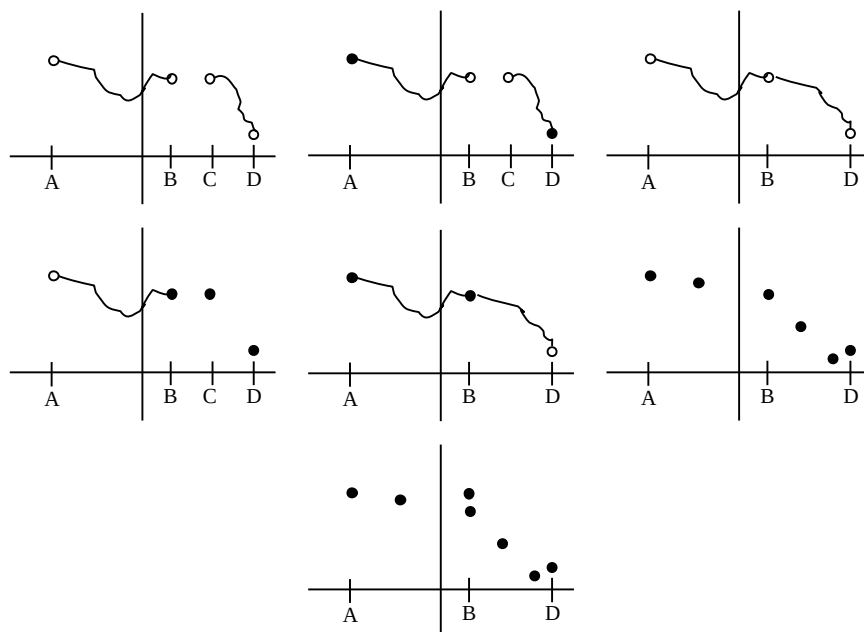
Poznámka. Dopredu niekedy nie je jednoduché len tak z predpisu funkcie povedať, či sa jedná o bod nespojitosti prvého alebo druhého druhu. Na grafe sa ale bod nespojitosti ľahko rozlíši. Ak vyzerá tak, že z grafu je len vyhrýznutý bod, je to bod nespojitosti prvého druhu. Graf sa dá ľahko „zaplátať“ tak, že medzeru „zapcháme“ jedným bodom. Nespojitosti sú vlastne „skoky“ na grafe. Ak je tento skok konečne veľký, je to bod nespojitosti prvého druhu, ak je skok nekonečne veľký, je to bod nespojitosti druhého druhu.



Obr. 42. Vľavo: Funkcia má tri body nespojitosti prvého druhu. V strede: Funkcia má jeden bod nespojitosti prvého druhu. Vpravo: Funkcia má jeden bod nespojitosti druhého druhu.

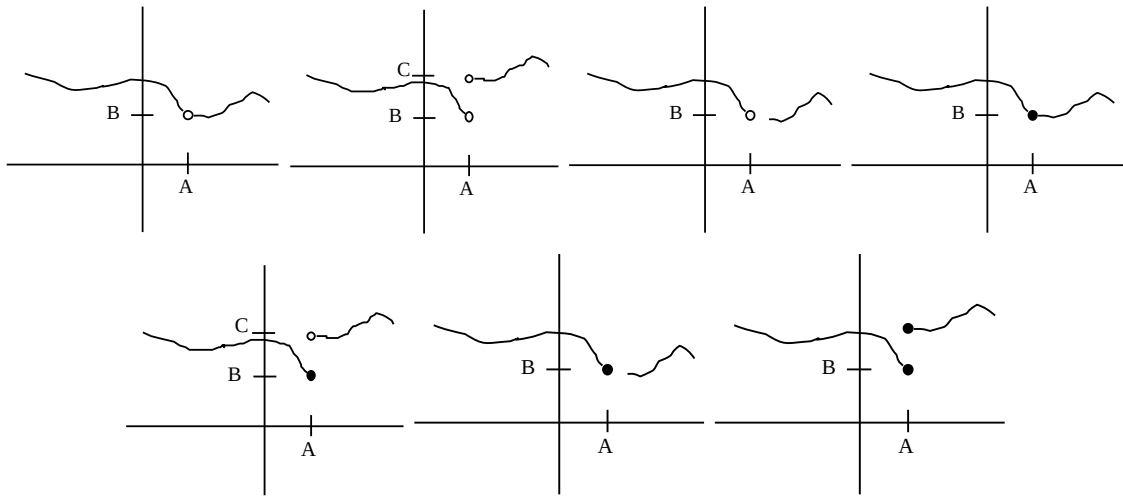
Príklady

Príklad 30. Funkcia je spojitá na množine alebo v bode?



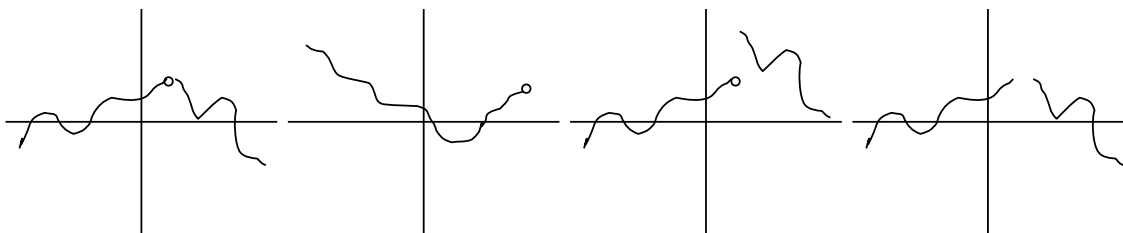
Riešenie. V prvom prípade je funkcia spojitá v každom bode množiny $M = (A; B) \cup (C; D)$. V druhom prípade je funkcia spojitá v každom bode množiny $M = (A; B) \cup (C; D)$. Aj tu musia byť intervaly spojitosti otvorené, pretože doľava od bodu A a doprava od bodu D nie je nič, graf tu končí, v týchto bodoch preto funkcia nie je spojitá. V treťom prípade je funkcia spojitá v každom bode množiny $M = (A; B) \cup (B; D)$. V štvrtom prípade je funkcia spojitá v každom bode množiny $M = (A; B)$. Hoci je definovaná v bode B, graf je tu roztrhnutý, a preto tu funkcia nie je spojitá. Nespojité je aj v bodoch C a D, lebo sú to izolované body. V piatom prípade je funkcia spojitá v každom bode množiny $M = (A; D)$. V šiestom prípade je funkcia nespojitá v každom bode, lebo sú to izolované body. V siedmom prípade to nie je funkcia, lebo pre jedno B sú definované dve hodnoty.

Príklad 31. Akú limitu má funkcia v bode A? Je v bode A spojitá?



Riešenie. V prvom prípade v bode A funkcia nie je spojitá, pretože v ňom nie je definovaná. Napriek tomu má funkcia v tomto bode limitu sprava aj zľava rovnú B. V druhom prípade v bode A funkcia nie je spojitá, pretože v ňom nie je definovaná. Funkcia v tomto bode limitu nemá. Má iba limitu zľava rovnú B a limitu sprava rovnú C. V treťom prípade v bode A funkcia nie je spojitá, pretože v ňom nie je definovaná. Limita zľava je B. V štvrtom prípade v bode A funkcia je spojitá, má v ňom limitu sprava aj zľava, tieto sa rovnajú, preto v tomto bode má limitu B. V piatom prípade v bode A funkcia nie je spojitá, aj keď v ňom je definovaná. Limita zľava je B, limita sprava je C, teda limitu v bode A funkcia nemá. V šiestom prípade v bode A funkcia nie je spojitá, aj keď v ňom je definovaná. Limita zľava je B. V siedmom prípade to nie je funkcia, pretože sú dva body nad sebou.

Príklad 32. Ktoré body nespojitosti sú prvého a ktoré druhého druhu?



Riešenie. V prvom prípade je to bod nespojitosti prvého druhu, pretože z grafu vidno, že sa funkcia z oboch strán blíži k tomu istému bodu, limita sprava a zľava sa rovnajú. Keby sa tam ten bod doplnil, funkcia by sa stala spojitou. V druhom prípade to nie je žiaden bod nespojitosti, ale proste už priestor mimo funkcie. V treťom prípade je to bod nespojitosti druhého druhu, pretože limita sprava a zľava sú rôzne. Nie je miesto pre dokreslenie bodu, pretože by na grafe vznikli dva body nad sebou, a to už by nebola

funkcia. V štvrtom prípade je to nekonečne veľa bodov nespojitosti druhého druhu, pretože chýba celý interval.

Príklad 33. Koľko bodov nespojitosti prvého a druhého druhu môže mať funkcia?

Riešenie. Môže mať nekonečne veľa jedných aj druhých, dokonca môžu byť ľubovoľne husto.

Príklad 34. Môže mať funkcia naraz aj bod nespojitosti prvého druhu aj bod nespojitosti druhého druhu?

Riešenie. Samozrejme, že môže. V jednej časti bod prvého druhu, v inej časti druhého druhu.

Príklad 35. Môže mať funkcia v jednom bode aj bod nespojitosti prvého druhu aj bod nespojitosti druhého druhu?

Riešenie. Nie, nemôže. Vyplýva to z definície pomocou limit. Nie je možné, aby v nejakom bode funkcia naraz limitu mala aj nemala.

Príklad 36. Vypočítajte nasledovné limity:

a. $\lim_{x \rightarrow 2} 5x^2$

f. $\lim_{x \rightarrow \pi} \sin x$

k. $\lim_{x \rightarrow 10} (\log_{10} x)$

b. $\lim_{x \rightarrow \infty} 5x^2$

g. $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{2}{x^3 - x}$

l. $\lim_{x \rightarrow 0} (\arcsin 2x)$

c. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} x^{\sin x}$

h. $\lim_{x \rightarrow \pi} \tan x$

m. $\lim_{x \rightarrow 0} (\sinh x + \cosh x)$

d. $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x}$

i. $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + x^2 - 1)$

n. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{5}{x} \right)$

e. $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x$

j. $\lim_{x \rightarrow 3} (x^x)$

o. $\lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{5}{x} \right)$

Riešenie.

a. $\lim_{x \rightarrow 2} 5x^2 = 5 \cdot 4 = 20$

c. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} x^{\sin x} = \pi/2$

b. $\lim_{x \rightarrow \infty} 5x^2 = 5 \cdot \infty^2 = \infty$

d. $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = e^{-\infty} = 0$

- e. $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \ln \infty = \infty$
- f. $\lim_{x \rightarrow \pi} \sin x = \sin \pi = 0$
- g. $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{2}{x^3 - x} = \frac{2}{1000 - 10} = \frac{1}{495}$
- h. $\lim_{x \rightarrow \pi} \tan x = \tan \pi = 0$
- i. $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + x^2 - 1) = 1$
- j. $\lim_{x \rightarrow 3} (x^x) = 3^3 = 81$
- k. $\lim_{x \rightarrow 10} (\log_{10} x) = \log_{10} 10 = 1$
- l. $\lim_{x \rightarrow 0} (\arcsin 2x) = \arcsin 0 = 0$
- m. $\lim_{x \rightarrow 0} (\sinh x + \cosh x) = \sinh 0 + \cosh 0 = 1$
- n. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{5}{x} \right) = \infty$
- o. $\lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{5}{x} \right) = 1$

Poznámka. Všetky príklady bolo možné riešiť tak, že sa hodnota priamo dosadila do predpisu funkcie a zistilo sa, či je limita vlastná alebo nevlastná. Častejšie sú však netriviálne príklady, kedy nie je možné hodnotu do funkcie dosadiť priamo. Môže to mať niekoľko dôvodov, ale to je téma nasledovnej lekcie.

Príklad 37. Vypočítajte nasledovné limity:

- a. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$
- b. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x}$
- c. $\lim_{x \rightarrow 50^+} \frac{1}{x - 50}$
- d. $\lim_{x \rightarrow 50^-} \frac{1}{x - 50}$
- e. $\lim_{x \rightarrow 1^+} |x - 1|$
- f. $\lim_{x \rightarrow 1^-} |x - 1|$
- g. $\lim_{x \rightarrow 1} |x - 1|$
- h. $\lim_{x \rightarrow \pi/2^+} \tan x$
- i. $\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \tan x$
- j. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x$
- k. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \ln x$
- l. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x}$
- m. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{x}$
- n. $\lim_{x \rightarrow 20^+} \frac{5}{(x - 20)^2}$
- o. $\lim_{x \rightarrow 20^-} \frac{5}{(x - 20)^2}$
- p. $\lim_{x \rightarrow \infty^+} \frac{5}{(x - 20)^3}$
- q. $\lim_{x \rightarrow \infty^-} \frac{5}{(x - 20)^3}$
- r. $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x$
- s. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x$
- t. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \operatorname{arccosh} x$
- u. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \operatorname{arccosh} x$

Riešenie.

a. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$

b. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

c. $\lim_{x \rightarrow 50^+} \frac{1}{x - 50} = \infty$

d. $\lim_{x \rightarrow 50^-} \frac{1}{x - 50} = -\infty$

e. $\lim_{x \rightarrow 1^+} |x - 1| = 1$

f. $\lim_{x \rightarrow 1^-} |x - 1| = -1$

g. $\lim_{x \rightarrow 1} |x - 1| = NR$

h. $\lim_{x \rightarrow \pi/2^+} \tan x = -\infty$

i. $\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \tan x = \infty$

j. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$

k. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \ln x = NR$

l. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$

m. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{x} = NR$

n. $\lim_{x \rightarrow 20^+} \frac{5}{(x - 20)^2} = \infty$

o. $\lim_{x \rightarrow 20^-} \frac{5}{(x - 20)^2} = \infty$

p. $\lim_{x \rightarrow \infty^+} \frac{5}{(x - 20)^3} = \infty$

q. $\lim_{x \rightarrow \infty^-} \frac{5}{(x - 20)^3} = -\infty$

r. $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x = \pi / 2$

s. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\pi / 2$

t. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \operatorname{arccosh} x = 0$

u. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \operatorname{arccosh} x = NR$

Poznámka. Niektoré príklady nemajú riešenie (NR), teda limity neexistujú. Je to buď preto, že sa nerovnajú limity sprava a zľava, alebo preto, že sa k zadanému bodu z jednej strany nedá priblížiť, pretože na tej strane funkcia nie je definovaná.

Lekcia 6 - Limita funkcie 2

Nové pojmy

- a. Limita podielu racionálnych funkcií
- b. Limita podielu goniometrických funkcií
- c. Limita typu $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{0}, \frac{0}{\infty}, \frac{\infty}{\infty}$

Pravidlá pre počítanie limit

Úvod. Často sa stáva, že pri počítaní limit nie je možné dosadiť priamo želanú hodnotu, pretože vychádza nekonečno, aj keď sa funkcia k nekonečnu neblíži. Niekedy sa tiež stáva, že vychádza v čitateli aj v menovateli nula alebo nekonečno. V takomto prípade je potrebné si uvedomiť, že problém je v predpise funkcie a jej priebehu. Dobrý príklad je funkcia $y = x^2 / x$. Ak by sme chceli počítať limitu blízko nuly, nebolo by možné nulu priamo dosadiť, pretože v menovateli nula byť nemôže. Ak ale funkciu vykrátíme, vznikne nám $y = x$, do ktorej nulu už dosadiť možné je. Vôbec nevadí, že pôvodná funkcia nie je v nule definovaná, limitu je možné počítať aj v tomto prípade. V definícii limity je jasne povedané, že v samotnom vyšetrovanom bode funkcia definovaná byť nemusí. Nutné ale je, aby bola definovaná v nejakom okolí.

Racionálna funkcia. Často sa stáva, že funkcia je zadaná nasledovne: $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$, pričom $P(x)$ a $Q(x)$ sú polynómy. Príklady sa vo všeobecnosti delia na dva typy. Prvý typ je ten, keď sa počíta limita pre x idúce k nejakej konkrétnej, ale konečnej hodnote x_0 . Druhý typ je ten, keď sa počíta limita pre x idúce k nekonečnu.

Racionálna funkcia pre $x \rightarrow x_0$. Ak sa funkcia sa blíži k hodnote, ktorá nie je nulovým bodom $Q(x)$, stačí dosadiť. Ale ak sa funkcia sa blíži k hodnote, ktorá je nulovým bodom $Q(x)$, máme v menovateli nulu. V menovateli ale nula vzniknúť nemôže. Neznamená to ale, že limita musí byť nevlastná. Môže sa stať, že sa dá čitateľ a menovateľ vhodne vykrátiť a v menovateli zostane funkcia, ktorá už nemá nulový bod v želanej hodnote. Napríklad funkcia $y = \frac{(x-1)(x-2)}{x-1}$ v jednotke definovaná nie je,

dosadiť ju tam nie je možné, ale limita v jednotke existuje. Stačí vykrátiť a vznikne $y = x - 2$. Po dosadení jednotky je výsledok -1 . Ak sa ale vykrátiť nedá, limita je nevlastná.

Racionálna funkcia pre $x \rightarrow \infty$. Inak je to, ak sa funkcia blíži k nekonečnu. Treba si najskôr všimnúť, ako vyzerajú polynómy $P(x) = a_1x^n + a_2x^{n-1} + \dots$ a $Q(x) = b_1x^m + b_2x^{m-1} + \dots$. Tu existujú tri možnosti. Prvý prípad je ten, keď $P(x)$ je vyššieho stupňa ako $Q(x)$, teda $n > m$. Hovorí sa, že vtedy je v čitateli „nekonečno vyššieho rádu“ a výsledok je nevlastná limita, teda plus alebo mínus nekonečno. Druhý prípad je ten, keď $Q(x)$ je vyššieho stupňa ako $P(x)$, teda $n < m$. Hovorí sa, že vtedy je v menovateli „nekonečno vyššieho rádu“ a výsledok je nula. Tretí prípad je ten, keď $P(x)$ a $Q(x)$ sú rovnakého stupňa, teda $n = m$. Vtedy existuje na výpočet limity pre $x \rightarrow \infty$ nasledovný trik: Ak $P(x) = a_1x^n + a_2x^{n-1} + \dots$ a $Q(x) = b_1x^n + b_2x^{n-1} + \dots$, tak limita je a_1 / b_1 . Zistím len koeficienty pri najvyšších mocninách x a limita je ich pomer.

Poznámka a časté chyby. Zvykne sa zabúdať na to, že tento trik sa dá použiť iba v prípade, že polynómy $P(x)$ a $Q(x)$ sú rovnakého stupňa. Taktiež sa zabúda na to, že tento trik platí len pre limity idúce do nekonečna.

Podiel goniometrických funkcií. Ak počítame limitu $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi(x)}{\phi(x)}$, pričom $\varphi(x)$ a $\phi(x)$ sú goniometrické funkcie, môže sa nám stať, že sa hodnota nedá priamo dosadiť, pretože v menovateli vzniká nula. Podobne, ako v prípade racionálnych funkcií, je možné, že sa čitateľ a menovateľ dajú vykrátiť a hodnota sa po vykrátení dá dosadiť. Typický prípad je $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x} \frac{\sin x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1$. Sínusy sa dali vykrátiť, pretože tangens sa dá prepísať ako sínus lomené kosínus.

Limity typu $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{0}$, $\frac{0}{\infty}$, $\frac{\infty}{\infty}$. Často sa stáva, že limitu nevieme vypočítať, pretože keby sme chceli limitnú priamo dosadiť do predpisu dosadiť, v čitateli aj v menovateli vzniká nula alebo nekonečno, ale čitateľ a menovateľ sa nedajú vykrátiť. Tieto limity sa dajú vypočítať pomocou L'Hospitalovo pravidla. Toto pravidlo využíva derivácie, preto sa bude preberať v lekcii 7.

