

kroky výpočtu Bouguerovej anomálie

(tzv. korekcie/redukcie)

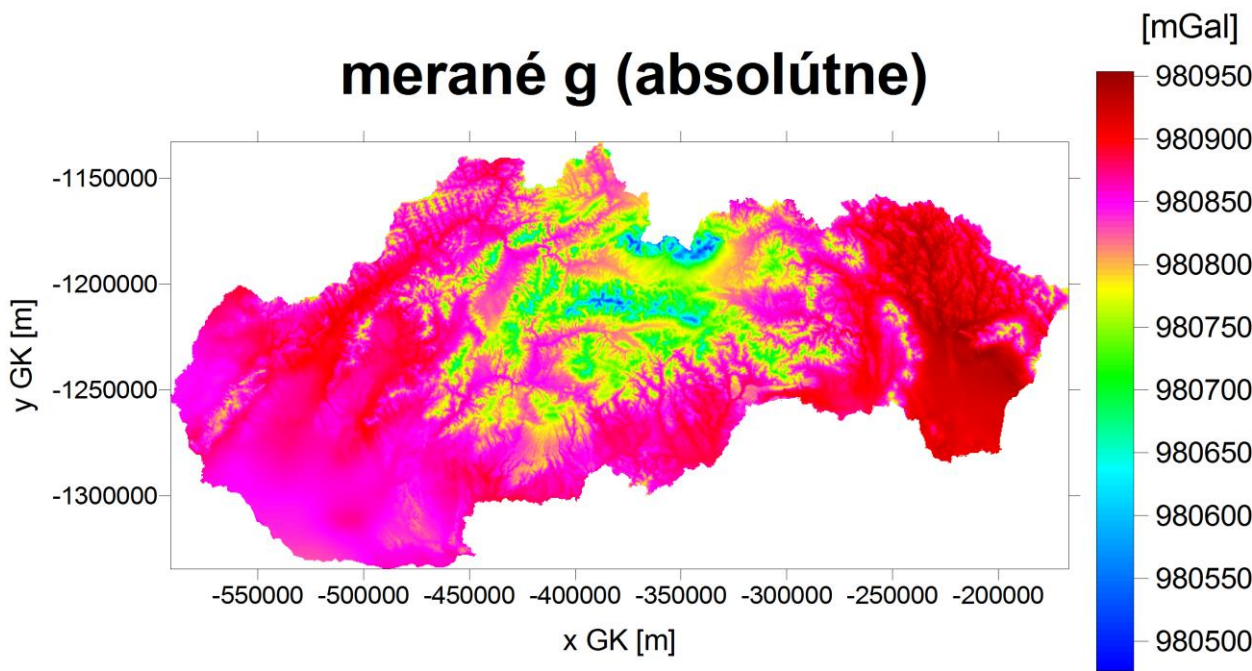
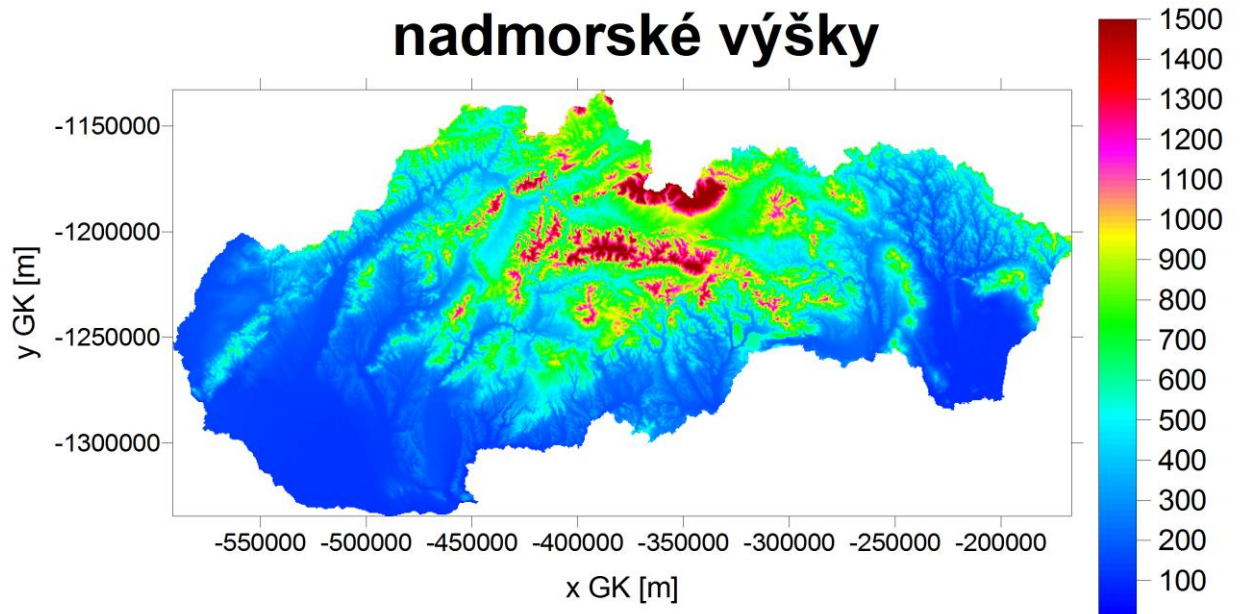
Úvodné poznámky:

Bouguerove anomálie – cieľom ich výpočtu je odstrániť z meraného g všetky negeologické prejavy (odstredivé zrýchlenie, vplyv výšky a topografie) – jedine vtedy sa môžu prejavíť efekty hustotných nehomogenít (geologické a antropogénne objekty).

Inými slovami - merané tiažové zrýchlenie je silne závislé od nadmorských výšok (topografie) a túto závislosť je potrebné odstrániť v čo najväčšej miere („inak budeme mapovať topografiu a nie geológiu“).

Úvodné poznámky:

extrémna
výšková závislosť
v hodnotách g
(príklad je
pre územie
našej republiky)



kroky výpočtu Bouguerovej anomálie

(tzv. korekcie/redukcie)

$$\Delta g_B = \acute{U}BA = g - g_n + 0.3086h - 0.0419h\rho - B + T$$

g – namerané tiažové zrýchlenie (opravené o slapy a chod, prepočítané na absolútne hodnoty)

g_n – normálne pole (tiažový účinok elipsoidu)

$0.3086h$ – tzv. Fayeova korekcia (redukcia) =
= korekcia (redukcia) “vo voľnom vzduchu”

$0.0419h\rho$ – účinok rovinatej nekonečnej (Bouguerovej) dosky, tzv. Bouguerova korekcia (redukcia)

B – Bullardov člen: oprava účinku rovinatej dosky na účinok sférickej orezanej dosky
(do vzdialenosti 166.735 km od bodu výpočtu)

T – terénne korekcie (do vzdialenosti 166.735 km)

ρ – tzv. korekčná (redukčná) hustota, často 2.67 g.cm^{-3}

h – nadmorská výška výpočtového bodu

kroky výpočtu Bouguerovej anomálie (tzv. korekcie/redukcie)

$$\Delta g_B = g - g_n + 0.3086h - 0.0419h\rho - B + T$$

normálne pole – tiažové pole referenčného elipsoidu

- Clairautov teorém,
- Helmertov vzťah,
- Somigliana-Pizettiho vzťah,

Pozor: všetky uvedené vzťahy vypočítavajú tiažový účinok na povrchu elipsoidu (geoidu), t.j. v bode $h = 0$ m (!)

kroky výpočtu Bouguerovej anomálie (tzv. korekcie/redukcie)

$$\Delta g_B = g - g_n + 0.3086h - 0.0419h\rho - B + T$$

normálne pole – tiažové pole referenčného elipsoidu

otázne je, že akú hustotu má elipsoid, ktorého účinok takto odrátame – teoretické úvahy ukazujú, že by to mohlo byť v jeho vrchnej časti $2.67 - 2.70 \text{ g.cm}^{-3}$

(dôležité je si uvedomiť, že odvodené vzťahy pre normálne pole určujú jeho hodnotu pre nulovú nadmorskú výšku)

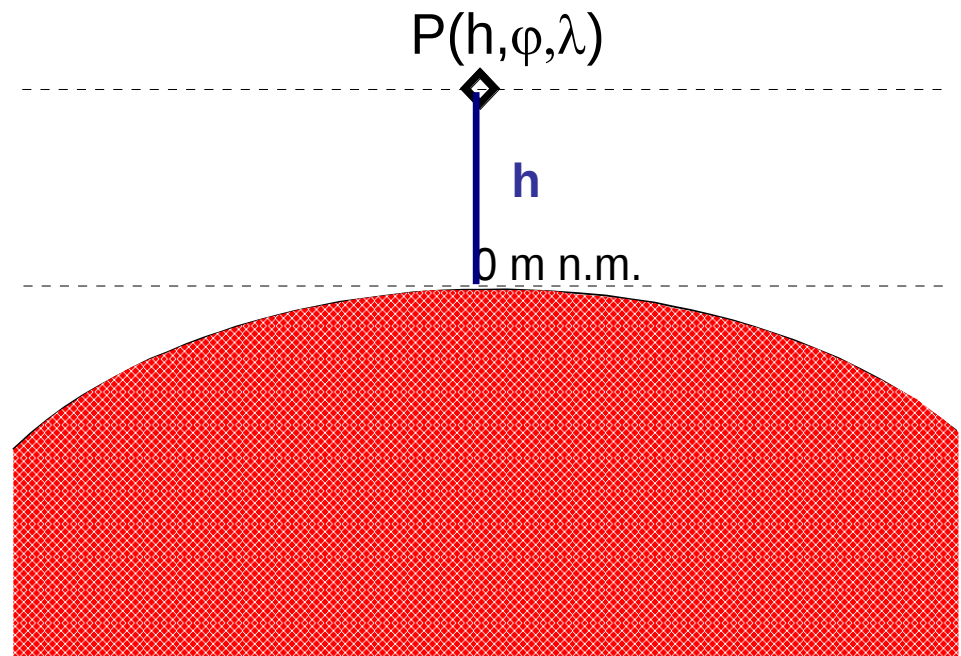
kroky výpočtu Bouguerovej anomálie (tzv. korekcie/redukcie)