Príklady

Príklad 38. Vypočítajte nasledovné limity:

a. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$

f. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{x}$

l. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{x^2 - 1}$

b. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1}$

g. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^6 - 10x^5}{x^5}$

m. $\lim_{x \rightarrow -10} \frac{x^2 + 20x + 100}{x^2 + 20x + 100}$

c. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 6x^2 + 12x + 8}{x + 2}$

h. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 4x^2 + x - 2}{x - 1}$

n. $\lim_{x \rightarrow -6} \frac{x + 6}{x^2 + 6x}$

d. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - x - 20}{x - 5}$

i. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^2 - 3x + 2}$

o. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{100}}{x^{100}}$

e. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 7x + 10}{x - 5}$

j. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^2 - 5x + 6}$

k. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{x^2 - 16}$

Riešenie.

a. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 2)(x - 3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x - 2) = 1$

b. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(x + 1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x + 1) = 0$

c. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 6x^2 + 12x + 8}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + 2)(x + 2)(x + 2)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} (x + 2)^2 = 0$

d. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - x - 20}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x - 5)(x + 4)}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} (x + 4) = 9$

e. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 7x + 10}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x - 5)(x - 2)}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} (x - 2) = 3$

f. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x - 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x - 1) = -1$

g. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^6 - 10x^5}{x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5(x - 10)}{x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} (x - 10) = -10$

$$h. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 4x^2 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2(x-2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} [(x-1)(x-2)] = 0$$

$$i. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-2} = -1$$

$$j. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-3} = -1$$

$$k. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{x^2 - 16} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{(x-4)(x+4)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{x+4} = \frac{1}{8}$$

$$l. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{2}$$

$$m. \lim_{x \rightarrow -10} \frac{x^2 + 20x + 100}{x^2 + 20x + 100} = \lim_{x \rightarrow -10} 1 = 1$$

$$n. \lim_{x \rightarrow -6} \frac{x+6}{x^2 + 6x} = \lim_{x \rightarrow -6} \frac{x+6}{x(x+6)} = \lim_{x \rightarrow -6} \frac{1}{x} = -\frac{1}{6}$$

$$o. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{100}}{x^{100}} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$$

Príklad 39. Vypočítajte nasledovné limity:

$$a. \lim_{\varphi \rightarrow \pi} \frac{\tan \varphi}{\sin \varphi}$$

$$c. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln^2 x}{\ln x}$$

$$b. \lim_{\varphi \rightarrow \pi/2} \frac{\cotg \varphi}{\cos \varphi}$$

$$d. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\ln^2 x}$$

Riešenie.

$$a. \lim_{\varphi \rightarrow \pi} \frac{\tan \varphi}{\sin \varphi} = \lim_{\varphi \rightarrow \pi} \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi \cdot \cos \varphi} = \lim_{\varphi \rightarrow \pi} \frac{1}{\cos \varphi} = -1$$

$$b. \lim_{\varphi \rightarrow \pi/2} \frac{\cotg \varphi}{\cos \varphi} = \lim_{\varphi \rightarrow \pi/2} \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi \cdot \sin \varphi} = \lim_{\varphi \rightarrow \pi/2} \frac{1}{\sin \varphi} = 1$$

$$c. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln^2 x}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \ln x = 0$$

$$d. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\ln^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln x} = 0$$

Príklad 40. Vypočítajte nasledovné limity:

$$a. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 10}{x^2 - 7}$$

$$g. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x^4 + x^2 + 10}{4x^4}$$

$$m. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{500} + x^{44} + 10x}{x^2 - 6x^{500} - 44}$$

$$b. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x^2 + 7x + 100}{x^2 - x + 70}$$

$$h. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x^6 + x + 10}{-5x^6 - 7x^2}$$

$$n. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{23x^{23}}{23x^2 + x^{23} - 7}$$

$$c. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x + 10}{3x^2 + 5x + 7}$$

$$i. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x^{11} + 1}{x^2 - 7x^{11}}$$

$$o. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^9 - x - 10}{-9x^9 - 9}$$

$$d. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{6x^2 + 5x + 47}$$

$$j. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 10x^5}{x^2 - 6x^5 + 44}$$

$$e. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3 + x + 1}{x^3 - 5}$$

$$k. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^6 - 2}{20x^2 - 9x^6}$$

$$f. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^9 + x^7 + x^3 - 1}{2x^9 - x^6 + x^2 - 5}$$

$$l. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^7 + x^7 - 1}{x^2 - 8x^7}$$

Riešenie.

$$a. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 10}{x^2 - 7} = 1$$

$$f. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^9 + x^7 + x^3 - 1}{2x^9 - x^6 + x^2 - 5} = -\frac{1}{2}$$

$$j. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 10x^5}{x^2 - 6x^5 + 44} = -\frac{5}{3}$$

$$b. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x^2 + 7x + 100}{x^2 - x + 70} = 10$$

$$g. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x^4 + x^2 + 10}{4x^4} = -\frac{5}{4}$$

$$k. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^6 - 2}{20x^2 - 9x^6} = -\frac{1}{9}$$

$$c. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x + 10}{3x^2 + 5x + 7} = \frac{2}{3}$$

$$h. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x^6 + x + 10}{-5x^6 - 7x^2} = -\frac{12}{5}$$

$$l. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^7 + x^7 - 1}{x^2 - 8x^7} = -\frac{1}{4}$$

$$d. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{6x^2 + 5x + 47} = \frac{1}{6}$$

$$m. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{500} + x^{44} + 10x}{x^2 - 6x^{500} - 44} = -\frac{1}{6}$$

$$i. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x^{11} + 1}{x^2 - 7x^{11}} = -\frac{1}{7}$$

$$e. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3 + x + 1}{x^3 - 5} = 8$$

$$n. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{23x^{23}}{23x^2 + x^{23} - 7} = 23$$

o. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^9 - x - 10}{-9x^9 - 9} = \frac{1}{9}$

Lekcia 7 – Derivácie

Nové pojmy

- a. Definícia derivácie pomocou limity, smernice a rýchlosti zmeny
- b. Jednostranná derivácia, derivácia zľava a sprava

Definície derivácie

Úvod. V predošlej kapitole sa prebrala limita. Nie veľa študentov rýchlo pochopí, čo je to vlastne limita. Našťastie to nevádi, pretože v geologických vedách sa limity používajú zriedkavejšie. V matematike po pojme limita obvykle nasleduje pojem derivácie. Derivácie sú však objekty, ktoré sa aj v geologických disciplínach používajú častejšie, ako sa na prvý pohľad zdá. Preto je viac ako potrebné, aby každý aspoň trochu pochopil, čo je to derivácia, ako sa definuje, ako funguje a ako sa počíta. V zásade existujú tri prístupy k vysvetleniu derivácie. Prvý a najťažší prístup je cez limity, potom geometrický prístup cez smernice a fyzikálny cez rýchlosť zmeny. Kvôli veľkej dôležitosti nasleduje vysvetlenie všetkých troch prístupov.

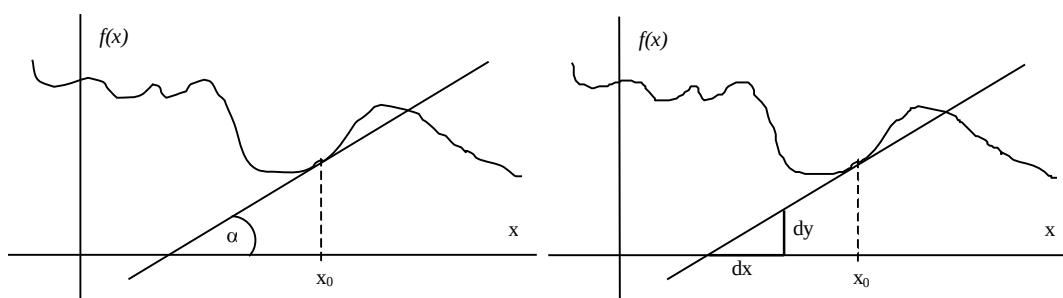
Definícia pomocou limity. Nech funkcia $f(x)$ je definovaná v istom okolí bodu x_0 . Nech existuje vlastná limita $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Táto limita sa volá derivácia funkcie $f(x)$ v bode x_0 . Označuje sa $f'(x_0)$, $f'(x)_{x=x_0}$, $\frac{df(x_0)}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx} \Big|_{x=x_0}$.

Poznámka. Počítanie derivácií pomocou limity je náročné a zdĺhavé, ale je to veľmi silný nástroj. Vieme však, že počítanie limit robí priemernému študentovi problémy. Preto sa derivácie obvykle (mimo matematikov alebo fyzikov) počítajú iným spôsobom.

Definícia pomocou smernice. Derivácia ako smernica dotyčnice ku grafu je veľmi názorná definícia. Nech $f(x)$ je funkcia a x_0 je bod, v ktorom chceme vypočítať deriváciu. V bode x_0 nakreslíme ku grafu dotyčnicu. Derivácia funkcie $f(x)$ v bode x_0 je potom smernica tejto dotyčnice. Matematicky sa toto dá zapísať ako

$f'(x_0) = \tan \alpha$ (Obr. 43 vľavo) alebo pomocou pravouhlého trojuholníka ako

$$f'(x_0) = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} \quad (\text{Obr. 43 vpravo}).$$



Obr. 43. Derivácia ako smernica dotyčnice ku grafu funkcie.

Poznámka a časté chyby. Pomocou smernice sa derivácie počítajú častejšie. Často sa ale stáva, že ľudia nevedia, kde je uhol α . Treba si uvedomiť, že ak je funkcia rastúca, dotyčnica tiež. Ak je klesajúca, dotyčnica je tiež klesajúca. Uhol α sa vždy meria od kladnej orientácie osi x proti smeru hodinových ručičiek. Môže teda nadobudnúť hodnoty $\langle 0; 180 \rangle$ v stupňoch, prípadne $\langle 0; \pi \rangle$ v radiánoch.

Poznámka. Pomer dy/dx sa dá chápať aj ako prírastok v smere osi y lomený prírastok v smere osi x v malom okolí bodu x_0 .

Definícia pomocou rýchlosti zmeny. Tento prístup vyplýva z názorného geometrického prístupu a využíva sa často pri vyšetrovaní fyzikálnych, chemických, geologických alebo iných dejov. Čím je funkcia strmšia, tým je aj derivácia väčšia. Čím je funkcia rovnobežnejšia s osou x , tým je derivácia bližšia k nule. Toto je presne odrazom prírodných dejov. Ak sa nejaká veličina mení rýchlo, derivácia deja je veľká. Ak sa mení pomaly, derivácia je malá. Ak sa veličina nemení, derivácia deja je nula. Derivácia je preto rýchlosť zmeny.

Jednostranná derivácia

Jednostranná derivácia. Ako sa ukázalo pri limitách, v bode x_0 funkcia vôbec nemusí mať limitu. Vtedy sa ale môže stať, že v tomto bode existuje jednostranná limita, teda limita sprava alebo limita zľava alebo obe. Ak existuje vlastná limita

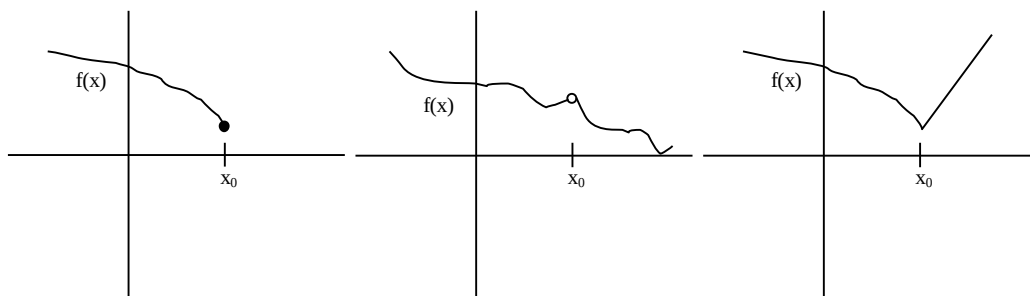
$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, volá sa derivácia zľava a označuje sa $f'_-(x_0)$. Ak existuje vlastná

limita $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, volá sa derivácia sprava a označuje sa $f'_+(x_0)$.

Poznámka. V prírode je výnimkou, ak je potrebné využiť jednostranné derivácie. Takmer vždy sa skúmajú funkcie, ktoré majú v skúmanom bode derivácie z oboch strán, a navyše sa rovnajú.

Príklady

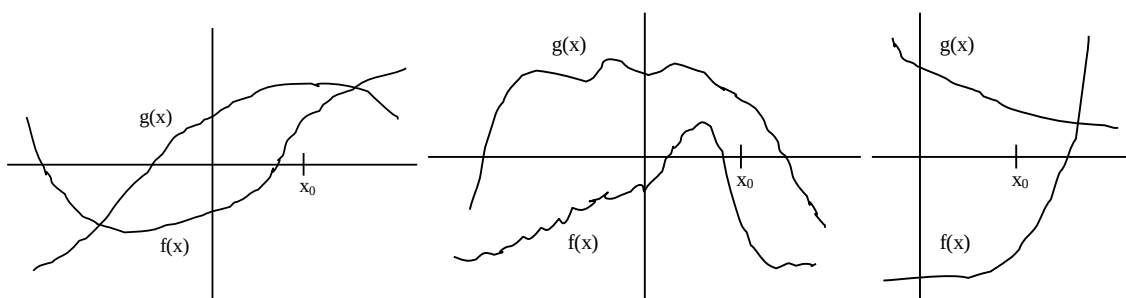
Príklad 41. Nakresli dotyčnicu ku grafu funkcie $f(x)$ v bode x_0 .



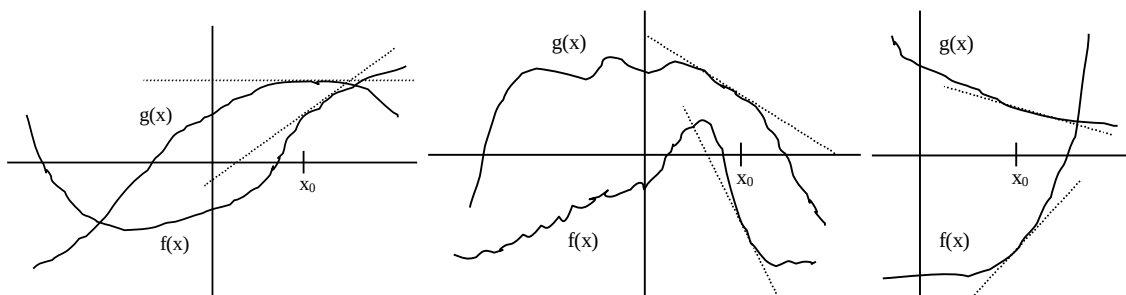
Riešenie.

V prvom prípade kreslenie dotyčnice ku grafu funkcie $f(x)$ v bode x_0 nemá zmysel, pretože x_0 je koncový bod a naň je možné „nalepiť“ nekonečne mnoho dotyčníc, len inak sklonených. V druhom prípade tiež nie je možné nakresliť v bode x_0 dotyčnicu, pretože v tomto bode funkcia nie je definovaná. Tretí prípad je podobný prvému, hoci x_0 nie je koncový. Funkcia je v ňom spojitá, ale je tu „hrot“, a naň je možné „nalepiť“ tiež nekonečne mnoho dotyčníc, len inak sklonených.

Príklad 42. Nakresli dotyčnicu ku grafu funkcie $f(x)$ a $g(x)$ v bode x_0 . Rozhodni podľa dotyčnice, ktorá funkcia je rýchlejšie rastúca (klesajúca).



Riešenie.



V prvom prípade je dotyčnica ku grafu funkcie $f(x)$ v bode x_0 strmšia ako ku grafu $g(x)$, preto funkcia $f(x)$ rastie rýchlejšie. V druhom prípade v bode x_0 rýchlejšie (strmšie) klesá funkcia $f(x)$. V treťom prípade v bode x_0 funkcia $f(x)$ rastie a funkcia $g(x)$ klesá, pričom rast funkcie $f(x)$ je intenzívnejší.

Príklad 43. Vypočítajte deriváciu, ak:

a. $dx = dy = 1$

e. $\alpha = 45^\circ$

b. $dx = dy = 6$

f. $\alpha = 0^\circ$

c. $dx = dy = -1$

g. $\alpha = 90^\circ$

d. $dx = 1$, $dy = -1$

h. $\alpha = 30^\circ$

Riešenie.

a. $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1} = 1$

b. $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{6}{6} = 1$

c. $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{-1} = 1$

d. $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{1} = -1$

e. $y' = \tan \alpha = \tan 45^\circ = 1$

f. $y' = \tan \alpha = \tan 0^\circ = 0$

g. $y' = \tan \alpha = \tan 90^\circ = \infty$

h. $y' = \tan \alpha = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Príklad 44. Aký je uhol medzi osou x a dotyčnicou ku grafu v bode x_0 , ak je v tomto bode derivácia:

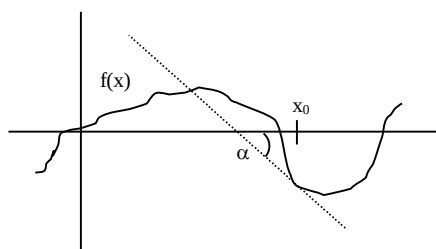
- | | | |
|-------|---------------|--------------|
| a. 1 | c. 0 | e. ∞ |
| b. -1 | d. $\sqrt{3}$ | f. $-\infty$ |

Riešenie.

- a. $\alpha = \arctan y' = \arctan(1) = \pi/4$, funkcia rastie.
- b. $\alpha = \arctan y' = \arctan(-1) = -\pi/4$, uhol je teda $\pi/4$, ale funkcia klesá.
- c. $\alpha = \arctan y' = \arctan(0) = 0$, funkcia je konštantna, graf je rovnobežný s osou x .
- d. $\alpha = \arctan y' = \arctan(\sqrt{3}) = \pi/3$
- e. $\alpha = \arctan y' = \arctan(\infty) = \pi/2$, derivácia je nevlastná, graf je rovnobežný s osou y .
- f. $\alpha = \arctan y' = \arctan(-\infty) = -\pi/2$, ale uhol je teda $\pi/2$, derivácia je nevlastná, graf je rovnobežný s osou y .

Príklad 45. Ak je derivácia -1 a nám vyjde $\alpha = -\pi/4$, prečo berieme za uhol medzi osou x a dotyčnicou rovný $\alpha = \pi/4$?

Riešenie. Pri zápornej derivácii je funkcia klesajúca, preto nám uhol medzi osou x a dotyčnicou vychádza záporný. Ale to je to isté, ako keby sme brali kladnú hodnotu, len proti smeru hodinových ručičiek (Obr. 44). Okrem toho dohoda je obvykle taká, že sa berie absolútna hodnota.



Obr. 44. Uhol medzi osou x a dotyčnicou vychádza záporný, ale berieme ho za kladný, meraný proti smeru hodinových ručičiek.

Lekcia 8 - Derivácie elementárnych funkcií

Nové pojmy

- Tabuľkové derivácie
- Derivácia súčtu, rozdielu, súčinu a podielu funkcií, derivácia zloženej funkcie
- Vyššie derivácie
- Derivácie neobvyklých funkcií
- L'Hospitalovo pravidlo
- Taylorov Rad

Tabuľkové derivácie

Derivácia ako funkcia. Z ktorejkoľvek definície derivácie vyplýva, že je to nejaké reálne číslo, ktoré charakterizuje funkciu v jednom jedinom bode. Keby to takto ostalo len pri jednom bode, bolo by to málo. Všimnime si, čo sa stane, keď pre nejakú funkciu vypočítame deriváciu v mnohých bodoch. Ak tieto body začneme zakresľovať do súradnicovej sústavy, zistíme, že vzniká graf. Ak teda urobíme deriváciu funkcie v každom bode, vznikne tiež funkcia, ale iná. Ak potrebujeme vypočítať deriváciu funkcie v nejakom bode, bolo by veľmi neefektívne počítať limitu pre každý bod. Je lepšie mať vypočítanú deriváciu ako funkciu a do nej dosadiť požadovaný bod. Pomocou limit boli vypočítané derivácie elementárnych funkcií, na prípustných množinách M , ktoré sa používajú ako tabuľkové (Tab. 1).

$f(x)$	$f'(x)$	M
c	0	$\mathbb{R}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha \leq 0 \Rightarrow x \neq 0$
$a^x, a > 0$	$a^x \ln a$	$\mathbb{R}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$

$\log_a x,$ $a \in \mathfrak{R}^+ - \{1\}$	$\frac{1}{x \ln a}$ $x > 0, \ln a \neq 0$	$\mathfrak{R}^+$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\mathfrak{R}^+$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathfrak{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathfrak{R}$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},$ $k \in \mathbb{Z}$
$\cotg x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1;1)$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1;1)$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathfrak{R}$
$\operatorname{arccotg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\mathfrak{R}$
$\sinh x$	$\cosh x$	$\mathfrak{R}$
$\cosh x$	$\sinh x$	$\mathfrak{R}$
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$	$\mathfrak{R}$
$\cotgh x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x}$	$\mathfrak{R} - \{0\}$

Tab. 1. Derivácie elementárnych funkcií.

Poznámka a časté chyby. Najčastejšou chybou pri počítaní derivácií pomocou tabuľkových derivácií je použitie nesprávnej prípustnej množiny. Napríklad pri logaritme je jasné, že sa dá derivovať iba pre kladné reálne čísla, aj keď derivovaná funkcia je definovaná aj pre záporné čísla. Druhá chyba je to, že si ľudia zvyčajne pamätajú, že derivácia sínusu je kosínus, a tak si mylne myslia, že derivácia arkus sínusu je arkus kosínus. Tretia chyba býva tá, že si ľudia zvyčajne pamätajú, že derivácia kosínusu je mínus sínus, ale mylne si myslia, že derivácia kosínusu hyperbolického je mínus sínus hyperbolický.

Pravidlá pre počítanie derivácií

Poznámka. V nasledovných vzorcoch sa bude kvôli prehľadnosti vynechávať argument x , teda $f'(x) = f'$ a $g'(x) = g'$.

Derivácia súčtu (rozdielu). Ak existuje f' a g' , potom derivácia súčtu (rozdielu) je $(f \pm g)' = f' \pm g'$.

Derivácia súčinu. Ak existuje f' a g' , potom derivácia súčinu je $(fg)' = f'g + fg'$.

Derivácia podielu. Ak existuje f' a g' a $g' \neq 0$, potom derivácia podielu je

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Poznámka a časté chyby. Často sa stáva, že sa do vzorca pre deriváciu podielu do menovateľa vloží g' namiesto g^2 . Treba dať pozor aj na to, že $g' \neq 0$.

Derivácia zloženej funkcie. Nech $y = f(u)$ a tento argument je ešte funkciou $u = g(x)$, čiže $y = f \circ g = f(g(x))$. Ak existuje $f'(u)$ a $g'(x)$, potom derivácia zloženej funkcie je $y' = (f \circ g)' = f'(u)g'(x)$.

Poznámka. Vzorec pre deriváciu zloženej funkcie vyzerá na prvý pohľad zložito, ťažkopádne. Našťastie je to len zdanie, pretože si stačí uvedomiť, že derivácia zloženej funkcie je derivácia vonkajšej funkcie krát derivácia vnútornej funkcie. Ak by bola funkcia zložená z viacerých vnorených funkcií, jej derivácia je derivácia vonkajšej funkcie krát derivácia vnútornej funkcie, krát derivácia vnútornej funkcie a tak ďalej až krát derivácia najvnútornejšej funkcie.

Vyššie derivácie

Vyššie derivácie. Keďže derivácia funkcie je funkcia, aj z výslednej funkcie je možné vypočítať deriváciu. Tak vznikne druhá derivácia $f'' = \frac{d^2 f}{dx^2}$, z ktorej je možné vypočítať znova deriváciu. Takýchto derivácií môže byť nekonečne veľa. Potom n -tá derivácia je $f^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n}$.

Derivácia neobvyklých funkcií

Derivácia neobvyklých funkcií. Tabuľka derivácií elementárnych funkcií stačí približne v deviatich prípadoch z desiatich, možno aj častejšie. Napriek tomu existujú aj také funkcie, na ktoré sa nedá napasovať ani jeden vzorec. Typický príklad je funkcia x^x . Nemôžeme použiť vzorec pre funkciu x^α , pretože α musí byť konštanta. Nemôžeme použiť vzorec pre funkciu a^x , pretože a musí byť konštanta. Vo všeobecnosti sa derivácia takejto „funkcie na funkciu“ rieši nasledovným trikom: $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$, a toto už je riešiteľné pomocou tabuľkových, pretože to je exponenciála na súčin. V predošlom prípade je to $x^x = e^{x\ln x}$.

L'Hospitalovo pravidlo

Limity typu $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{0}$, $\frac{0}{\infty}$, $\frac{\infty}{\infty}$. V lekcii 5 sa preberali limity a niekoľko pravidiel na ich výpočet. Často sa stáva, že limitu nevieme vypočítať, pretože keby sme chceli limitu priamo dosadiť do predpisu, v čitateli aj v menovateli vzniká nula alebo nekonečno, ale čitateľ a menovateľ sa nedajú vykrátiť. Tieto limity sa dajú vypočítať pomocou L'Hospitalovo pravidla. Zavádza ho nasledovná veta:

Veta. Nech funkcie $f(x)$ a $g(x)$ majú derivácie $f'(x)$ a $g'(x)$ v okolí bodu x_0 (v bode x_0 môžu a nemusia existovať). Nech $g'(x_0) \neq 0$. Potom

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Tento vzorec sa volá L'Hospitalovo pravidlo.

Poznámka. Niekedy sa stane, že aj po použití L'Hospitalovho pravidla ostane limita typu $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{0}$, $\frac{0}{\infty}$ alebo $\frac{\infty}{\infty}$. Netreba sa zľaknúť, L'Hospitalovo pravidlo je možné za sebou použiť aj viackrát (len musia byť stále splnené podmienky na jeho použitie).

Poznámka. L'Hospitalovo pravidlo platí aj vtedy, ak mi v čitateli aj v menovateli vzniká $-\infty$.

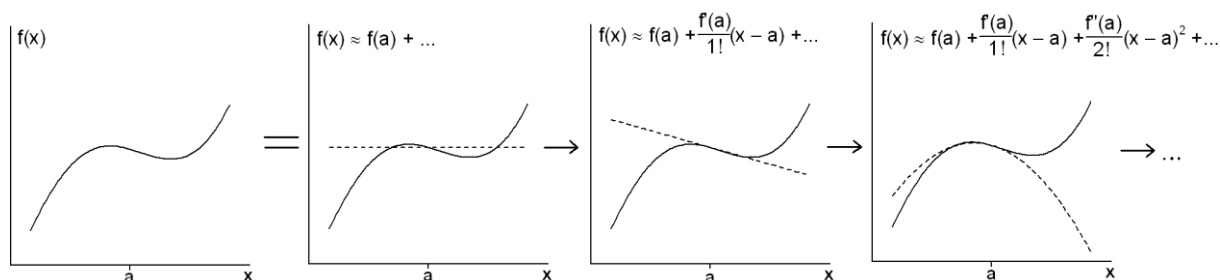
Taylorov rad

Taylorov rad. Vyššie derivácie funkcie $f(x)$ je možné využiť pri jej aproximácii v okolí určitého bodu a pomocou radu polynómov (mocnín premennej x). Takýto rad sa nazýva ako tzv. **Taylorov rad**:

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!} (x-a)^3 + \dots,$$

kde $f(a)$ je funkčná hodnota funkcie $f(x)$ v bode $x = a$; $f'(a)$, $f''(a)$, $f'''(a)$, ... sú prvá, druhá, tretia, ... derivácia funkcie $f(x)$ v bode $x = a$; $(x-a)$, $(x-a)^2$, $(x-a)^3$, ... sú mocniny výrazu $(x-a)$. Rad má nekonečne veľa členov, vo väčšine prípadov sa však aproximácia obmedzuje na niekoľko prvých členov. Dá sa dokázať, že aproximácia funkcie pomocou Taylorovho radu je najpresnejšia možná.

Pomocou Taylorovho radu môžeme opísať (aproximovať) funkciu $f(x)$ v okolí bodu a – k funkčnej hodnote $f(a)$, čo je vlastne konštanta, postupne pridávame priamku (lineárnu funkciu), opísanú členom $[f'(a)/(1!)](x-a)$, ďalej parabolu (kvadratická funkcia), opísanú členom $[f''(a)/(2!)](x-a)^2$, atď. Vyššie členy radu v sebe zahrňujú vyššie polynómy, ktoré sa svojou členitosťou približujú k nepravidelnému tvaru aproximovanej funkcie, ako to je viditeľné aj na Obr. 45.



Obr. 45. Aproximácia funkcie $f(x)$ pomocou Taylorovho radu. Postupným pridávaním členov radu sa aproximácia (prerušovaná čiara) stále viac a viac približuje v okolí bodu a ku skutočnému priebehu krivky $f(x)$ (plná čiara).

Ak položíme $a = 0$, tak potom takýto rad nazývame ako tzv. **MacLaurinov** rad:

$$f(x) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \dots$$

Taylorov (MacLaurinov) rad sa využíva na aproximovanie rôznych funkcií – ako elementárnych, tak aj zložitých.

Postup pri vyjadrení funkcie do Taylorovho (MacLaurinovho) radu je nasledujúci: najprv vyjadríme potrebné vyššie derivácie aproximovanej funkcie, potom do nich dosadíme daný bod a napokon ich použijeme pri dosadení do vzťahu pre Taylorov (MacLaurinov) rad. Ako príklad si uveďme MacLaurinov rad pre funkciu $\arctan(x)$:

Najprv si určíme derivácie funkcie $\arctan(x)$: $\arctan'(x) = 1/(1+x^2)$, $\arctan''(x) = -2x/(1+x^2)^2$, $\arctan'''(x) = [-2(1+x^2)^2 + 8x^2(1+x^2)]/(1+x^2)^4$. Potom dosadíme za $x = 0$: $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -2$. Potom po dosadení do vzťahu pre MacLaurinov rozvoj dostaneme:

$$\arctan(x) \approx 0 + \frac{1}{1!} x + \frac{0}{2!} x^2 + \frac{-2}{3!} x^3 + \dots = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \dots$$

Ďalšie členy $x^5/5$ a $-x^7/7$ sme “vydedukovali” z charakteru opakovania sa známych členov.

V opise geologických a geofyzikálnych javov sa Taylorov (MacLaurinov) rad používa pri tzv. linearizácii problémov: z celého radu sa vezme iba jeho konštantná a lineárna časť (vyššie sa zanedbávajú) a uvedený problém sa ďalej rieši v takejto zjednodušenej forme. Tento spôsob pomáha pri riešení zložitých nelineárnych javov, netreba však zabúdať na to, že ide iba o približné riešenie.

Uveďme si niekoľko príkladov MacLaurinovho radu:

$$\begin{aligned} \sin(x) &\approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots, \\ \tan(x) &\approx x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \dots, \end{aligned}$$

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots ,$$

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \dots ,$$

Príklady

Príklad 46. Elementárne funkcie. Vypočítaj derivácie nasledovných funkcií:

- | | | |
|-------------------------|--------------------------------------|--|
| a. 654 | i. $100 \cos(1,1x)$ | p. $6 \sinh(2x)$ |
| b. x^7 | j. $\frac{2}{5} \tan(5x)$ | q. $2,5 \cosh\left(\frac{x}{8}\right)$ |
| c. $6x^{-2,2}$ | k. $P \cotg(Sx)$ | r. $8 \tanh(5x)$ |
| d. 15^{2x} | l. $2 \arcsin(x/5)$ | s. $F \cotgh(xG)$ |
| e. $e^{x/5}$ | m. $1,1R \arccos(W^5 x)$ | |
| f. $A \log_3 2x$ | n. $A \arctan(xB)$ | |
| g. $B \ln \frac{3x}{2}$ | o. $C \operatorname{arccotg}(D^2 x)$ | |
| h. $2 \sin(3x)$ | | |

Riešenie.

- a. $(654)' = 0$
- b. $(x^7)' = 7x^6$
- c. $(6x^{-2,2})' = -2,2 \times 6x^{-3,2} = -13,2x^{-3,2}$
- d. $(15^{2x})' = 15^{2x} \ln 15 \times (2x)' = 2 \ln 15 \times 15^{2x}$
- e. $(e^{x/5})' = e^{x/5} \times (x/5)' = \frac{e^{x/5}}{5}$
- f. $(A \log_3 2x)' = A \frac{1}{2x \ln 3} (2x)' = \frac{A}{x \ln 3}$
- g. $\left(B \ln \frac{3x}{2}\right)' = B \frac{1}{3x/2} (3x/2)' = \frac{B}{x}$
- h. $(2 \sin(3x))' = 2 \cos(3x) \times (3x)' = 6 \cos(3x)$
- i. $(100 \cos(1,1x))' = -100 \sin(1,1x) \times (1,1x)' = -110 \sin(1,1x)$

$$\text{j. } \left(\frac{2}{5} \tan(5x) \right)' = \frac{2}{5} \frac{1}{\cos^2(5x)} (5x)' = \frac{2}{\cos^2(5x)}$$

$$\text{k. } (P \cot g(Sx))' = -P \frac{1}{\sin^2(Sx)} (Sx)' = \frac{-PS}{\sin^2(Sx)}$$

$$\text{l. } (2 \arcsin(x/5))' = 2 \frac{1}{\sqrt{1-(x/5)^2}} (x/5)' = \frac{2}{5} \frac{1}{\sqrt{1-x^2/25}}$$

$$\text{m. } (1,1R \arccos(W^5 x))' = -1,1R \frac{1}{\sqrt{1-(W^5 x)^2}} (W^5 x)' = \frac{-1,1RW^2}{\sqrt{1-W^4 x^2}}$$

$$\text{n. } (A \arctan(xB))' = \frac{A}{1+(xB)^2} (xB)' = \frac{AB}{1+(xB)^2}$$

$$\text{o. } (C \operatorname{arccotg}(D^2 x))' = \frac{-C}{1+(D^2 x)^2} (D^2 x)' = \frac{-CD^2}{1+(D^2 x)^2}$$

$$\text{p. } (6 \sinh(2x))' = 6 \cosh(2x) \times (2x)' = 12 \cosh(2x)$$

$$\text{q. } \left(2,5 \cosh\left(\frac{x}{8}\right) \right)' = 2,5 \sinh\left(\frac{x}{8}\right) \times \left(\frac{x}{8}\right)' = \frac{2,5}{8} \sinh\left(\frac{x}{8}\right)$$

$$\text{r. } (8 \tanh(5x))' = \frac{8}{\cosh^2(5x)} (5x)' = \frac{40}{\cosh^2(5x)}$$

$$\text{s. } (F \operatorname{cotgh}(xG))' = \frac{-F}{\sinh^2(xG)} (xG)' = \frac{-FG}{\sinh^2(xG)}$$

Poznámka. Všetky prípady v predošlom príklade by každý mal absolútne zvládnuť. Ak je študentovi povolené používať tabuľku derivácií elementárnych funkcií, príklady tohto typu by mal vedieť počítať takmer metódou „pozriem a vidím“.

Príklad 47. Súčet, rozdiel, súčin, podiel funkcií. Vypočítaj derivácie nasledovných funkcií:

- | | | |
|------------------------|------------------------|------------------------------|
| a. $x \sin x$ | e. $x^{200} - 200^x$ | i. $\arcsin 5x + \arccos 5x$ |
| b. $\sin^2 x + \cos x$ | f. $e^x \cotg x$ | j. $\frac{e^{5x}}{\cosh x}$ |
| c. $\frac{\cos x}{x}$ | g. $2^x \ln x$ | k. $\frac{5}{\cotgh x}$ |
| d. $\tan^2 x$ | h. $\frac{x}{\sinh x}$ | l. $e^x \arctan x$ |

Riešenie.

- a. $(x \sin x)' = x' \sin x + x(\sin x)' = \sin x + x \cos x$
- b. $(\sin^2 x + \cos x)' = 2 \sin x (\sin x)' - \sin x = 2 \sin x \cos x - \sin x = \sin x (2 \cos x - 1)$
- c. $\left(\frac{\cos x}{x}\right)' = \frac{(\cos x)' x - \cos x \cdot x'}{x^2} = -\frac{x \sin x + \cos x}{x^2}$
- d. $(\tan^2 x)' = (\tan x \cdot \tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \tan x + \tan x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = 2 \frac{\tan x}{\cos^2 x}$
- e. $(x^{200} - 200^x)' = 200x^{199} - 200^x \ln 200$
- f. $(e^x \cotg x)' = (e^x)' \cotg x + e^x (\cotg x)' = e^x \cotg x - \frac{e^x}{\sin^2 x} = e^x \left(\cotg x - \frac{1}{\sin^2 x} \right)$
- g. $(2^x \ln x)' = (2^x)' \ln x + 2^x (\ln x)' = 2^x \ln 2 \ln x + \frac{2^x}{x} = 2^x \left(\ln 2 \ln x + \frac{1}{x} \right)$
- h. $\left(\frac{x}{\sinh x}\right)' = \frac{x' \sinh x - x(\sinh x)'}{\sinh^2 x} = \frac{\sinh x - x \cosh x}{\sinh^2 x}$
- i. $(\arcsin 5x + \arccos 5x)' = \frac{(5x)'}{\sqrt{1-(5x)^2}} + \frac{-(5x)'}{\sqrt{1-(5x)^2}} = 0$

$$j. \left(\frac{e^{5x}}{\cosh x} \right)' = \frac{(e^{5x})' \cosh x - e^{5x} \sinh x}{\cosh^2 x} = e^{5x} \frac{5 \cosh x - \sinh x}{\cosh^2 x}$$

$$k. \left(\frac{5}{\cot gh x} \right)' = \frac{0 \cdot \cot gh x - 5 \cdot \frac{-1}{\sinh^2 x}}{\cot^2 gh x} = \frac{5}{\cot^2 gh x \cdot \sinh^2 x}$$

$$l. (e^x \arctan x)' = (e^x)' \arctan x + e^x (\arctan x)' = e^x \arctan x + \frac{e^x}{1+x^2} = e^x \left(\arctan x + \frac{1}{1+x^2} \right)$$

Poznámka. Keďže všetky prípady z tohto príkladu sú len súčtom, rozdielom, súčinom alebo podielom elementárnych funkcií, a to nanajvýš dvoch, takéto príklady by študent tiež mal zvládnuť podľa mňa aspoň na 80%.

Príklad 48. Zložené funkcie. Vypočítaj derivácie nasledovných funkcií:

a. $\tan x^2$

d. $\sin \sin \sin x$

b. $\log_4 \sqrt{x}$

e. $\arcsin(x^{10})$

c. $\tanh \frac{1}{x}$

f. $10^{\arccos x}$

g. $\operatorname{arccotg} x^{2,5}$

Riešenie.

a. $(\tan x^2)' = \frac{1}{\cos^2 x^2} (x^2)' = \frac{2x}{\cos^2 x^2}$

b. $(\log_4 \sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{x} \ln 4} (\sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{x} \ln 4} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) = \frac{1}{2x \ln 4} = \frac{1}{x \ln 16}$

c. $\left(\tanh \frac{1}{x} \right)' = \frac{1}{\cosh^2 \frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x} \right)' = -\frac{1}{x^2 \cosh^2 \frac{1}{x}}$

d. $(\sin \sin \sin x)' = \cos(\sin \sin x) (\sin \sin x)' = \cos(\sin \sin x) \cos(\sin x) (\sin x)' = \cos(\sin \sin x) \cos(\sin x) \cos x$

e. $(\arcsin(x^{10}))' = \frac{1}{\sqrt{1-(x^{10})^2}} (x^{10})' = \frac{10x^9}{\sqrt{1-x^{20}}}$

$$f. \quad (10^{\arccos x})' = 10^{\arccos x} \ln 10 (\arccos x)' = \frac{-10^{\arccos x} \ln 10}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$g. \quad (\operatorname{arccotg} x^{2,5})' = \frac{-1}{\sinh^2 x^{2,5}} (x^{2,5})' = \frac{-2,5 x^{1,5}}{\sinh^2 x^{2,5}}$$

Poznámka. Zložená funkcia sa vo všeobecnosti berie ako dosť zložitá vec. Ak je funkcia zložená z viac ako dvoch funkcií, výpočet derivácie je dosť neprehľadný. Študent by takéto príklady mal podľa mňa zvládnuť aspoň na polovicu.

Príklad 49. Neštandardné funkcie. Vypočítaj derivácie nasledovných funkcií:

a. x^x

d. $\ln x^{\ln x}$

b. $x^{\sin x}$

e. $\ln^{\ln x} x$

c. $\cos^x x$

Riešenie.

a. $(x^x)' = (e^{\ln x^x})' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} (x \ln x)' = x^x (x' \ln x + x(\ln x)') = x^x (\ln x + 1)$

b. $(x^{\sin x})' = (e^{\sin x \ln x})' = e^{\sin x \ln x} (\sin x \ln x)' = x^{\sin x} ((\sin x)' \ln x + \sin x (\ln x)') =$
 $= x^{\sin x} \left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right)$

c. $(\cos^x x)' = (e^{x \ln \cos x})' = e^{x \ln \cos x} (x \ln \cos x)' = \cos^x x (\ln \cos x + x(\ln \cos x)') =$
 $= \cos^x x (\ln \cos x - x \tan x)$

d. $(\ln x^{\ln x})' = (\ln x \cdot \ln x)' = (\ln^2 x)' = 2 \ln x (\ln x)' = \frac{2 \ln x}{x}$

e. $(\ln^{\ln x} x)' = (e^{\ln x \cdot \ln \ln x})' = e^{\ln x \cdot \ln \ln x} (\ln x \cdot \ln \ln x)' = \ln^{\ln x} x ((\ln x)' \ln \ln x + \ln x (\ln \ln x)') =$
 $= \ln^{\ln x} x \left(\frac{\ln \ln x}{x} + \frac{1}{x} \right) = \frac{\ln^{\ln x} x}{x} (\ln \ln x + 1)$

Príklad 50. Vypočítaj derivácie nasledovných funkcií:

- a. $|x|$
- b. $|x + 5|$
- c. $|x|, x \in \langle -5; -3 \rangle$
- d. $\sqrt{x}, x \in \langle -5; 5 \rangle$
- e. $\frac{x}{x}$

Riešenie.

- a. Deriváciu nie je možné vypočítať, pretože v bode 0 derivácia neexistuje. Na funkcii je zlom.
- b. Deriváciu nie je možné vypočítať, pretože v bode -5 derivácia neexistuje. Na funkcii je zlom.
- c. $(|x|): x \in \langle -5; -3 \rangle \Leftrightarrow (-x): x \in \langle -5; -3 \rangle$, preto $(-x)' = 1$. Hoci je na funkcii zlom, deriváciu máme počítať len na intervale, kde tento zlom nie je. V každom bode zadaného intervalu derivácia existuje.
- d. Deriváciu nie je možné vypočítať, pretože zadaný interval nie je podmnožinou definičného oboru.
- e. Deriváciu nie je možné vypočítať, pretože v bode 0 funkcia nie je definovaná. Ale

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}: \left(\frac{x}{x}\right)' = (1)' = 0.$$

Poznámka. Pri obvyklých príkladoch sa neudáva interval, na ktorom máme počítať deriváciu. V tomto prípade sa vždy postupuje tak, že sa derivácia počíta na definičnom obore. Iba ak sa stane, že máme presne zadaný interval záujmu, treba sa mať na pozore. Môže sa stať, že derivácia nebude existovať, alebo že funkcia nebude na danom intervale existovať. Môže sa ale stať, že je zadaný interval, na ktorom deriváciu je možné vypočítať, hoci na definičnom obore to možné nie je.