$$\Delta g_B = g - g_n + 0.3086h - 0.0419h\rho - B + T$$

Fayeova korekcia – „oprava na voľný vzduch“

keďže vzťahy pre normálne pole určujú jeho hodnotu v bode $h = 0$ m, pre potreby výpočtu Bouguerovej anomálie je potrebné toto pole „presunúť“ (prepočítať) z povrchu elipsoidu do bodu výpočtu $P(h)$

tento krok sa nazýva tradične ako Fayeova korekcia (korekcia na voľný vzduch, free air correction)

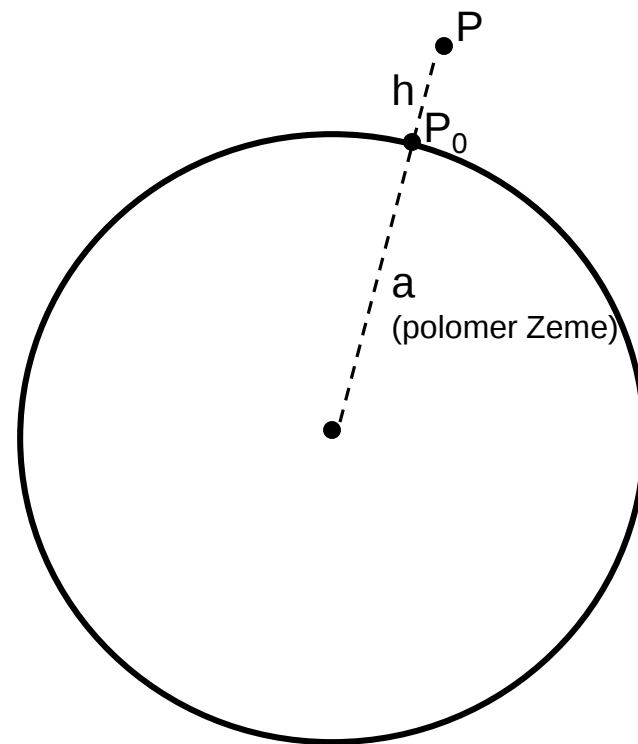


kroky výpočtu Bouguerovej anomálie (tzv. korekcie/redukcie)

$$\Delta g_B = g - g_n + 0.3086h - 0.0419h\rho - B + T$$

Fayeova korekcia – „oprava na voľný vzduch“

odvodenie



(pomer h/a je veľmi malý)

kroky výpočtu Bouguerovej anomálie (tzv. korekcie/redukcie)

$$\Delta g_B = g - g_n + \boxed{0.3086h} - 0.0419h\rho - B + T$$

Fayeova korekcia – „oprava na voľný vzduch“

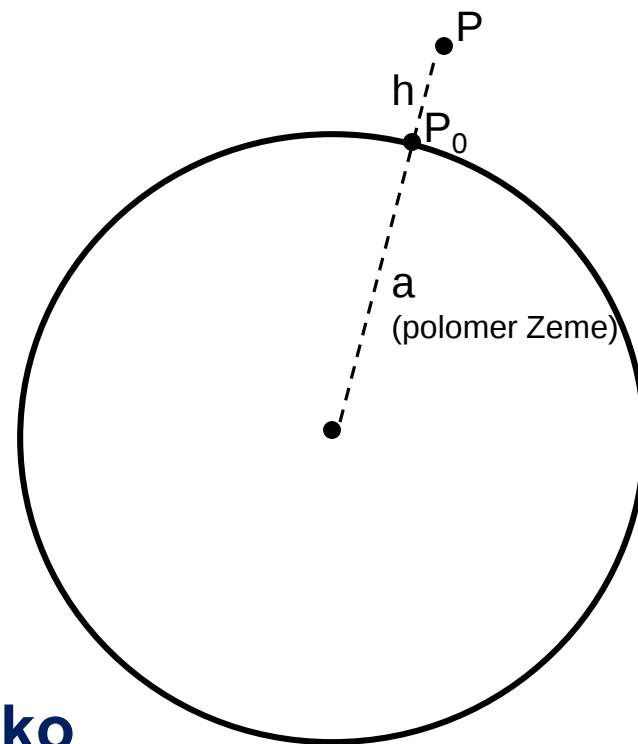
(pri jednoduchej sférickej aproximácii Zeme)