Príklad 51. Vyššie derivácie. Vypočítaj derivácie nasledovných funkcií:

- a. $(\sin x)''''$
- b. $(e^x)^{(20)}$
- c. $(e^{2x})^{(20)}$
- d. $(x^{230})^{(230)}$

e. $(x^{230})^{(231)}$ g. $(\sinh x)'''$
f. $(\ln x)'''$ h. $(\arcsin x)''$

Riešenie.

a. $(\sin x)'''' = (\cos x)''' = (-\sin x)'' = (-\cos x)' = \sin x$
b. $(e^x)^{(20)} = (e^x)^{(19)} = (e^x)^{(18)} = \dots = e^x$
c. $(e^{2x})^{(20)} = 2(e^{2x})^{(19)} = 4(e^{2x})^{(18)} = 2^{20} e^{2x}$
d. $(x^{230})^{(230)} = 230(x^{229})^{(229)} = 230.229(x^{228})^{(228)} = 230.229.228(x^{227})^{(227)} = \dots = 230!$
e. $(x^{230})^{(231)} = 0$
f. $(\ln x)''' = \left(\frac{1}{x}\right)'' = (x^{-1})' = (-x^{-2})' = 2x^{-3}$
g. $(\sinh x)''' = (\cosh x)'' = (\sinh x)' = \cosh x$
h. $(\arcsin x)' = \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)' = \left((1-x^2)^{-1/2}\right)' = -1/2 \cdot (1-x^2)^{-3/2} \cdot (-x^2)' = x(1-x^2)^{-3/2} = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

Príklad 52. L'Hospitalovo pravidlo. Vypočítaj nasledovné limity:

a. $\lim_{\varphi \rightarrow -\pi} \frac{\tan(11\varphi)}{\tan(5\varphi)}$ f. $\lim_{\varphi \rightarrow \infty} \frac{(\arctan \varphi - \pi/2)}{\varphi^3}$ j. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{1-x^2}}$ o. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}$
b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ k. $\lim_{\varphi \rightarrow \pi} \frac{\sin(3\varphi)}{\sin(-8\varphi)}$ p. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x - 1}$
c. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x}}{x^2}$ g. $\lim_{\varphi \rightarrow \pi/2} \frac{\cos(3\varphi)}{\cos(9\varphi)}$ l. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x}$ q. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{\sin x}$
d. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$ h. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{e^x}$ m. $\lim_{\varphi \rightarrow \pi} \frac{\cos \varphi + 1}{\sin \varphi}$ r. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2} - 1}{x}$
e. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ i. $\lim_{\varphi \rightarrow \pi/2} \frac{\cotg(\varphi)}{\cotg(5\varphi)}$ n. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh^2 x}{x}$ s. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln x}$

t. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x}$

u. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tanh x}$

v. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^2 x}{x^2}$

Riešenie.

a. $\lim_{\varphi \rightarrow -\pi} \frac{\tan(11\varphi)}{\tan(5\varphi)} = \lim_{\varphi \rightarrow -\pi} \frac{11 \cos^2(5\varphi)}{5 \cos^2(11\varphi)} = \frac{11}{5}$

m. $\lim_{\varphi \rightarrow \pi} \frac{\cos \varphi + 1}{\sin \varphi} = \lim_{\varphi \rightarrow \pi} \frac{-\sin \varphi}{\cos \varphi} = 0$

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$

n. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh^2 x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (2 \sinh x \cdot \cosh x) = 0$

c. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-e^{-x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x}}{2} = 0$

o. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2\sqrt{(1+x^2)^3}} = 0$

d. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1$

p. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sinh x \cdot \cosh x}{2 \sinh x \cdot \cosh x} = 1$

e. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$

q. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x}{\cos x} = 1$

f. $\lim_{\varphi \rightarrow \infty} \frac{(\arctan \varphi - \pi/2)}{\varphi^3} = \lim_{\varphi \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+\varphi^2)^{3/2}} = 0$

r. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2} - 1}{x} = -\lim_{x \rightarrow 0} (2xe^{-x^2}) = 0$

g. $\lim_{\varphi \rightarrow \pi/2} \frac{\cos(3\varphi)}{\cos(9\varphi)} = \lim_{\varphi \rightarrow \pi/2} \frac{3 \sin(3\varphi)}{9 \sin(9\varphi)} = -\frac{1}{3}$

s. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$

h. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{xe^x} = 0$

t. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$

i. $\lim_{\varphi \rightarrow \pi/2} \frac{\cotg(\varphi)}{\cotg(5\varphi)} = \lim_{\varphi \rightarrow \pi/2} \frac{5 \sin^2(5\varphi)}{\sin^2 \varphi} = 5$

u. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tanh x} = \lim_{x \rightarrow 0} \cosh^2 x = 1$

j. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\sqrt{(1-x^2)^3}}{x} = 0$

v. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^2 x}{x^2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x^2} = 0$

k. $\lim_{\varphi \rightarrow \pi} \frac{\sin(3\varphi)}{\sin(-8\varphi)} = \lim_{\varphi \rightarrow \pi} \frac{3 \cos(3\varphi)}{-8 \cos(8\varphi)} = \frac{3}{8}$

l. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \cosh x = 1$

Príklad 53. Taylorov rad. Vyjadrite Taylorov rad pre nasledujúce funkcie:

a. $\cos(x)$

b. $\cotg(x)$

c. $\frac{1}{(1+x)}$

Riešenie.

a. $\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots,$

b. $\cotg(x) \approx \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} - \frac{2}{945}x^5 - \dots,$

c. $\frac{1}{(1+x)} \approx 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots.$

Lekcia 9 - Priebeh funkcií

Nové pojmy

- a. Lokálne a globálne minimum a maximum, extrém, stacionárny a inflexný bod

Vlastnosti funkcií

Poznámka. V nasledovných vzorcoch sa bude kvôli prehľadnosti vynechávať argument x , teda $f'(x) = f'$.

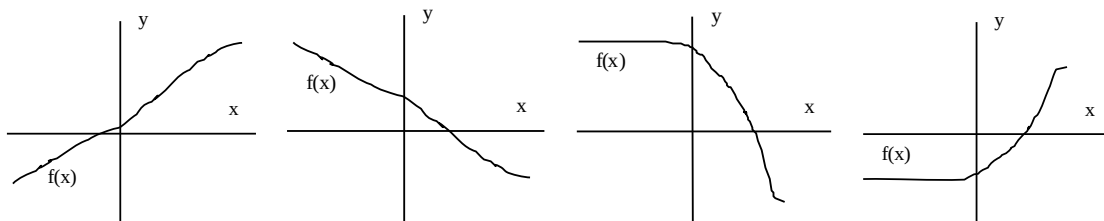
Monotónnosť funkcie (Obr. 46). Nech je funkcia $f(x)$ spojitá na intervale I a má tu deriváciu v každom bode. Potom

Ak $\forall x \in I : f' > 0$, funkcia je rastúca.

Ak $\forall x \in I : f' < 0$, funkcia je klesajúca.

Ak $\forall x \in I : f' = 0$, funkcia je konštantna.

Poznámka. Pre $f' \geq 0$ je funkcia neklesajúca, pre $f' \leq 0$ je funkcia nerastúca.



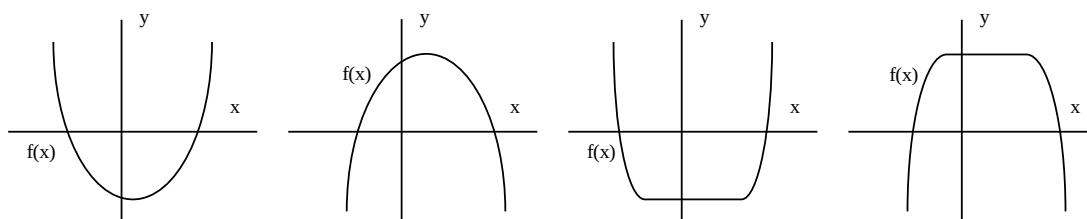
Obr. 46. Zľava: Rastúca, klesajúca, nerastúca a neklesajúca funkcia.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie (Obr. 47). Nech je funkcia $f(x)$ spojitá na intervale I a má tu druhú deriváciu v každom bode. Potom

Ak $\forall x \in I : f'' > 0$, funkcia je rýdzo konvexná.

Ak $\forall x \in I : f'' < 0$, funkcia je rýdzo konkávna.

Poznámka. Pre $f'' \geq 0$ je funkcia „iba“ konvexná, pre $f'' \leq 0$ je funkcia „iba“ konkávna.

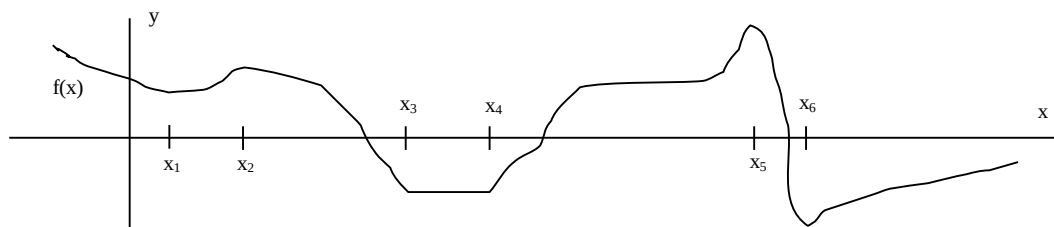


Obr. 47. Zľava: Rýdzo konvexná, rýdzo konkávna, konvexná a konkávna funkcia.

Lokálne minimum (maximum) (Obr. 48). V bode x_0 má funkcia $f(x)$ lokálne minimum (maximum), ak existuje také okolie bodu x_0 , že pre všetky body z tohto okolia platí, že $f(x) \geq f(x_0)$ ($f(x) \leq f(x_0)$). Ak platí ostrá nerovnosť, minimum (maximum) sa volá ostré.

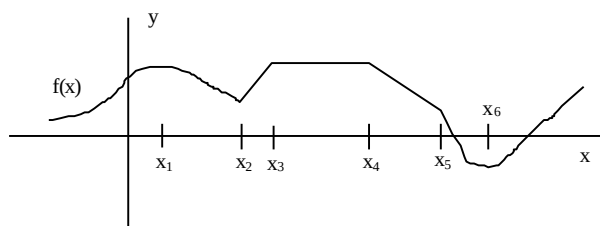
Lokálne extrém (Obr. 48). Lokálne minimum a lokálne maximum sa spoločne volajú lokálne extrém.

Globálne extrém (Obr. 48). Najmenšia hodnota funkcie na celom definičnom obore sa volá globálne minimum. Najväčšia hodnota funkcie na celom definičnom obore sa volá globálne maximum. Globálne minimum a globálne maximum sa spoločne volajú globálne extrém.



Obr. 48. Extrémy funkcie. x_1 – ostré lokálne minimum, x_2 – ostré lokálne maximum, všetky body z intervalu $\langle x_3; x_4 \rangle$ sú lokálne minimá, ale nie ostré, x_5 – ostré globálne maximum, x_6 – ostré globálne minimum.

Stacionárny bod (Obr. 49). Bod, v ktorom $f' = 0$, sa volá stacionárny bod.



Obr. 49. Stacionárne body. x_1, x_6 – stacionárne body. Body intervalu $(x_3; x_4)$ sú tiež stacionárne body, ale body x_3, x_4 nie, pretože sú to body „zlomu“. x_2, x_5 nie sú stacionárne, pretože sú to tiež body „zlomu“ (dotyčnica ku grafu v nich nie je jednoznačná).

Veta. Nech funkcia $f(x)$ má v bode x_0 deriváciu a nech má v tomto bode extrém. Potom platí, že $f'(x_0) = 0$.

Poznámka. Táto veta je iba nutná podmienka na to, aby bol v nejakom bode extrém. Ale nie je to postačujúca podmienka, preto sa veta nedá obrátiť. Z toho vyplýva, že v každom extréme, v ktorom existuje derivácia, je derivácia nulová. Ale „nanešťastie“ neplatí, že by všade, kde nájdeme nulovú deriváciu, bol extrém.

Veta. Nech funkcia $f(x)$ má v bode x_0 prvú deriváciu $f'(x_0) = 0$ a nech v tomto bode existuje druhá derivácia. Potom:

Ak $f''(x_0) > 0$, tak je v bode x_0 ostré lokálne minimum.

Ak $f''(x_0) < 0$, tak je v bode x_0 ostré lokálne maximum.

Poznámka a časté chyby. Prípad $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ tu nie je. V takomto prípade sa o extrémy nedá rozhodnúť iba na základe prvej a druhej derivácie, ale treba počítať derivácie vyššie. Chyby sa najčastejšie vyskytujú preto, pretože sa funkcia nesprávne zderivuje, pretože sa často stáva, že druhá alebo tretia derivácia sú dosť zložité a neprehľadné funkcie.

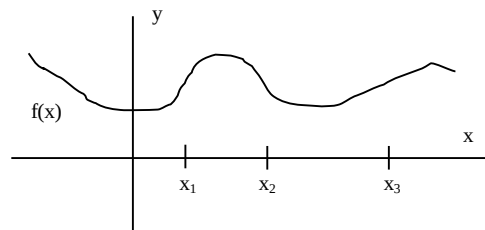
Veta. Nech $0 < k < n$, $n \geq 2$, $k, n \in \mathbb{N}$. Nech $f^{(k)}(x_0) = 0$ a $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Ak n je nepárne, extrém v bode x_0 nie je. Ak n je párne, potom:

Ak $f^{(n)}(x_0) > 0$, tak je v bode x_0 ostré lokálne minimum.

Ak $f^{(n)}(x_0) < 0$, tak je v bode x_0 ostré lokálne maximum.

Poznámka. Táto veta sa používa v prípadoch, keď $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ a o extrémy teda stále nič nevieme. Treba zistiť, ktorá derivácia je ako prvá nenulová a pozrieť sa, či je párna alebo nepárna. Pri nepárnej extrém neexistuje. Pri párnej existuje a či je to minimum alebo maximum, rozhodne to, či je derivácia väčšia alebo menšia ako nula.

Inflexný bod (Obr. 50). Bod x_0 , v ktorom sa funkcia mení z konvexnej na konkávnú alebo z konkávnej na konvexnú, sa volá inflexný bod.



Obr. 50. x_1, x_2, x_3 – inflexné body.

Veta. Ak je v bode x_0 inflexný bod, tak $f''(x_0) = 0$.

Poznámka a časté chyby. Z predošlej vety by sa mohlo stať, že sa stačí pozrieť, či má funkcia v bode x_0 nulovú druhú deriváciu a máme inflexný bod. Toto však neplatí vždy, veta platí iba v jednom smere.

Postup pri vyšetrovaní priebehu funkcie

Treba zistiť:

- Definičný obor a obor hodnôt
- Body nespojitosti, nulové a stacionárne body
- Intervaly monotónnosti
- Intervaly konvexnosti a konkávnosti
- Lokálne a globálne extrémny
- Inflexné body
- Asymptoty

Poznámka. Toto poradie je len orientačné, ale zodpovedá pohodlnému a logickému postupu. Nie vždy je to ale možné. Napríklad niekedy obor hodnôt nevieme vypočítať len na základe predpisu funkcie, ale môžu pomôcť minimá a maximá.

Príklady

Príklad 54. Vyšetři priebeh funkcie $y = \frac{x}{x-2}$.

Riešenie (Obr. 51). Postupujeme podľa schémy.

Definičný obor. Definičný obor je všetko, čo má zmysel dosadiť za x . Teda $D(y) = \mathbb{R} - \{2\}$.

Obor hodnôt. Nájdeme ho tak, že nájdeme definičný obor inverznej funkcie. Inverzná funkcia je $x = \frac{2y}{y-1}$, preto $H(y) = \mathbb{R} - \{1\}$.

Body nespojitosti. Bod nespojitosti je tam, kde funkcia nie je definovaná. Preto $B_N = \{2\}$.

Nulové body. Nájdeme ich tak, že funkciu položíme rovnú nule. Teda $\frac{x}{x-2} = 0$.
Riešime metódou „pozriem a vidím“ alebo korektnejšie ekvivalentnými úpravami takto:
 $\frac{x}{x-2} = \frac{x-2+2}{x-2} = 1 + \frac{2}{x-2} = 0$, preto $2 = 2 - x$, teda $x = 0$. Z toho vyplýva, že nulový bod je bod $[0;0]$.

Stacionárne body. Deriváciu položíme rovnú nule: $\left(\frac{x}{x-2}\right)' = \frac{-2}{(x-2)^2} = 0$. Táto rovnica ale rovná nule nie je nikdy, pretože čitateľ je jasne záporný a menovateľ kvôli druhej mocnine vždy kladný (okrem bodu $x = 0$, ale o tom už vieme, že je nulový bod). Stacionárne body táto funkcia teda nemá.

Intervaly monotónnosti. Bod nespojitosti rozdelil záujmovú oblasť na dva intervaly. Lenže z vyšetrenia stacionárnych bodov vyplynulo, že prvá derivácia je záporná aj pre $x < 2$, aj pre $x > 2$. Preto funkcia je klesajúca na intervale $(-\infty; 2)$ a na intervale $(2; \infty)$.

Poznámka. Keby niekto napísal, že funkcia je klesajúca na zjednotení týchto intervalov, mýlil by sa, pretože napríklad na intervale $\langle -3; 3 \rangle$ funkcia klesajúca nie je (stačí dosadiť do predpisu funkcie bod menší a väčší od 2).

Intervaly konvexnosti a konkávnosti. Vypočítame druhú deriváciu:

$$\left(\frac{x}{x-2}\right)'' = \left(\frac{-2}{(x-2)^2}\right)' = \frac{4}{(x-2)^3}.$$

Teraz zistíme, kde je druhá derivácia menšia ako nula. Čitateľ je kladný, preto výsledok závisí len od menovateľa. Ten je kladný pre $x > 2$, pretože podľa lekcie 2 je to kubická funkcia, posunutá o hodnotu 2 doprava. Preto funkcia je rýdzo konvexná na intervale $(2; \infty)$. Rýdzo konkávna je na intervale $(-\infty; 2)$.

Lokálne a globálne extrém. Z vyšetrenia stacionárnych bodov vyplýva, že prvá derivácia nie je nikde nulová, preto lokálne ani globálne extrém funkcia nemá (jediný podozrivý bod $x = 2$ je bod nespojitosti).

Inflexné body. Z vyšetrenia konvexnosti a konkávnosti vyplýva, že druhá derivácia nie je nikde nulová, preto funkcia nemá inflexné body (jediný podozrivý bod $x = 2$ je bod nespojitosti).

Asymptoty. Asymptoty bez smernice zistíme pomocou jednostranných limit v bodoch nespojitosti $x = a$ ($a \in \mathbb{R}$): $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$ a $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$. Ak platí aspoň jedna z uvedených podmienok, potom funkcia má v skúmanom bode nespojitosti asymptotu bez smernice s rovnicou $x = a$. Zistili sme, že: $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{x-2} = \infty$ a

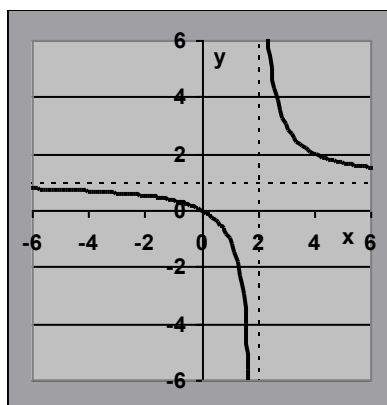
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{x-2} = -\infty, \text{ teda v bode } 2 \text{ je asymptota bez smernice, ktorej rovnica je } x = 2.$$

Asymptoty so smernicou majú rovnicu $y = kx + q$. Smernicu k a koeficient q zistíme pomocou limit v nevlastných bodoch $(-\infty \text{ aj } \infty)$, ktoré musia byť vlastné. V opačnom prípade, ak sú tieto limity nevlastné (rovné $\pm\infty$), funkcia nemá asymptoty so smernicou.

$$\text{Teda } k_{1,2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x-2} = 0 \quad \text{a} \quad q_{1,2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - k_{1,2}x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x}{x-2}\right) = 1.$$

Funkcia má teda jednu asymptotu so smernicou. Rovnica tejto asymptoty je $y = 1$.

Záver. Na základe predošlých výsledkov je možné načrtnúť graf:



Obr. 51. Graf funkcie $y = \frac{x}{x-2}$.

Príklad 55. Vyšetři priebeh funkcie $y = x + \frac{1}{x}$.

Riešenie (Obr. 52). Postupujeme podľa schémy.

Definičný obor. Definičný obor je všetko, čo má zmysel dosadiť za x . Teda $D(y) = \mathbb{R} - \{0\}$.

Obor hodnôt. Nájdeme ho tak, že nájdeme definičný obor inverznej funkcie.

Inverzná funkcia je $x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4}}{2}$ (z predpisu vidno, že toto nie je funkcia, pretože pre jedno x sú definované dve hodnoty y , ale definičný obor môžeme určiť). Preto $H(y) = (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$.

Body nespojitosti. Bod nespojitosti je tam, kde funkcia nie je definovaná. Preto $B_N = \{0\}$.

Nulové body. Nájdeme ich tak, že funkciu položíme rovnú nule. Teda $x + \frac{1}{x} = 0$.

Po úprave máme $x^2 + 1 = 0$, ale táto rovnica nemá riešenie v obore reálnych čísel, preto nulové body funkcia nemá.

Poznámka. Použil som neekvivalentnú úpravu (násobenie x), ale to nie je problém, pretože prípad $x = 0$ už máme vyriešený. Vieme, že je to bod nespojitosti.

Stacionárne body. Prvú deriváciu položíme rovnú nule:

$y' = \left(x + \frac{1}{x}\right)' = 1 - \frac{1}{x^2} = 0$. Z tohto vyplýva, že $\frac{1}{x^2} = 1$. Stacionárne body sú teda dva: $x = \pm 1$.

Intervaly monotónnosti. Bod nespojitosti a stacionárne body rozdelili záujmovú oblasť na štyri intervaly: $(-\infty; -1)$, $(-1; 0)$, $(0; 1)$, $(1; \infty)$. Intervaly rastu a klesania zistíme tak, že dosadíme akékoľvek číslo z jednotlivých intervalov a zistíme, či je v nich prvá derivácia kladná alebo záporná. Zvolíme, napríklad, hodnoty $\{-2; -0,5; 0,5; 2\}$. Dosadíme a máme $y'(-2) = 0,75 > 0$, $y'(-0,5) = -3 < 0$, $y'(0,5) = -3 < 0$, $y'(2) = 0,75 > 0$. Preto na intervale $(-\infty; -1)$ je funkcia rastúca, na intervale $(-1; 0)$ klesajúca, na intervale $(0; 1)$ klesajúca a na intervale $(1; \infty)$ rastúca.

Intervaly konvexnosti a konkávnosti. Vypočítame druhú deriváciu:

$y'' = \left(x + \frac{1}{x}\right)'' = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)' = 2x^{-3}$. Táto funkcia je podľa lekcie 2 kladná pre kladné reálne čísla a záporná pre záporné reálne čísla (v nule nie je definovaná). Preto na intervale $(-\infty; 0)$ je funkcia rýdzo konkávna a na intervale $(0; \infty)$ je rýdzo konvexná.

Lokálne a globálne extrém. Z vyšetrenia stacionárnych bodov vyplýva, že prvá derivácia je nulová pre $x = \pm 1$. Z vyšetrenia konvexnosti a konkávnosti už máme aj druhú deriváciu. Druhá derivácia v stacionárnych bodoch je: $y''(-1) = -2 < 0$ a $y''(1) = 2 > 0$. Preto v bode $x = -1$ je ostré lokálne maximum a v bode $x = 1$ je ostré lokálne minimum. Globálne extrém funkcia nemá.

Poznámka. Ako viem, že je ostré? Tak, že stacionárny bod je osamotený, nie je to interval stacionárnych bodov.

Inflexné body. Z vyšetrenia konvexnosti a konkávnosti vyplýva, že druhá derivácia je nulová iba v bode $x = 0$: $y''(0) = 0$. Ale toto je bod nespojitosti, preto inflexné body funkcia nemá.

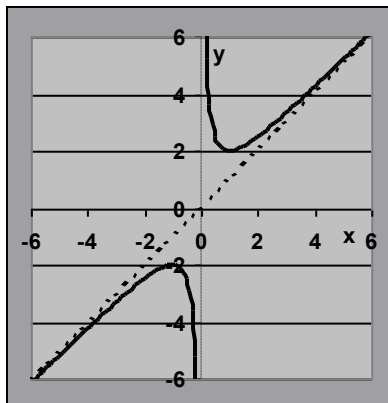
Asymptoty. Asymptoty bez smernice zistíme pomocou jednostranných limit v bode nespojitosti: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x + \frac{1}{x}\right) = \infty$ a $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x + \frac{1}{x}\right) = -\infty$. Limity sú nevlastné, preto má funkcia asymptotu bez smernice, ktorej rovnica je $x = 0$. Smernicu a kvocient pre

asymptoty so smernicou (rovnicou $y = kx + q$) zistíme pomocou limit:

$$k_{1,2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1, \quad q_{1,2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - k_{1,2}x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(x + \frac{1}{x} - x\right) = 0.$$

Rovnica tejto asymptoty je $y = x$.

Záver. Na základe predošlých výsledkov je možné načrtnúť graf:



Obr. 52. Graf funkcie $y = x + \frac{1}{x}$.

Príklad 56. Vyšetři priebeh funkcie $y = x^3 - 3x$.

Riešenie (Obr. 53). Postupujeme podľa schémy.

Definičný obor. Definičný obor je všetko, čo má zmysel dosadiť za x . Teda $D(y) = \mathbb{R}$.

Obor hodnôt. Je to kubická (prípadne polynomickeá) funkcia, preto podľa lekcie 2 je $H(y) = \mathbb{R}$.

Body nespojitosti. Bod nespojitosti je tam, kde funkcia nie je definovaná. Preto $B_N = \{\}$.

Nulové body. Nájdeme ich tak, že funkciu položíme rovnú nule. Teda $x^3 - 3x = 0$, z toho $x^2 - 3 = 0$, preto $x = \pm\sqrt{3}$. Použil som ale neekvivalentnú úpravu, preto treba oddelene overiť bod $x = 0$. Dosadím ho do predpisu funkcie a mám $y(0) = 0$, preto nulové body sú až tri: $\{-\sqrt{3}; 0; \sqrt{3}\}$.

Stacionárne body. Prvú deriváciu položíme rovnú nule: $y' = 3x^2 - 3 = 0$, preto $x = \pm 1$.

Intervaly monotónnosti. Stacionárne body rozdelili záujmovú oblasť na tri intervaly: $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$, $(1; \infty)$. Intervaly rastu a klesania zistíme tak, že dosadíme akékoľvek číslo z jednotlivých intervalov a zistíme, či je v nich prvá derivácia kladná alebo záporná. Zvolíme, napríklad, hodnoty $\{-2; 0; 2\}$. Dosadíme a máme $y'(-2) = 9 > 0$, $y'(0) = -3 < 0$, $y'(2) = 9 > 0$. Preto na intervale $(-\infty; -1)$ je funkcia rastúca, na intervale $(-1; 1)$ je klesajúca a na intervale $(1; \infty)$ je rastúca.

Intervaly konvexnosti a konkávnosti. Vypočítame druhú deriváciu: $y'' = 6x$. Táto funkcia je podľa lekcie 2 kladná pre kladné reálne čísla a záporná pre záporné reálne čísla. Preto na intervale $(-\infty; 0)$ je funkcia rýdzo konkávna a na intervale $(0; \infty)$ je rýdzo konvexná.

Lokálne a globálne extrém. Z vyšetrenia stacionárnych bodov vyplýva, že prvá derivácia je nulová pre $x = \pm 1$. Z vyšetrenia konvexnosti a konkávnosti už máme aj druhú deriváciu. Druhá derivácia v stacionárnych bodoch je: $y''(-1) = -6 < 0$, $y''(1) = 6 > 0$. Preto v bode $x = -1$ je ostré lokálne maximum a v bode $x = 1$ je ostré lokálne minimum. Globálne extrém funkcia nemá.

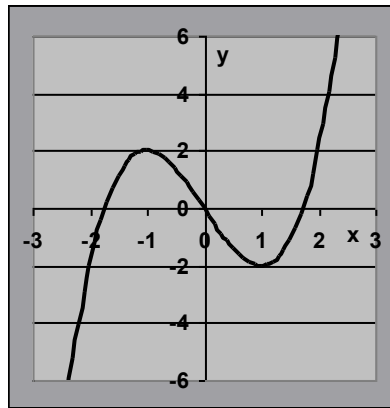
Poznámka. Ako viem, že je ostré? Tak, že stacionárny bod je osamotený, nie je to interval stacionárnych bodov.

Inflexné body. Z vyšetrenia konvexnosti a konkávnosti vyplýva, že druhá derivácia je nulová iba v bode $x = 0$: $y''(0) = 0$. Navyše sa v tomto bode mení funkcia z konkávnej na konvexnú, preto v bode $x = 0$ je inflexný bod.

Asymptoty. Asymptoty bez smernice nie sú, pretože funkcia je spojitá pre $\forall \mathbb{R}$. Smernicou pre asymptoty so smernicou (rovnicou $y = kx + q$) zistíme pomocou limit:

$k_{1,2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^2 - 3) = \infty$. Limity sú nevlastné, preto funkcia nemá ani asymptoty so smernicou.

Záver. Na základe predošlých výsledkov je možné načrtnúť graf:



Obr. 53. Graf funkcie $y = x^3 - 3x$.

Príklad 57. Vyšetři priebeh funkcie $y = x^2 e^{-x^2}$.

Riešenie (Obr. 54). Postupujeme podľa schémy.

Definičný obor. Definičný obor je všetko, čo má zmysel dosadiť za x . Teda $D(y) = \mathbb{R}$.

Obor hodnôt. Zistiť obor hodnôt pomocou inverznej funkcie tu nie je ľahké, pretože osamostatniť x z rovnice sa nedá. Necháme si teda zistenie oboru hodnôt na koniec.

Body nespojitosti. Bod nespojitosti je tam, kde funkcia nie je definovaná. Preto $B_N = \{\}$.

Nulové body. Nájdeme ich tak, že funkciu položíme rovnú nule. Teda $y = x^2 e^{-x^2} = 0$. To je len pre $x = 0$, pretože e^{-x^2} je vždy kladné.

Stacionárne body. Nájdeme ich tak, že prvú deriváciu položíme rovnú nule: Teda $y' = 2xe^{-x^2} + x^2 e^{-x^2} (-2x) = 2xe^{-x^2} (1 - x^2) = 0$. Ak sa má súčin funkcií rovnať nule, musí sa alebo rovnať nule prvý člen alebo druhý člen. Prvý člen $2xe^{-x^2} = 0$ pre $x = 0$ a druhý člen $1 - x^2 = 0$ pre $x = \pm 1$. Stacionárne body sú teda $\{-1; 0; 1\}$.

Intervaly monotónnosti. Stacionárne body rozdelili záujmovú oblasť na štyri intervaly: $(-\infty; -1)$, $(-1; 0)$, $(0; 1)$, $(1; \infty)$. Intervaly rastu a klesania zistíme tak, že dosadíme akékoľvek číslo z jednotlivých intervalov a zistíme, či je v nich prvá derivácia kladná alebo záporná. Zvolíme, napríklad, hodnoty $\{-2; -0,5; 0,5; 2\}$. Dosadíme a máme $y'(-2) \cong 0.219788 > 0$, $y'(-0,5) \cong -0.584100587 < 0$, $y'(0,5) \cong 0.584100587 < 0$,

$y'(2) \cong -0.219788 < 0$. Preto na intervale $(-\infty; -1)$ je funkcia rastúca, na intervale $(-1; 0)$ klesajúca, na intervale $(0; 1)$ rastúca a na intervale $(1; \infty)$ klesajúca.

Intervaly konvexnosti a konkávnosti. Vypočítame druhú deriváciu:
 $y'' = 2e^{-x^2} (2x^4 - 5x^2 + 1)$. Prvý člen $2e^{-x^2}$ je vždy kladný, teda len od rovnice štvrtého stupňa v zátvorke závisí, či je rovnica kladná alebo záporná. Riešime substitúciou:
 $x^2 = t$. Preto $2t^2 - 5t + 1 = 0$, z čoho vyplýva, že $t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{4}$. Preto

$x_{1;2;3;4} = \sqrt{t_{1,2}} = \pm \sqrt{\frac{5 \pm \sqrt{17}}{4}}$. Toto sú štyri približné hodnoty nulových bodov druhej

derivácie: $\{-1.510223959; -0.468213192; 0.468213192; 1.510223959\}$. Tieto body rozdelili záujmovú oblasť na päť intervalov: $(-\infty; -1.510223959)$, $(-1.510223959; -0.468213192)$, $(-0.468213192; 0.468213192)$, $(0.468213192; 1.510223959)$, $(1.510223959; \infty)$. Intervaly konvexnosti a konkávnosti zistíme tak, že dosadíme akékoľvek číslo z jednotlivých intervalov a zistíme, či je v nich druhá derivácia kladná alebo záporná. Zvolíme, napríklad, hodnoty $\{-2; -1; 0; 1; 2\}$. Dosadíme a máme $y''(-2) \cong 0.476206611 > 0$, $y''(-1) \cong -1.471517765 < 0$, $y''(0) = 2 > 0$, $y''(1) \cong -1.471517765 < 0$, $y''(2) \cong 0.476206611 > 0$. Preto na intervale $(-\infty; -1.510223959)$ je funkcia rýdzo konvexná, na intervale $(-1.510223959; -0.468213192)$ je funkcia rýdzo konkávna, na intervale $(-0.468213192; 0.468213192)$ je funkcia rýdzo konvexná, na intervale $(0.468213192; 1.510223959)$ je funkcia rýdzo konkávna a na intervale $(1.510223959; \infty)$ je funkcia rýdzo konvexná.

Lokálne a globálne extrém. Z vyšetrenia stacionárnych bodov vyplýva, že prvá derivácia je nulová pre hodnoty $\{-1; 0; 1\}$. Z vyšetrenia konvexnosti a konkávnosti už máme aj druhú deriváciu. Druhá derivácia v stacionárnych bodoch je: $y''(-1) \cong -1.471517765 < 0$, $y''(0) = 2 > 0$ a $y''(1) \cong -1.471517765 < 0$. Preto v bode $x = -1$ je ostré lokálne maximum, v bode $x = 0$ je ostré lokálne minimum a v bode $x = 1$ je ostré lokálne maximum. V bode $x = -1$ a $x = 1$ sú dokonca ostré globálne maximá. Že sú globálne, vieme z toho, že na obe strany od týchto bodov funkcia klesá a už nikde nerastie.

Inflexné body. Z vyšetrenia konvexnosti a konkávnosti vyplýva, že druhá derivácia je nulová iba v bodoch, ktorých približné hodnoty sú $\{-1.510223959; -0.468213192; 0.468213192; 1.510223959\}$. Navyše sa v týchto bodoch mení funkcia z konkávnej na konvexnú a opačne, preto v týchto bodoch sú inflexné body.

Asymptoty. Asymptoty bez smernice nie sú, pretože funkcia je spojitá pre $\forall \mathbb{R}$. Smernicu a kvocient pre asymptoty so smernicou (rovnica $y = kx + q$) zistíme pomocou

$$\text{limit: } k_{1,2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x}{e^{x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1}{2xe^{x^2}} \right) = 0. \quad q_{1,2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - k_{1,2}x) = 0.$$

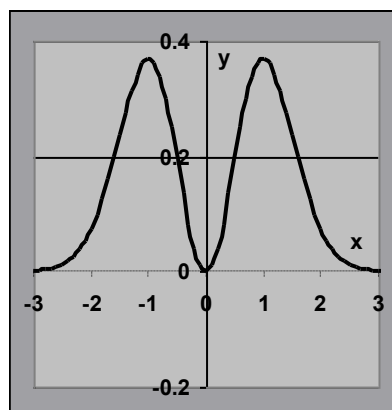
Existuje jedna asymptota so smernicou, ktorej rovnica je $y = 0$.

Poznámka. Pri výpočte smernice som využil L'Hospitalovo pravidlo jedenkrát, pri výpočte parametra q dvakrát.

Poznámka 1. V bode $x = 0$ je dokonca ostré globálne minimum. Že je globálne, vieme z toho, že na obe strany od tohto bodu funkcia na obe strany rastie a po dosiahnutí maxím už klesá len asymptoticky k nule.

Poznámka 2. Teraz sa už dá zistiť aj obor hodnôt. Z predpisu vieme, že funkcia je nezáporná. Z asymptoty sa zistilo, že sa funkcia blíži nekonečne blízko k nule, ale ju nedosiahne. Z vyšetrenia extrémov sa zistilo, že existuje globálne maximum, v ktorom hodnota funkcie je $y(1) \cong 0.367879441$ a existuje aj globálne minimum, v ktorom hodnota je $y(0) = 0$. Preto obor hodnôt je $H(y) = \langle 0; 0.367879441 \rangle$.

Záver. Na základe predošlých výsledkov je možné načrtnúť graf:



Obr. 54. Graf funkcie $y = x^2 e^{-x^2}$.

Poznámka. Tento príklad považujem za ťažší, pretože sa neobvykle zisťoval obor hodnôt, hodnoty, v ktorých sú derivácie nulové, nie sú „pekné“ čísla a bolo treba riešiť rovnicu štvrtého stupňa.

Príklad 58. Vyšetři priebeh funkcií $y_1 = \sin x$ a $y_2 = \cos x$.

Riešenie (Obr. 55). Postupujeme podľa schémy.

Úvod. Preto je zaujímavé riešiť obe funkcie naraz, pretože sú veľmi podobné.

Definičný obor. $D(y_1) = \mathfrak{R}$, $D(y_2) = \mathfrak{R}$.

Obor hodnôt. $H(y_1) = \langle -1; 1 \rangle$, $H(y_2) = \langle -1; 1 \rangle$.

Body nespojitosti. Bod nespojitosti je tam, kde funkcia nie je definovaná. Preto $B_N = \{\}$ pre obe funkcie.

Nulové body. Nájdeme ich tak, že funkciu položíme rovnú nule. Teda $y_1 = \sin x = 0$, preto $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Podobne $y_2 = \cos x = 0$, preto $x = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Jasne teda vidno, že nulové body týchto dvoch funkcií sa pravidelne striedajú.

Stacionárne body. Nájdeme ich tak, že prvú deriváciu položíme rovnú nule: Teda $y_1' = (\sin x)' = \cos x = 0$, preto $x = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Podobne $y_2' = (\cos x)' = -\sin x = 0$, preto $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Je zaujímavé, že nulové body jednej funkcie sú akurát stacionárne body druhej funkcie.

Intervaly monotónnosti. Stacionárne body rozdelili záujmové oblasti oboch funkcií na nekonečne veľa intervalov. Pre funkciu y_1 sa dajú zapísať takto:

$\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)\pi; \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. Pre funkciu y_2 sa dajú zapísať takto: $(k\pi; (k+1)\pi)$,

$k \in \mathbb{Z}$. Intervaly rastu a klesania zistíme tak, že dosadíme akékoľvek číslo z jednotlivých intervalov a zistíme, či je v nich prvá derivácia kladná alebo záporná. Priam sa ponúka dosadiť do derivácie akurát nulové body. Dosadíme a máme $y_1'(k\pi) = \cos(k\pi) = (-1)^k$. Teda na intervaloch pre párne k funkcia $\sin x$ rastie a na intervaloch pre nepárne k klesá. Intervaly rastu sú $\left((4k-1)\frac{\pi}{2}; (4k+1)\frac{\pi}{2}\right)$ a intervaly

klesania sú $\left((4k+1)\frac{\pi}{2}; (4k+3)\frac{\pi}{2}\right)$. Pre druhú funkciu

$$y_2' \left(\left(k + \frac{1}{2} \right) \pi \right) = -\sin \left(\left(k + \frac{1}{2} \right) \pi \right) = (-1)^k. \text{ Teda na intervaloch pre párne } k \text{ funkcia}$$

$\cos x$ klesá a na intervaloch pre nepárne k rastie. Intervaly rastu sú $((2k-1)\pi; 2k\pi)$ a intervaly klesania sú $(2k\pi; (2k+1)\pi)$. Z hraničných bodov intervalov vidno, že sa pre obe funkcie spoločne prekrývajú. Čiže interval, kde jedna funkcia rastie, sa z pohľadu druhej funkcie delí na dve polovice. Na jednej polovici rastie, na druhej klesá.

Intervaly konvexnosti a konkávnosti. Vypočítame druhú deriváciu: $y_1'' = (\sin x)' = -\sin x$. Táto funkcia je kladná na intervaloch $((2k-1)\pi; 2k\pi)$, preto je na nich rýdzo konvexná. Záporná je na intervaloch $(2k\pi; (2k+1)\pi)$, preto je na nich rýdzo konkávna. Pre druhú funkciu je to nasledovne: $y_2'' = (\cos x)' = -\cos x$. Táto funkcia je kladná na intervaloch $\left((4k+1)\frac{\pi}{2}; (4k+3)\frac{\pi}{2}\right)$, preto je na nich rýdzo konvexná. Záporná je na intervaloch $\left((4k-1)\frac{\pi}{2}; (4k+1)\frac{\pi}{2}\right)$, preto je na nich rýdzo konkávna.

Lokálne a globálne extrém. Z vyšetrenia stacionárnych bodov vyplýva, že prvá derivácia je nulová pre hodnoty $x = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$ pre funkciu $y_1 = \sin x$. Pre funkciu $y_2 = \cos x$ sú stacionárne body $x = k\pi$. Z vyšetrenia konvexnosti a konkávnosti už máme aj druhú deriváciu. Druhá derivácia v stacionárnych bodoch je $y_1'' \left(\left(k + \frac{1}{2} \right) \pi \right) = -\sin \left(\left(k + \frac{1}{2} \right) \pi \right) = (-1)^{k+1}$ a $y_2''(k\pi) = -\cos(k\pi) = (-1)^{k+1}$. V stacionárnych bodoch oboch funkcií sa teda striedajú maximá a minimá. Hodnota oboch funkcií vo všetkých stacionárnych bodoch je 1, preto sú to všetko globálne minimá a globálne maximá.

Inflexné body. Z vyšetrenia konvexnosti a konkávnosti vyplýva, že druhá derivácia je nulová presne v nulových bodoch. Toto platí pre obe funkcie. Preto inflexné body funkcie $y_1 = \sin x$ sú v bodoch $x = k\pi$ a inflexné body funkcie $y_2 = \cos x$ sú v bodoch $x = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$.

Asymptoty. Asymptoty bez smernice nie sú, pretože funkcia je spojitá pre $\forall \mathbb{R}$. Smernicu a kvocient asymptoty so smernicou (rovnica $y = kx + q$) zistíme pomocou

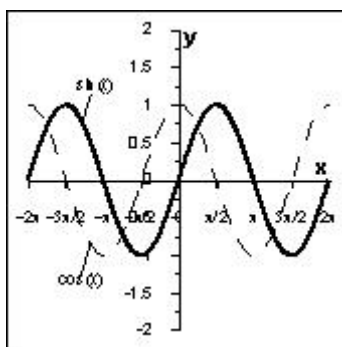
limit: $k_{1,2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y_1}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = 0, \quad k_{3,4} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y_2}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{\cos x}{x} \right) = 0.$

$q_{1,2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y_1 - k_{1,2}x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sin x),$ ale táto limita neexistuje a

$q_{3,4} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y_2 - k_{3,4}x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\cos x),$ a táto limita tiež neexistuje, pretože sú to

rovnomerne oscilujúce periodické funkcie. Preto funkcie asymptoty nemajú.

Záver. Na základe predošlých výsledkov je možné načrtnúť graf:



Obr. 55. Grafy funkcií $y_1 = \sin x$ a $y_2 = \cos x$.

Poznámka. Tento príklad považujem za ťažší, pretože zisťovanie rôznych intervalov bolo neprehľadné.

Príklad 59. Vyšetři priebeh funkcie $y = x + \frac{1}{x^2}$.

Riešenie (Obr. 56). Postupujeme podľa schémy.

Definičný obor. Definičný obor je všetko, čo má zmysel dosadiť za x . Teda $D(y) = \mathbb{R} - \{0\}$.

Obor hodnôt. Zistiť obor hodnôt pomocou inverznej funkcie tu nie je ľahké, pretože je potrebné riešiť kubickú rovnicu. Necháme si teda zistenie oboru hodnôt na koniec.

Body nespojitosti. Bod nespojitosti je tam, kde funkcia nie je definovaná. Preto $B_N = \{0\}$.

Nulové body. Nájdeme ich tak, že funkciu položíme rovnú nule. Teda $x + \frac{1}{x^2} = 0$. Z toho vyplýva, že $x = -1$.

Stacionárne body. Nájdeme ich tak, že prvú deriváciu položíme rovnú nule: Teda $y' = \left(x + \frac{1}{x^2}\right)' = 1 - \frac{2}{x^3} = 0$. Z toho vyplýva, že $x = \sqrt[3]{2}$.

Intervaly monotónnosti. Stacionárny bod a bod nespojitosti rozdelili záujmovú oblasť na tri intervaly: $(-\infty; 0)$, $(0; \sqrt[3]{2})$ a $(\sqrt[3]{2}; \infty)$. Intervaly rastu a klesania zistíme tak, že dosadíme akékoľvek číslo z jednotlivých intervalov a zistíme, či je v nich prvá derivácia kladná alebo záporná. Zvolíme, napríklad, hodnoty $\{-1; 1; 2\}$. Dosadíme a máme $y'(-1) = 3 > 0$, $y'(1) = -1 < 0$, $y'(2) = 0,75 > 0$. Preto na intervale $(-\infty; 0)$ je funkcia rastúca, na intervale $(0; \sqrt[3]{2})$ klesajúca a na intervale $(\sqrt[3]{2}; \infty)$ rastúca.

Intervaly konvexnosti a konkávnosti. Vypočítame druhú deriváciu: $y'' = \left(x + \frac{1}{x^2}\right)'' = \left(1 - \frac{2}{x^3}\right)' = \frac{6}{x^4}$. Druhá derivácia je kladná na celom definičnom obore, preto je funkcia rýdzo konvexná na intervale $(-\infty; 0)$ a na intervale $(0; \infty)$.

Poznámka. Funkcia nie je rýdzo konvexná na definičnom obore, pretože je tu bod nespojitosti druhého druhu v bode $x = 0$.

Lokálne a globálne extrém. Z vyšetrenia stacionárnych bodov vyplýva, že prvá derivácia je nulová pre hodnotu $x = \sqrt[3]{2}$. Z vyšetrenia konvexnosti a konkávnosti už máme aj druhú deriváciu. Druhá derivácia v stacionárnom bode je $y''(\sqrt[3]{2}) = \frac{6}{\sqrt[3]{16}} = 3 \cdot 2^{-1/3} > 0$, preto v bode $x = \sqrt[3]{2}$ je ostré lokálne minimum.

Inflexné body. Z vyšetrenia konvexnosti a konkávnosti vyplýva, že druhá derivácia $y'' = \frac{6}{x^4}$ nie je nulová nikde, preto funkcia inflexný bod nemá.

Asymptoty. Asymptotu bez smernice zistíme pomocou jednosmerných limit v bode nespojitosti: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x + \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x^3 + 1}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{3x^2}{2x}\right) = \infty$ a $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x + \frac{1}{x^2}\right) = \infty$. Limity sú nevlastné, preto funkcia má asymptotu bez smernice, ktorej rovnica je $x = 0$.

Smernica a kvocient asymptoty so smernicou (rovnicou $y = kx + q$) zistíme pomocou

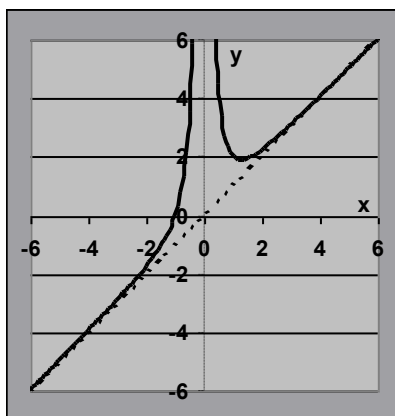
$$\text{limít: } k_{1,2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x^3}\right) = 1, \quad q_{1,2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - k_{1,2}x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1}{x^2}\right) = 0.$$

Rovnica tejto asymptoty je $y = x$.

Poznámka. Pri počítaní asymptoty bez smernice som využil L'Hospitalovo pravidlo.

Poznámka 1. Až z grafu sa dá zistiť, že oborom hodnôt danej funkcie je $H(y) = \mathbb{R}$.

Záver. Na základe predošlých výsledkov je možné načrtnúť graf:



Obr. 56. Graf funkcie $y = x + \frac{1}{x^2}$.

Príklad 60. Vyšetři priebeh funkcie $y = \ln(x^2)$.

Riešenie (Obr. 57). Postupujeme podľa schémy.

Definičný obor. Definičný obor je všetko, čo má zmysel dosadiť za x . Teda $D(y) = \mathbb{R} - \{0\}$.

Obor hodnôt. Nájdeme ho tak, že nájdeme definičný obor inverznej funkcie. Inverzná funkcia je $x = \pm\sqrt{e^y} = \pm e^{y/2}$, preto $H(y) = \mathbb{R}$ (z predpisu vidno, že toto nie je funkcia, pretože pre jedno x sú definované dve hodnoty y , ale definičný obor môžeme určiť).

Body nespojitosti. Bod nespojitosti je tam, kde funkcia nie je definovaná. Preto $B_N = \{0\}$.

Nulové body. Nájdeme ich tak, že funkciu položíme rovnú nule. Teda $\ln(x^2)=0$, teda $x^2 = e^0 = 1$, preto nulové body sú $x = \pm 1$.

Stacionárne body. Prvú deriváciu položíme rovnú nule: $y' = (\ln(x^2))' = \frac{1}{x^2}(x^2)' = \frac{2}{x} = 0$. Táto funkcia nie je rovná nule nikde, preto stacionárne body funkcia nemá (jediný podozrivý bod je $x=0$, ale o tom už vieme, že je to bod nespojitosti).

Intervaly monotónnosti. Bod nespojitosti rozdelil záujmovú oblasť na dva intervaly: $(-\infty; 0)$ a $(0; \infty)$. Intervaly rastu a klesania zistíme tak, že dosadíme akékoľvek číslo z jednotlivých intervalov a zistíme, či je v nich prvá derivácia kladná alebo záporná. Zvolíme, napríklad, hodnoty $\{-1; 1\}$. Dosadíme a máme $y'(-1) = -2 < 0$ a $y'(1) = 2 > 0$. Preto na intervale $(-\infty; 0)$ je funkcia klesajúca a na intervale $(0; \infty)$ je rastúca.

Intervaly konvexnosti a konkávnosti. Vypočítame druhú deriváciu: $y'' = (\ln(x^2))'' = \left(\frac{2}{x}\right)' = -\frac{2}{x^2}$. Keďže je v menovateli druhá mocnina, ktorá je vždy nezáporná, celá funkcia je vždy záporná. Druhá derivácia ale nie je definovaná pre bod $x=0$, preto je funkcia rýdzo konkávna na intervale $(-\infty; 0)$ aj na intervale $(0; \infty)$.

Lokálne a globálne extrém. Z vyšetrenia stacionárnych bodov vyplýva, že prvá derivácia nie je nulová nikde. Preto funkcia nemá extrém (jediný podozrivý bod je $x=0$, ale o tom už vieme, že je to bod nespojitosti).

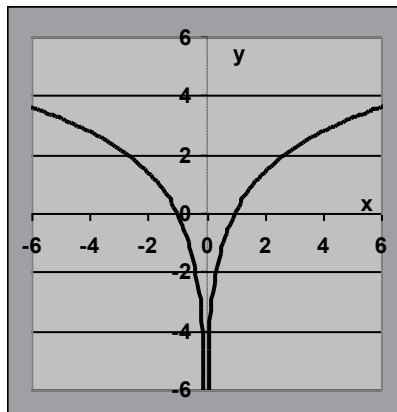
Inflexné body. Z vyšetrenia konvexnosti a konkávnosti vyplýva, že funkcia sa nikde nemení z konvexnej na konkávnu alebo naopak, preto funkcia nemá inflexný bod.

Asymptoty. Asymptotu bez smernice zistíme pomocou jednostranných limit v bode nespojitosti: $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln(x^2)) = -\infty$ a $\lim_{x \rightarrow 0^-} (\ln(x^2)) = -\infty$. Limity sú nevlastné, preto funkcia má asymptotu bez smernice, ktorej rovnica je $x=0$. Smernicu a kvocient asymptoty so smernicou (rovnica $y=kx+q$) zistíme pomocou limit:

$$k_{1,2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{\ln(x^2)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{2}{x^2} \right) = 0,$$

$q_{1,2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - k_{1,2}x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\ln(x^2)) = \infty$. Limita je nevlastná, preto funkcia nemá asymptotu so smernicou.

Záver. Na základe predošlých výsledkov je možné načrtnúť graf:



Obr. 57. Graf funkcie $y = \ln(x^2)$.

Príklad 61. Vyšetři priebeh funkcie $y = \frac{e^x}{x^2}$.

Riešenie (Obr. 58). Postupujeme podľa schémy.

Definičný obor. Definičný obor je všetko, čo má zmysel dosadiť za x . Teda $D(y) = \mathbb{R} - \{0\}$.

Obor hodnôt. Ani čitateľ, ani menovateľ nemôže byť záporný a funkcia ako celok je kladná, preto obor hodnôt sú len kladné čísla, ale nevieme, či je funkcia zhora ohraničená. Preto obor hodnôt doriešim nakoniec.

Body nespojitosti. Bod nespojitosti je tam, kde funkcia nie je definovaná. Preto $B_N = \{0\}$.

Nulové body. Nulové body funkcia nemá, pretože ani čitateľ, ani menovateľ nemôže byť záporný a funkcia ako celok je kladná.

Stacionárne body. Prvú Deriváciu položíme rovnú nule:

$$y' = (e^x x^{-2})' = e^x x^{-2} - 2e^x x^{-3} = e^x \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right) = 0. \text{ Prvý člen nulový nemôže byť, preto}$$

sa stačí zaoberať zátvorkou. $\frac{1}{x^2} = \frac{2}{x^3}$, preto stacionárny bod je $x = 2$.

Intervaly monotónnosti. Bod nespojitosti a stacionárny bod rozdelili záujmovú oblasť na tri intervaly: $(-\infty;0)$, $(0;2)$ a $(2;\infty)$. Intervaly rastu a klesania zistíme tak, že dosadíme akékoľvek číslo z jednotlivých intervalov a zistíme, či je v nich prvá derivácia kladná alebo záporná. Zvolíme, napríklad, hodnoty $\{-1;1;3\}$. Dosadíme a máme $y'(-1) = 3e^{-1} \cong 1.103638 > 0$, $y'(1) = -e \cong -2.71828 < 0$ a $y'(3) = 0.743909 > 0$. Preto na intervale $(-\infty;0)$ je funkcia rastúca, na intervale $(0;2)$ je klesajúca a na intervale $(2;\infty)$ je rastúca.

Intervaly konvexnosti a konkávnosti. Vypočítame druhú deriváciu:

$$y'' = \left(e^x \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right) \right)' = e^x \left(\frac{6}{x^4} - \frac{4}{x^3} + \frac{1}{x^2} \right) = 0.$$

Prvý člen nulový nemôže byť, preto sa stačí zaoberať zátvorkou. $x^2 - 4x + 6 = 0$ nemá riešenie v obore reálnych čísel. Funkcia $f = x^2 - 4x + 6$ je kladná pre všetky reálne čísla, preto funkcia je rýdzo konvexná na intervale $(-\infty;0)$ a na intervale $(0;\infty)$.

Lokálne a globálne extrém. Z vyšetrenia stacionárnych bodov vyplýva, že prvá derivácia je nulová pre $x = 2$. Z vyšetrenia konvexnosti a konkávnosti už máme aj druhú deriváciu, ktorá je všade kladná, preto v bode $x = 2$ je ostré lokálne minimum.

Inflexné body. Z vyšetrenia konvexnosti a konkávnosti vyplýva, že druhá derivácia je všade kladná, preto inflexný bod funkcia nemá.

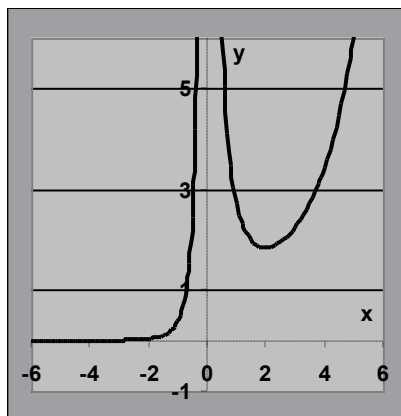
Asymptoty. Asymptotu bez smernice zistíme pomocou jednostranných limit v bode nespojitosti: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^x}{x^2} \right) = \infty$ a $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{e^x}{x^2} \right) = \infty$. Limity sú nevlastné, preto funkcia má asymptotu bez smernice, ktorej rovnica je $x = 0$. Smernicu a kvocient asymptoty so smernicou (rovnica $y = kx + q$) zistíme pomocou limit:

$$k_{1,2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{e^x}{x^3} \right) = 0, \quad q_{1,2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - k_{1,2}x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{e^x}{x^2} \right) = 0.$$

Rovnica tejto asymptoty je $y = 0$.

Obor hodnôt. Zistili sme, že funkcia je kladná, asymptoticky sa blíži k nule, ale ďalšiu asymptotu so smernicou nemá. Preto rastie neobmedzene. Teda $H(y) = \mathbb{R}^+$.

Záver. Na základe predošlých výsledkov je možné načrtnúť graf:



Obr. 58. Graf funkcie $y = \frac{e^x}{x^2}$.

Lekcia 10 – Neurčitý integrál

Nové pojmy

- a. Neurčitý integrál, tabuľkové integrály, integrál súčtu a rozdielu funkcií
- b. Metóda per partes
- c. Substitučná metóda

Tabuľkové integrály

Úvod. Predošlá kapitola sa zaoberala deriváciami. Táto časť matematiky sa volá diferenciálny počet. K deriváciám existuje opačná operácia, ktorá sa nazýva integrál. Táto časť matematiky sa volá integrálny počet. Derivácie a integrály patria nerozlučne k sebe. Spoločne tvoria infinitezimálny počet, pretože sa zaoberajú funkciami z pohľadu nekonečne malých častí. Derivácia funkciu delí na infinitezimálne (nekonečne malé) časti a integrál tieto časti spája a robí z nich súčty.

Neurčitý integrál. Nech funkcia $f(x)$ je deriváciou funkcie $F(x)$ na intervale $(a; b)$. Funkcia $F(x)$ sa volá neurčitý integrál a označuje sa $F(x) = \int f(x)dx$.

Poznámka. V niektorých učebniciach sa neurčitému integrálu hovorí primitívna funkcia. Niektoré knihy tieto dva pojmy nerozlišujú, v niektorých sa uvádza malý rozdiel, ktorý pre bežných prírodovedcov nie je podstatný.

Poznámka. Keď sa počítala derivácia nejakej funkcie, výsledkom bola tiež nejaká funkcia. Bola jedna. Ale naopak, keď sa bude počítať neurčitý integrál, teda sa bude hľadať primitívna funkcia, zistí sa, že k jednej funkcii existuje nekonečne veľa primitívnych funkcií, ktoré sa líšia o konštantu. Je to preto, pretože derivácia konštanty ne nula. Preto je jedno, či zderivujeme funkciu $F(x)$ alebo funkciu $F(x) + c$. Ak c je konštanta, výsledok $f(x)$ je rovnaký. Preto keď zintegrujeme funkciu $f(x)$, objaví sa spolu s funkciou $F(x)$ aj konštanta c .

Tabuľkové integrály (Tab. 2). Tak, ako sa počítali derivácie za pomoci derivácií tabuľkových elementárnych funkcií, tak sa počítajú aj integrály. Rôzne knihy považujú tabuľkové integrály za rôzne, obvykle ich býva asi desať. Všetky ostatné

funkcie sa potom z týchto odvodzajú, ak je to možné. My, aby sme nemuseli toľko odvodzovať, budeme za tabuľkové integrály považovať nasledovné:

$f(x)$	$F(x)$	M
0	c	$\mathbb{R}$
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$	$\alpha \neq -1$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + c, \quad a > 0, \quad a \neq 1$	$\mathbb{R}$
e^x	$e^x + c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + c$	$\mathbb{R} - \{0\}$
$\sin x$	$-\cos x + c$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x + c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cotg x$	$x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + c$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + c =$ $= -\arccos x + c$	$ x < 1$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{arcsinh} x + c =$ $= \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\ln(x + \sqrt{x^2-1}) + c$	$ x > 1$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + c =$ $= -\operatorname{arccotg} x + c$	$\mathbb{R}$

$\frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{arctgh} x + c =$ $= \frac{1}{2} \ln \left \frac{1+x}{1-x} \right + c$	$ x < 1$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{arccotgh} x + c =$ $= \frac{1}{2} \ln \left \frac{x+1}{x-1} \right + c$	$ x > 1$
$\sinh x$	$\cosh x + c$	$\Re$
$\cosh x$	$\sinh x + c$	$\Re$
$\frac{1}{\sinh^2 x}$	$-\operatorname{cotgh} x$	$\Re - \{0\}$
$\frac{1}{\cosh^2 x}$	$\tanh x$	$\Re$

Tab. 2. Integrály elementárnych funkcií.

Poznámka a časté chyby. Takmer každý má problém s tým, že keď derivácia sínusu je kosínus a derivácia kosínusu je mínus sínus, že by to tak malo byť aj pri integrovaní. Ale pozor, znamienka sa tu otočili. Keď už tento fakt človek prijme a osvojí si ho, začne si často myslieť, že aj pri integrovaní hyperbolických funkcií by sa nejaké mínusy mali objaviť. Ale pozor, tu sa žiadne nemenia. Niekedy sa stáva, že pri integrovaní funkcie x^α sa integruje aj vtedy, ak je $\alpha = -1$. Toto by sa stalo, keby sme použili vzorec nasilu: $\int x^{-1} dx = \frac{x^0}{0}$ a toto je čo? Chyba je v tom, že vzorec platí len pre $\alpha \neq -1$.

Poznámka. Derivácia elementárnej funkcie je znova elementárna funkcia. Je to jednoduchý dôsledok, ale dokazuje sa ťažko. Nanešťastie pri integráloch to tak nie je. Niektoré elementárne funkcie po zintegrovaní už nie sú elementárne.

Veta. Ak $\int f(x) dx = F(x) + c$, tak $\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + c$ pre $\forall a, b: a \neq 0$.

Poznámka. Na čo je táto veta dobrá? Spomenieme si, že derivácia zloženej funkcie je derivácia vonkajšej funkcie krát derivácia vnútornej funkcie. Natíska sa myšlienka, že by sa takto aj integrovalo. Pozor! V tom vesmíre, v ktorom žijeme, to

neplatí. Takúto vetu, prispôsobenú na integrovanie, ešte nikto nevymyslel. Dokonca sa dokázalo, že taká veta neexistuje. Preto zložené funkcie integrujeme podľa mnohých pravidiel a mnohých metód a trikov, z ktorých niektoré postupne preberieme. Predošlá veta slúži na to, aby sme pre začiatok vedeli pomocou tabuľkových elementárnych integrálov vypočítať aj integrály elementárnych funkcií, ktoré nie sú v základnom tvare, ale sú posunuté pozdĺž osi x a y . Parameter a (zodpovedný za „rozťahnutie“ alebo „stiahnutie“ grafu v smere osi y) sa prejaví pred primitívnou funkciou v menovateli. Parameter b (zodpovedný za posun grafu v smere osi x) ostane v argumente a inde sa už neprejaví.

Príklad.

$$\int \sin(2x+3)dx = -\frac{1}{2}\cos(2x+3) + c.$$

$$\int \frac{1}{5x-200000} dx = \frac{1}{5} \ln|5x-200000| + c.$$

Poznámka a časté chyby. Takmer všetci na začiatku zabúdajú na integračnú konštantu. Proste ju nenapíšu, pretože za výsledok považujú samotnú funkciu. Nedá sa povedať, že by bol výsledok nesprávny. Je len neúplný. Je to podobný problém, ako keď $\sqrt{4}=2$. Je to pravda, ale zabudli sme, že aj $\sqrt{4}=-2$ je pravda, preto korektný výpočet je $\sqrt{4}=\pm 2$. Význam integračnej konštanty je obrovský, aj keď to tak nevyzerá. V praxi je to veľmi často tak, že primitívna funkcia charakterizuje priebeh deja a integračná konštantá charakterizuje počiatočné, prípadne okrajové podmienky deja. Takže na ňu nezabúdajme a za každú primitívnu funkciu je pekne napíšme.

Neurčitý integrál súčtu (rozdielu). Nech na intervale $(a;b)$ sú definované funkcie $f(x)$ a $g(x)$. Potom $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.

Poznámka. Veta je navlas rovnaká, aká je pri deriváciách. Hovorí o tom, že integrál súčtu (rozdielu) je súčet (rozdiel) integrálov. Nanešťastie taká veta, aká platila pre deriváciu súčinu a podielu, pre integrály neplatí. Nanajvýš platí $\int af(x)dx = a \int f(x)dx$, kde a je konštantá.

Veta.
$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$$

Príklad.

$\int \frac{5x}{2x^2+3} dx \rightarrow$ keby v čitateli bolo namiesto $5x$ len $4x$, tak by to bol výraz v tvare predchádzajúcej vety. Keďže to tak ale nie je, tak si tú potrebnú štvorku „vyrobíme“: $\int \frac{5x}{2x^2+3} dx = \frac{5}{4} \int \frac{4x}{2x^2+3} dx = \frac{5}{4} \ln|2x^2+3| + c$

Integrovanie metódou per partes

Veta. $\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$.

Poznámka. Na prvý pohľad by sa mohlo zdať, že máme vzorec na integrovanie súčinu funkcií. Je to ale zložitejšie, pretože aj na pravej strane sa vyskytuje integrovanie. Vzorec sa používa veľmi často, ale aj tak iba vtedy, ak je jednoduchší $\int f(x)g'(x)dx$ ako $\int f'(x)g(x)dx$. Integrovanie sa vlastne presunulo z jedného súčinu funkcií na iný súčin funkcií.

Poznámka. Je dobré si uvedomiť, že ak chceme použiť metódu per partes na súčin funkcií, jednu z nich musíme vedieť integrovať a jednu z nich derivovať.

Poznámka. Veta o integrovaní metódou per partes je odvodená z vety o derivovaní súčinu funkcií.

Príklad. Zintegruj funkciu $y = x \ln x$.

Riešenie. Funkcia nie je elementárna, ale je to súčin elementárnych funkcií. Postupovať preto skúsime metódou per partes. Jedna funkcia je x a druhá je $\ln x$. Jednu treba integrovať, jednu derivovať a dosadiť do vzorca. Funkciu $\ln x$ podľa tabuliek integrovať nevieme, preto túto zderivujeme a funkciu x zintegrujeme. Keďže v praxi pri počítaní príkladov metódou per partes sa zvyknú prechodne funkcie $f(x)$ a $g(x)$ označovať $f(x) = u$ a $g(x) = v$, použijem tento zápis:

$$\int x \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u' = x \\ u = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} v = \ln x \\ v' = \frac{1}{x} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \ln x + c - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + c = \frac{x^2}{2} \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) + c$$

Poznámka. Integrovanie metódou per partes je potrebné nacvičiť. Len málokto je schopný na základe prednášky pochopiť princíp a vedieť integrovať bez toho, aby prepočítal niekoľko príkladov. Často sa stáva, že človek nesprávne zvolí funkcie u a v a vznikne integrál, ktorý ani tak nevie riešiť. Vtedy je dobré skúsiť funkcie u a v vymeniť. Ak ani toto nepomôže, obvykle treba skúsiť inú metódu.

Integrovanie substitučnou metódou

Veta. Nech $F(x)$ je neurčitý integrál funkcie $f(x)$ na intervale $(a; b)$. Nech funkcia $\varphi(t)$ má na intervale $(\alpha; \beta)$ deriváciu $\varphi'(t)$. Nech $\varphi(t) \in (a; b)$ pre $\forall t \in (\alpha; \beta)$. Potom $F(x) + c = \int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$.

Poznámka. Táto veta sa pri integrovaní používa asi najviac, preto je potrebné, aby si ju každý osvojil. Funguje nasledovne: Vidím integrál, ktorý neviem vypočítať. Skúsím teda z funkcie vybrať takú časť, ktorú viem zderivovať (to je tá ľahšia časť). Treba však vybrať tak, aby sa integrál zjednodušil (to je tá ťažšia časť). V praxi sa postupuje tak, že zvolíme substitúciu, vypočítame, na akú funkciu prejde $f(x)$, na akú prejde dx a dosadíme.

Poznámka. Veta o integrovaní substitučnou metódou je odvodená z vety o derivovaní zloženej funkcie.

Príklad. Zintegruj funkciu $f(x) = \tan x$.

Riešenie. Nie je to tabuľkový integrál, preto použijem substitučnú metódu. Vo funkcii $\tan x$ treba nájsť takú funkciu, ktorú vieme zderivovať. Vieme, že $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Zderivovať vieme aj čitateľa, aj menovateľa. Zvolíme menovateľa.

Substitúcia je teda $\cos x = t$. Ešte treba vypočítať, na čo sa zmení dx . Zderivujeme obe strany substitúcie a máme $(\cos x)' = -\sin x dx = dt$. Z toho $dx = -\frac{dt}{\sin x}$. Dosadíme

substitúciu aj deriváciu do zadania a vznikne

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{\sin x}{t} \left(\frac{-dt}{\sin x} \right) = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + c.$$

Do výsledku treba ešte

dosadiť naspäť substitúciu, aby bol výsledok v tej premennej, v ktorej bolo zadanie:

$$-\ln|t| + c = -\ln|\cos x| + c.$$

Poznámka. V tomto príklade sme mali šťastie, pretože sa vhodnou substitúciou vykrátili funkcie $\sin x$.

Poznámka. Niekedy sa stane, že zvolíme substitúciu a integrál prejde na integrál, ktorý znova neviem riešiť. Vtedy môžem použiť ešte jednu substitúciu a takýchto substitúcií môže byť mnoho. Často sa ale stáva, že to nevedie nikam. Preto treba hneď na začiatku odhadnúť, akú substitúciu použiť. Tento odhad sa získa obvykle cvikom. Preto integrovať substitučnou metódou odporúčam takto: Pozriem na funkciu a rozdelím si ju na časti. Prezriem si tieto časti a hľadám, či náhodou nie je jedna časť deriváciou druhej. Ak mám také šťastie, okamžite tú časť položíť rovnú substitúciu, pretože dx mi zlikviduje práve tú časť, ktorá je deriváciou a integrál sa značne zjednoduší.

Príklad. Zintegruj funkciu $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

Riešenie. Nie je to tabuľkový integrál, preto použijem substitučnú metódu. Vo funkcii vidím funkciu $\ln x$ a funkciu $\frac{1}{x}$. Náhodou $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, preto neváham a okamžite zavádzam substitúciu $\ln x = t$. Zderivujem obe strany substitúcie a mám $\frac{1}{x} dx = dt$. Z toho $dx = x dt$. Dosadím do zadania a mám

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \frac{t}{x} x dt = \int t dt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{\ln^2 x}{2} + c.$$

Príklady

Príklad 62. Vypočítajte neurčité integrály nasledovných funkcií.

a. $\frac{2}{\sin^2(3x+4)}$

j. $\frac{1000}{55x-1}$

b. $(2x-1)^\alpha$

k. $\frac{111}{\sqrt{(5x-11)^2-1}}$

c. $\frac{0,1}{\sinh^2(1010x-20)}$

l. $2\sin(-2x-60)$

d. $5a^{x-5}$

m. $\frac{0,0001}{\cosh^2\left(\frac{x}{5}-6\right)}$

e. $\frac{10}{\sqrt{1-(2x-2)^2}}$

n. $\frac{44}{1-\left(\frac{x}{2}+33\right)^2}$

g. $5\cosh\left(\frac{x}{2}-2\right)$

o. $\frac{10}{\cos^2(9x-8)}$

h. e^{3x-30}

p. $\frac{100^{100}}{1+(0,1x-0,1)^2}$

i. $\frac{1}{\sqrt{1+(60x-90)^2}}$

q. $18\sinh(5x-2)$

Riešenie.

a. $\int \frac{2}{\sin^2(3x+4)} dx = -\frac{2}{3} \cot g(3x+4) + c$

b. $\int (2x-1)^\alpha dx = \frac{1}{2} \frac{(2x-1)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$

c. $\int \frac{0,1}{\sinh^2(1010x-20)} dx = \frac{-1}{1010} \operatorname{cotgh}(1010x-20) + c$

d. $\int 5a^{x-5} dx = \frac{5a^{x-5}}{\ln a} + c$

$$\text{e. } \int \frac{10}{\sqrt{1-(2x-2)^2}} dx = 5 \arcsin(2x-2) + c$$

$$\text{f. } \int 2 \cos(3x-3) dx = \frac{2}{3} \sin(3x-3) + c$$

$$\text{g. } \int 5 \cosh\left(\frac{x}{2}-2\right) dx = 10 \sinh\left(\frac{x}{2}-2\right) + c$$

$$\text{h. } \int e^{3x-30} dx = \frac{1}{3} e^{3x-30} + c$$

$$\text{i. } \int \frac{1}{\sqrt{1+(60x-90)^2}} dx = \frac{1}{60} \ln\left((60x-90) + \sqrt{1+(60x-90)^2}\right) + c$$

$$\text{j. } \int \frac{1000}{55x-1} dx = \frac{1000}{55} \ln|55x-1| + c$$

$$\text{k. } \int \frac{111}{\sqrt{(5x-11)^2-1}} dx = \frac{111}{5} \ln\left((5x-11) + \sqrt{(5x-11)^2-1}\right) + c$$

$$\text{l. } \int 2 \sin(-2x-60) dx = \cos(-2x-60) + c$$

$$\text{m. } \int \frac{0,0001}{\cosh^2\left(\frac{x}{5}-6\right)} dx = 0,0005 \tanh\left(\frac{x}{5}-6\right) + c$$

$$\text{n. } \int \frac{44}{1-\left(\frac{x}{2}+33\right)^2} dx = 88 \ln \left| \frac{\frac{x}{2}+34}{\frac{x}{2}-32} \right| + c$$

$$\text{o. } \int \frac{10}{\cos^2(9x-8)} dx = \frac{10}{9} \tan(9x-8) + c$$

$$\text{p. } \int \frac{100^{100}}{1+(0,1x-0,1)^2} dx = 10 \cdot 100^{100} \arctan(0,1x-0,1) + c$$

$$\text{q. } \int 18 \sinh(5x-2) dx = \frac{18}{5} \cosh(5x-2) + c$$

Poznámka. Všetko sú to elementárne funkcie, len sú preškálované v smere osí x a y a sú posunuté pozdĺž osí x . S pomocou tabuľkových integrálov by takéto príklady každý mal riešiť metódou „okamžitého napísania výsledku“.

Príklad 63. Per partes. Vypočítajte neurčité integrály nasledovných funkcií.

a. $\ln x$

b. $\frac{\ln x}{x^2}$

c. $x \sin x$

Riešenie.

$$\text{a. } \int \ln x dx = \int 1 \cdot \ln x dx = \left| \begin{array}{ll} u' = 1 & v = \ln x \\ u = x & v' = \frac{1}{x} \end{array} \right| = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + c = x(\ln x - 1) + c$$

$$\text{b. } \int \frac{\ln x}{x^2} dx = \left| \begin{array}{ll} u' = \frac{1}{x^2} & v = \ln x \\ u = -\frac{1}{x} & v' = \frac{1}{x} \end{array} \right| = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + c = -\frac{1}{x}(\ln x + 1) + c$$

$$\text{c. } \int x \sin x dx = \left| \begin{array}{ll} u' = \sin x & v = x \\ u' = -\cos x & v' = 1 \end{array} \right| = -x \cos x + \int \cos x = -x \cos x + \sin x + c$$

Príklad 64. Substitúcia. Vypočítajte neurčité integrály nasledovných funkcií.

a. $\cos x \cdot \sin x$

b. $\frac{\arcsin hx}{\sqrt{1+x^2}}$

c. $\cos^{11} x \cdot \sin x$

d. $\frac{\tan x}{\cos^2 x}$

h. $\sin^3 x \cdot \cos^3 x$

e. $\frac{\arcsin^6 x}{\sqrt{1-x^2}}$

f. $\sinh^5 x \cdot \cosh x$

g. $\frac{\arctan^{11} x}{1+x^2}$

Riešenie.

$$\text{a. } \int \cos x \cdot \sin x dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right| = \int t dt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{\sin^2 x}{2} + c$$

$$\text{b. } \int \frac{\operatorname{arcsinh} x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \left| \begin{array}{l} \operatorname{arcsinh} x = t \\ \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = dt \end{array} \right| = \int t dt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{\operatorname{arcsinh}^2 x}{2} + c$$

$$\text{c. } \int \cos^{11} x \cdot \sin x dx = \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{array} \right| = -\int t^{11} dt = -\frac{t^{12}}{12} + c = -\frac{\cos^{12} x}{12} + c$$

$$\text{d. } \int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx = \left| \begin{array}{l} \tan x = t \\ \frac{dx}{\cos^2 x} = dt \end{array} \right| = \int t dt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{\tan^2 x}{2} + c$$

$$\text{e. } \int \frac{\arcsin^6 x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left| \begin{array}{l} \arcsin x = t \\ \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = dt \end{array} \right| = \int t^6 dt = \frac{t^7}{7} + c = \frac{\arcsin^7 x}{7} + c$$

$$\text{f. } \int \sinh^5 x \cdot \cosh x dx = \left| \begin{array}{l} \sinh x = t \\ \cosh x dx = dt \end{array} \right| = \int t^5 dt = \frac{t^6}{6} + c = \frac{\sinh^6 x}{6} + c$$

$$\text{g. } \int \frac{\arctan^{111} x}{1+x^2} dx = \left| \begin{array}{l} \arctan x = t \\ \frac{dx}{1+x^2} = dt \end{array} \right| = \int t^{111} dt = \frac{t^{112}}{112} + c = \frac{\arctan^{112} x}{112} + c$$

$$\begin{aligned} \text{h. } \int \sin^3 x \cdot \cos^3 x dx &= \int \sin^3 x (1 - \cos^2 x) \cos x dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right| = \int t^3 (1 - t^2) dt = \int (t^3 - t^5) dt = \\ &= \int t^3 dt - \int t^5 dt = \frac{t^4}{4} - \frac{t^6}{6} + c_1 + c_2 = t^4 \left(\frac{1}{4} - \frac{t^2}{6} \right) + c = \sin^4 x \left(\frac{1}{4} - \frac{\sin^2 x}{6} \right) + c \end{aligned}$$

Lekcia 11 – Určitý integrál

Nové pojmy

- a. Určitý integrál, Newtonov – Leibnitzov vzorec, integrál párnej a nepárnej funkcie
- b. Obsah plochy, dĺžka krivky, plášť a objem rotačného telesa
- c. Stredná hodnota určitého integrálu

Určitý integrál

Určitý integrál. Určitý integrál je rozdiel hodnôt primitívnych funkcií s hornou a dolnou hranicou. Označuje sa $\int_a^b f(x)dx$, kde a je dolná hranica a b je horná hranica.

Newtonov – Leibnitzov vzorec. $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Poznámka. Tento vzorec je najdôležitejšia vec celej lekcie. Využíva sa na vyčíslenie integrálu, na získanie nie primitívnej funkcie, ale na zistenie hodnoty. Funguje tak, že ak chcem vyčísliť určitý integrál, stačí zistiť neurčitý integrál (primitívnu funkciu), dosadiť do neho hornú a dolnú hranicu a odčítať ich. Tento vzorec je tak dôležitý, že by ho mal každý vedieť aj o polnoci.

Poznámka. Ak sa počíta neurčitý integrál, vzniká nekonečne veľa primitívnych funkcií, ktoré sa od seba líšia konštantou. Ale ak sa počíta určitý integrál, žiadna konštanta nevzniká. Vlastne pri vyčíslení hornej hranice vznikne jedna konštanta a pri vyčíslení dolnej hranice druhá konštanta. Tieto konštanty sú rovnaké, odčítajú sa a ostane iba rozdiel primitívnych funkcií.

Príklad. $\int_1^3 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^3 = \frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2} = 4.$

Príklad. $\int_0^{\pi/2} \cos x dx = [\sin x]_0^{\pi/2} = \sin(\pi/2) - \sin 0 = 1$

$$\textbf{Veta.} \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Poznámka. Veta hovorí, že je jedno, či odčítam hornú hranicu od dolnej alebo naopak, len zmením znamienko.

$$\textbf{Veta.} \int_a^a f(x)dx = 0.$$

Poznámka. Veta hovorí, že ak integrujem od nejakej hodnoty po tú istú hodnotu, hodnota je nula.

$$\textbf{Príklad.} \int_2^2 x^5 dx = \left[\frac{x^6}{6} \right]_2^2 = \frac{2^6}{6} - \frac{2^6}{6} = 0.$$

$$\textbf{Veta.} \text{ Ak } a < b < c, \text{ tak } \int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

Poznámka. Veta hovorí, že integrovanie v nejakých hraniciach sa dá rozdeliť na niekoľko určitých integrálov. Dôležité je, aby hranice na seba nadväzovali. Veta sa využíva hlavne vtedy, keď sa počíta viac určitých integrálov a náhodou ak rozdelím jeden na dva, časť sa mi s nejakým iným členom vyruší.

Príklad.

$$\int_0^{\pi/2} \sin x dx = \int_0^{\pi/4} \sin x dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin x dx = -\cos(\pi/4) + \cos 0 - \cos(\pi/2) + \cos(\pi/4) = 1.$$

Určitý integrál párnej funkcie (Obr. 59). Ak funkcia $f(x)$ je párna, potom

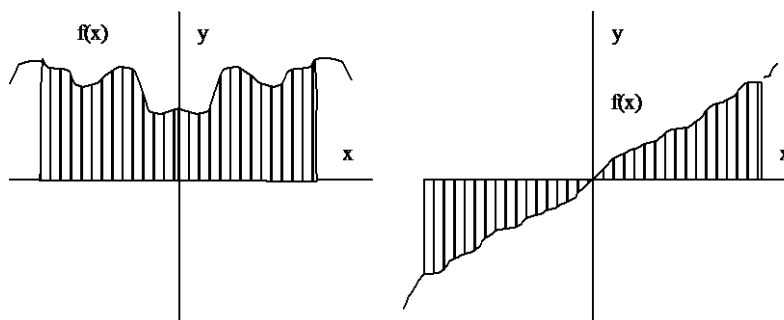
$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx.$$

Poznámka. Na funkciu, ktorá je symetrická podľa osi y , ktorú integrujeme na symetrickom intervale, sa môžeme dívať ako na dvojnásobok tej časti, ktorá je napravo od nuly.

Určitý integrál nepárnej funkcie (Obr. 59). Ak funkcia $f(x)$ je nepárna,

$$\text{potom } \int_{-a}^a f(x)dx = 0.$$

Poznámka. Keďže nepárna funkcia je symetrická podľa stredu a chceme ju integrovať na symetrickom intervale, integrál pre záporné hodnoty je rovnaký, ako integrál pre kladné hodnoty, ale s opačným znamienkom, preto sa zrušia.



Obr. 59. Vľavo: Integrovanie párnej funkcie na symetrickom intervale pomocou dvojnásobku jednej časti. Vpravo: Integrovanie párnej funkcie na symetrickom intervale je nulové.

Určitý integrál súčtu (rozdielu).
$$\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

Poznámka. Hovorí o tom, že určitý integrál súčtu (rozdielu) je súčet (rozdiel) určitých integrálov. Nanešťastie taká veta, aká platila pre deriváciu súčinu a podielu, pre integrály neplatí. Nanajvýš platí $\int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$, kde c je konštanta.

Integrovanie metódou per partes

Veta.
$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx.$$

Poznámka. Veta vyzerá rovnako ako pri neurčitých integráloch. Rozdiel je v tom, že sa primitívne funkcie vyčísľujú v zadaných hraniciach.

Integrovanie substitučnou metódou

Veta. Nech $F(x)$ je neurčitý integrál funkcie $f(x)$ na intervale $(a; b)$. Nech funkcia $\varphi(t)$ má na intervale $(\alpha; \beta)$ deriváciu $\varphi'(t)$. Nech $\varphi(t) \in (a; b)$ pre $\forall t \in (\alpha; \beta)$ a nech $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Potom
$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt.$$

Poznámka. Veta vyzerá rovnako ako pri neurčitých integráloch. Rozdiel je v tom, že sa primitívne funkcie vyčísľujú v zadaných hraniciach.

Využitie určitého integrálu

Úvod. Určitý integrál má pre prax veľký význam. Používa sa na výpočet dĺžky krivky, obsahu plochy, objemu telesa, ťažiska, momentu hybnosti, momentu zotrvačnosti a mnoho ďalších. Nasleduje niekoľko najdôležitejších vzorcov.

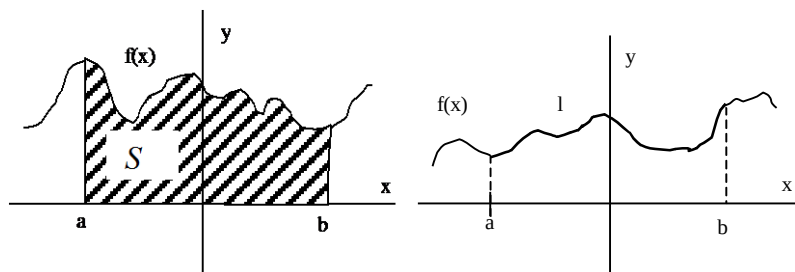
Obsah plochy (Obr. 60). Nech $y = f(x) \geq 0$ na intervale $\langle a; b \rangle$. Obsah plochy ohraničenej funkciou $f(x)$ a priamkami $y = 0$, $x = a$ a $x = b$ je $S = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$.

Poznámka. $y = f(x) \geq 0$, teda funkcia je celá nad osou x , nanajvýš sa jej dotýka, ale neprechádza cez ňu. Vzorec je rovnako platný, aj ak $y = f(x) \leq 0$, teda funkcia je celá pod osou x , nanajvýš sa jej dotýka, ale neprechádza cez ňu. Výsledok aj tak berieme v absolútnej hodnote.

Poznámka a časté chyby. Niekedy treba vypočítať plochu medzi osou x a funkciou, ktorá prechádza cez os x . Tiež veľmi často sa stáva, že pri výpočte obsahu plochy je potrebné počítať integrál nepárnej funkcie na symetrickom intervale. Samozrejme, vychádza nula. Ale to neznamená, že plocha je nulová. Na 90% je chyba v tom, že funkcia prechádza nulou a zabudlo sa na to, že vo vzorci je absolútna hodnota. Bez tejto absolútnej hodnoty sa deje to, že plocha nad osou x vychádza s kladným znamienkom a pod osou x vychádza so znamienkom záporným, preto sa tieto plochy odčítajú. Niekedy vyjde plocha menšia ako v skutočnosti, ale niekedy aj nulová (ak sa veľkosť plochy nad a pod osou x rovnajú). Správny postup je preto tento: Zadanú funkciu najskôr preskúmam, či neprechádza cez os x . Zistím to tak, že vypočítam nulové body. Potom už stačí integrovať funkciu po menších intervaloch, ktorých hranice sú nulové body. Každý s týchto čiastkových integrálov vezmem v absolútnej hodnote (s kladným znamienkom) a tieto čiastkové plochy sčítam. V asi 90% prípadov, kedy vychádza nulová plocha, sa stane to, že funkcia je nepárna, ale nie je integrovaná na symetrickom intervale. Stalo sa asi to, že sa zaviedla taká substitúcia, ktorá zmenila hranice integrovania tak, že sa teraz integruje nepára funkcia na symetrickom intervale. Preto treba dať pozor na to, ako sa menia hranice integrovania. Správny postup je preto tento: Integrujem funkciu na intervale $\langle -a; 0 \rangle$, vezmem v absolútnej hodnote, potom integrujem na intervale $\langle 0; a \rangle$, vezmem znova v absolútnej hodnote a čiastkové plochy sčítam.

Dĺžka rovinnej krivky (Obr. 60). Dĺžka rovinnej krivky funkcie $y = f(x)$ je

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx.$$



Obr. 60. Vľavo: Obsah plochy S . Vpravo: Dĺžka rovinnej krivky l .

Plášť rotačného telesa (Obr. 61). Plášť rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou

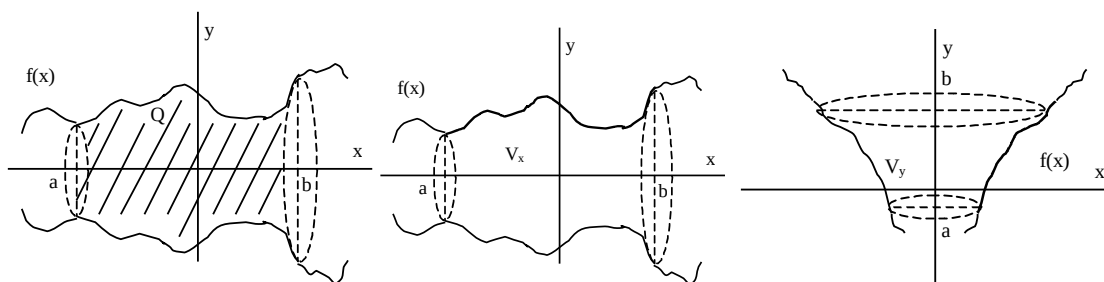
grafu funkcie $y = f(x)$ okolo osi x , je $Q = 2\pi \int_a^b |y| \sqrt{1 + y'^2} dx$.

Objem rotačného telesa (Obr. 61). Objem rotačného telesa, ktoré vznikne

rotáciou grafu funkcie $y = f(x)$ okolo osi x , je $V_x = \pi \int_a^b y^2 dx$.

Poznámka. Objem rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou grafu funkcie

$y = f(x)$ okolo osi y , je $V_y = \pi \int_a^b x^2 dy$.

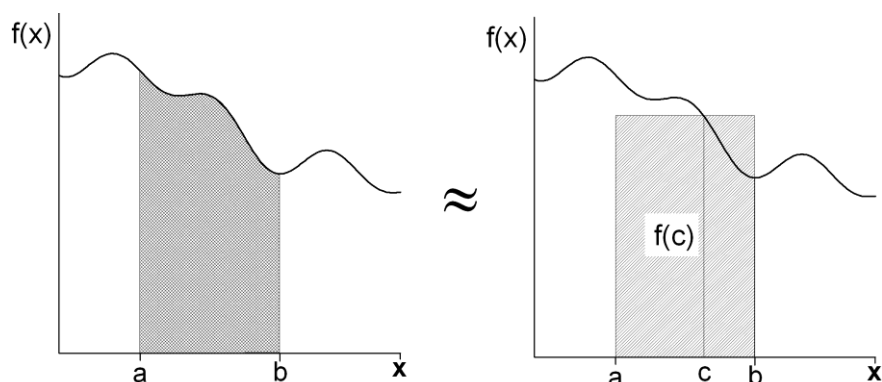


Obr. 61. Vľavo: Plášť rotačného telesa Q . V strede: Objem rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou grafu funkcie okolo osi x . Vpravo: Objem rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou grafu funkcie okolo osi y .

Veta o strednej hodnote určitého integrálu

Veta o strednej hodnote. Ako bolo uvedené vyššie, geometrický význam určitého integrálu funkcie $f(x)$ na intervale $\langle a; b \rangle$ je obsah plochy, ohraničenej zvrchu funkciou $f(x)$ a zospodu priamkou $y = 0$. Túto plochu však vieme približne popísať

(aproximovať) plochou obdĺžnika, ktorý má jednu stranu rovnú veľkosti intervalu $<a; b>$ a druhú rovnú funkčnej hodnote $f(c)$ v určitom bode c (jeho polohu nemusíme poznať úplne presne, ale určite leží niekde v intervale $<a; b>$) □ tak ako to môžeme vidieť na **obr. 62**. Túto hodnotu $f(c)$ nazývame **strednou hodnotou určitého integrálu**.



Obr. 62. Aproximácia obsahu plochy, definovanej určitým integrálom funkcie $f(x)$, pomocou vety o strednej hodnote určitého integrálu. Plocha vymedzená zvrchu priebehom funkcie $f(x)$ a zospodu horizontálnou osou x (ľavá časť obrázku) je aproximovaná plochou obdĺžnika s podstavou rovnou veľkosti intervalu $<a; b>$ a výškou $f(c)$ (pravá časť obrázku). Ako je vidieť, aproximácia je založená na skutočnosti, že chýbajúca časť aproximovanej plochy nad obdĺžnikom je „vykompenzovaná“ prečnievajúcou časťou obdĺžnika nad krivku $f(x)$.

Príklady

Príklad 65. Vypočítajte obsah plochy pod grafom funkcie $f(x)$ na zadanom intervale $\langle a; b \rangle$.

a. $\sin x, \langle 0; \pi/4 \rangle$

d. $x^4, \langle 0; 1,5 \rangle$

b. $x + \sin x, \langle 2; 4 \rangle$

e. $\sin x \cdot \cos^3 x, \langle 0; \pi \rangle$

c. $\sin x + \cos x, \langle 0; \pi \rangle$

f. $\ln x, \langle 2; 6 \rangle$

Riešenie. Všetky výsledky sú v štvorcových jednotkách.

a. Funkcia $y = \sin x$ je na intervale $\langle 0; \pi/4 \rangle$ kladná, preto stačí jeden integrál.

$$S = \left| \int_0^{\pi/4} \sin x dx \right| = \left| [-\cos x]_0^{\pi/4} \right| = |-\cos(\pi/4) + \cos 0| = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

b. Funkcia $y = x + \sin x$ je na intervale $\langle 2; 4 \rangle$ kladná, preto stačí jeden integrál.

$$S = \left| \int_2^4 (x + \sin x) dx \right| = \left| \left[\frac{x^2}{2} - \cos x \right]_2^4 \right| = |8 - \cos 4 - 2 + \cos 2| = 6 - \cos 4 + \cos 2$$

c. Funkcia $y = \sin x + \cos x$ má nulové body pre $x = \pi(k + 3/4)$. Na intervale $\langle 0; \pi \rangle$ prechádza funkcia jedným takým bodom $x = 3\pi/4$. Integrujeme na dvakrát.

$$\begin{aligned} S &= \left| \int_0^{\pi/2} (\sin x + \cos x) dx \right| + \left| \int_{\pi/2}^{\pi} (\sin x + \cos x) dx \right| = \left| [-\cos x + \sin x]_0^{\pi/2} \right| + \left| [-\cos x + \sin x]_{\pi/2}^{\pi} \right| = \\ &= |-\cos(\pi/2) + \sin(\pi/2) + \cos 0 - \sin 0| + |-\cos \pi + \sin \pi + \cos(\pi/2) - \sin(\pi/2)| = 2 \end{aligned}$$

d. Funkcia $y = x^4$ neprechádza osou x , preto stačí jeden integrál.

$$S = \left| \int_0^{1,5} x^4 dx \right| = \left| \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^{1,5} \right| = \frac{1,5^5}{5} = 1.51875.$$

- e. Funkcia $y = \sin x \cdot \cos^3 x$ má nulové body pre $x = k\pi/2$. Na intervale $\langle 0; \pi \rangle$ prechádza funkcia jedným takým bodom $x = \pi/2$. Integrujeme na dvakrát.

$$S = \left| \int_0^{\pi/2} \sin x \cdot \cos^3 x dx \right| + \left| \int_{\pi/2}^{\pi} \sin x \cdot \cos^3 x dx \right| = \left| \begin{array}{ll} \cos x = t & \cos 0 = 1 \\ -\sin x dx = dt & \cos(\pi/2) = 0 \\ & \cos \pi = -1 \end{array} \right| =$$

$$= \left| -\int_1^0 t^3 dt \right| + \left| -\int_0^{-1} t^3 dt \right| = \left| \left[\frac{t^4}{4} \right]_1^0 \right| + \left| \left[\frac{t^4}{4} \right]_0^{-1} \right| = \left| 0 - \frac{1}{4} \right| + \left| -\frac{1}{4} \right| = \frac{1}{2}$$

- f. Funkcia $y = \ln x$ nemá nulové body na intervale $\langle 2; 6 \rangle$, preto stačí jeden integrál.

$$S = \left| \int_2^6 \ln x dx \right| = \left| \left[\frac{1}{x} \right]_2^6 \right| = \left| \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \right| = \left| -\frac{2}{6} \right| = \frac{1}{3}$$

Príklad 66. Vypočítajte dĺžku krivky $f(x)$ na zadanom intervale $\langle a; b \rangle$.

a. $\cosh x, \langle 1; 20 \rangle$

b. $x^2, \langle -10; 10 \rangle$

Riešenie. Všetky výsledky sú v dĺžkových jednotkách.

a.
$$l = \int_1^{20} \sqrt{1 + (\cosh x)^2} dx = \int_1^{20} \sqrt{1 + (\sinh x)^2} dx = \int_1^{20} \sqrt{(\cosh x)^2} dx = \int_1^{20} |\cosh x| dx = \int_1^{20} \cosh x dx =$$

$$= [\sinh x]_1^{20} = \sinh 20 - \sinh 1$$

Poznámka. Absolútna hodnota nebola potrebná, pretože funkcia $\sinh x$ je na intervale $\langle 1; 20 \rangle$ kladná a platí: $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

b.
$$l = \int_{-10}^{10} \sqrt{1 + (x^2)^2} dx = \int_{-10}^{10} \sqrt{1 + 4x^2} dx = \left| \begin{array}{ll} \sqrt{1 + 4x^2} = 2x + t & x = \frac{1-t^2}{4t} \\ Dh = \sqrt{401} + 20 & Hh = \sqrt{401} - 20 \end{array} \right| dx = -\frac{t^2 + 1}{4t^2} dt =$$

$$= -\int_{\sqrt{401}-20}^{\sqrt{401}+20} \left(2 \frac{1-t^2}{4t} + t \right) \frac{t^2 + 1}{4t^2} dt = -\int_{\sqrt{401}-20}^{\sqrt{401}+20} \frac{t^4 + 2t^2 + 1}{8t^3} dt = \frac{1}{8} \left[\frac{t^2}{2} + 2 \ln t - \frac{1}{2t^2} \right]_{\sqrt{401}-20}^{\sqrt{401}+20} \cong 202.09$$

Poznámka. Tento príklad považujem za ťažší, pretože sa použila neobvyklá substitúcia a nevychádzali „pekné“ čísla. Bohužiaľ v praxi sú častejšie práve takého príklady.

Príklad 67. Vypočítajte plochu plášťa rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou grafu funkcie $y = f(x)$ okolo osi x .

a. $x, \langle 1; 20 \rangle$

b. $e^x, \langle 0; 1 \rangle$

Riešenie. Všetky výsledky sú v štvorcových jednotkách.

$$a. \quad Q = 2\pi \int_1^{20} |x| \cdot \sqrt{1+(x)'^2} dx = 2\pi \int_1^{20} x \cdot \sqrt{2} dx = 2\sqrt{2}\pi \int_1^{20} x \cdot dx = 2\sqrt{2}\pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^{20} = 399\pi\sqrt{2}$$

Poznámka. Absolútna hodnota nebola potrebná, pretože funkcia x je na intervale $\langle 1; 20 \rangle$ kladná.

$$\begin{aligned} Q &= 2\pi \int_0^1 |e^x| \sqrt{1+(e^x)'^2} dx = 2\pi \int_0^1 e^x \sqrt{1+(e^x)^2} dx = \left| \begin{array}{ll} e^x = t & e^0 = 1 \\ e^x dx = dt & e^1 = e \end{array} \right| = \\ &= 2\pi \int_1^e \sqrt{1+t^2} dt = \left| \begin{array}{ll} \sqrt{1+t^2} = t + a & t = \frac{1-a^2}{2a} \\ Dh = \sqrt{2} - 1 & Hh = \sqrt{e^2+1} - e \end{array} \right| dt = -\frac{a^2+1}{2a^2} da = \\ b. \quad &= -2\pi \int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{e^2+1}-e} \left(a + \frac{1-a^2}{2a} \right) \left(\frac{a^2+1}{2a^2} \right) da = -2\pi \int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{e^2+1}-e} \frac{a^4 + 2a^2 + 1}{4a^3} da = \\ &= -2\pi \left[\frac{a^2}{4} + \ln a - \frac{1}{4a^2} \right]_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{e^2+1}-e} \cong 22.9430223411 \end{aligned}$$

Poznámka. Tento príklad považujem za ťažší, pretože sa použili až dve substitúcie a nevychádzali „pekné“ čísla. Bohužiaľ v praxi sú častejšie práve takého príklady.

Príklad 68. Vypočítajte objem rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou grafu funkcie $y = f(x)$ okolo osi x .

a. $\sin x + \cos x, \langle 0; 4\pi \rangle$

c. $x^4 + 2x^3, \langle -5; 10 \rangle$

b. $\sqrt{\tan x}, \langle 0; \pi/4 \rangle$

Riešenie. Všetky výsledky sú v objemových jednotkách.

$$\begin{aligned} \text{a. } V_x &= \pi \int_0^{4\pi} (\sin x + \cos x)^2 dx = \pi \int_0^{4\pi} (\sin^2 x + 2 \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x) dx = \pi \int_0^{4\pi} (2 \sin x \cdot \cos x + 1) dx = \\ &= \pi [\sin^2 x + x]_0^{4\pi} = 4\pi^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } V_x &= \int_0^{\pi/4} (\sqrt{\tan x})^2 dx = \int_0^{\pi/4} \tan x dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos x} dx = \left| \begin{array}{l} \cos x = t \quad \cos 0 = 1 \\ -\sin x dx = dt \quad \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2 \end{array} \right| = \\ &= -\pi \int_1^{\sqrt{2}/2} \frac{dt}{t} = [-\pi \ln|t|]_1^{\sqrt{2}/2} = -\pi \ln \frac{\sqrt{2}}{2} = \pi \ln \frac{2}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\text{c. } V_x = \pi \int_0^2 (x^4 + 2x^3)^2 dx = \pi \int_0^2 (x^8 + 4x^7 + 4x^6) dx = \pi \left[\frac{x^9}{9} + \frac{x^8}{2} + \frac{4x^7}{7} \right]_0^2 = \pi \frac{16256}{63}$$

Poznámka. Aj keď by sa zdalo, že objemy sa budú počítat' ťažšie, nie je to tak. Vzorec na výpočet objemu telesa je totiž oveľa jednoduchší a pozostáva iba z integrovania druhej mocniny. Naproti tomu výpočet povrchu plášťa zahŕňa integrovanie druhej odmocniny, čo je vo väčšine praktických prípadov ťažké, prípadne nemožné.

Odporúčaná literatúra

Eliáš, J., Horváth, J., Kajan, J., 1966: Zbierka úloh z vyššej matematiky 1. Bratislava, Alfa

Eliáš, J., Horváth, J., Kajan, J., 1966: Zbierka úloh z vyššej matematiky 2. Bratislava, Alfa

Hradílek, L., Stehlík, E., 1986: Matematika pro geology 1. Vysokoškolské skriptá, MFF UK, Bratislava

Hradílek, L., Stehlík, E., 1987: Matematika pro geology 2. Vysokoškolské skriptá, MFF UK, Bratislava

Ivan, J., 1986: Matematika 1. Bratislava, Alfa

Kluvánek, I., Mišík, L., Švec, M., 1959: Matematika I. Bratislava, SVTL

Rektorys, K., 1968: Přehled užití matematiky. Praha, SNTL

Smítanová, K., a kolektív, 1991: Matematika pre nematematické smery Prírodovedeckej fakulty UK. Vysokoškolské skriptá, MFF UK, Bratislava

Mgr. Peter Richter, PhD., RNDr. Roman Pašteka, PhD., doc. RNDr. Miroslav Bielik, DrSc. a kolektív (Miroslav Hajach, Roland Karcol, Lucia Vreštiaková, Kristián Csicsay, Martin Katona, Eva Speváková, Eva Szalaiová, Bibiána Kytková)

UČEBNÉ TEXTY Z MATEMATIKY PRE 1. ROČNÍK GEOLÓGIE

Vedúci katedry: doc. RNDr. Miroslav Bielik, DrSc.

Rozsah 136 strán, 7,2 AH, prvé vydanie, <http://www.fns.uniba.sk/~kgf/ucebnetexty.htm>

ISBN 80-223-2201-6