rozdiel v zrýchlení medzi bodmi P_0 a P bude:

$$\Delta g_F = -2 \frac{g_0}{a} h \approx 0.3082 h$$

pre priemerné hodnoty parametrov

$$g_0 \approx g_P \approx 983000 \text{ [mGal]}, \quad a \approx 6371000 \text{ [m]}$$



**Hodnota -0.3086 sa často označuje ako
tzv. normálny vertikálny gradient**

kroky výpočtu Bouguerovej anomálie (tzv. korekcie/redukcie)

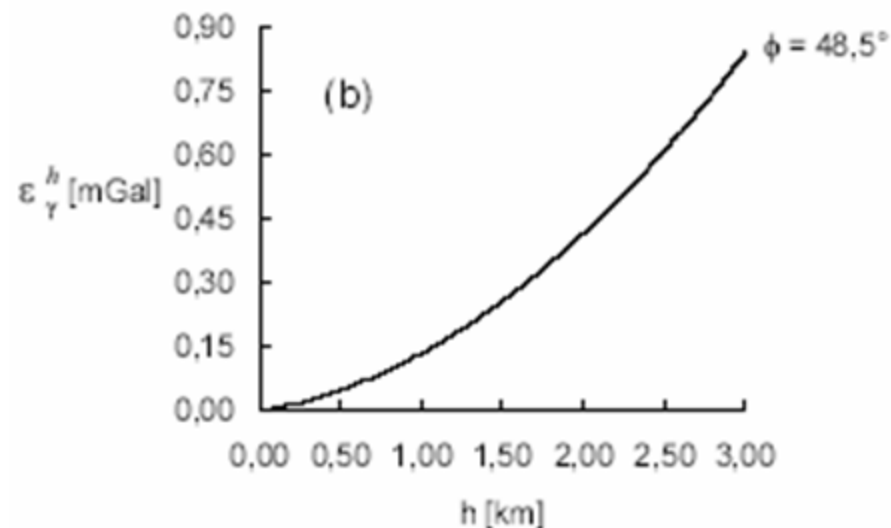
$$\Delta g_B = g - g_n + 0.3086h - 0.0419h\rho - B + T$$

Fayeova korekcia – „oprava na voľný vzduch“

pri uvážení ďalších členov použitého Taylorovho rozvoja a taktiež odstredivého zrýchlenia Zeme (rotujúca guľa) získame namiesto jednoduchého vzťahu $(0.3086h)$ pre Fayeovu korekcie nasledujúci vzorec:

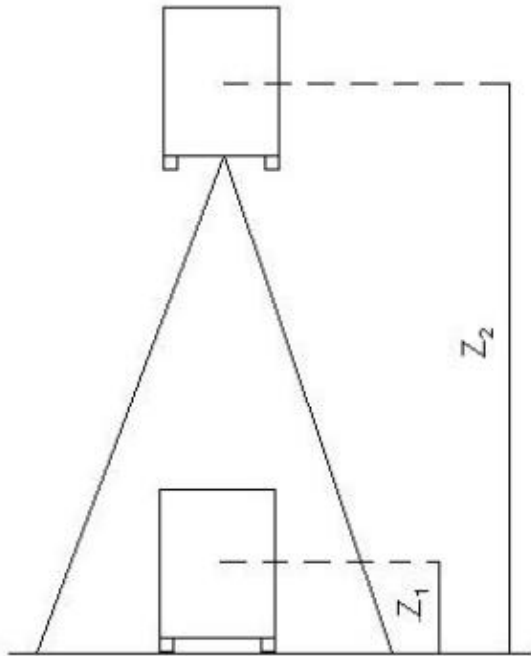
$$\Delta g_F \approx (0.30878 - 0.000439\sin^2\varphi)h - (7.265 \cdot 10^{-8} - 2.085 \cdot 10^{-10} \sin^2\varphi)h^2$$

pozn. Pre územie SR dosahuje chyba, spôsobená používaním zjednodušeného vzťahu pre Fayeovu korekciu $(0.3086h)$ výškovo závislú chybu, dosahujúcu rozpätie až cca. 0.45 mGal (pre lokálne prieskumy to nevadí, pre regionálne však áno)



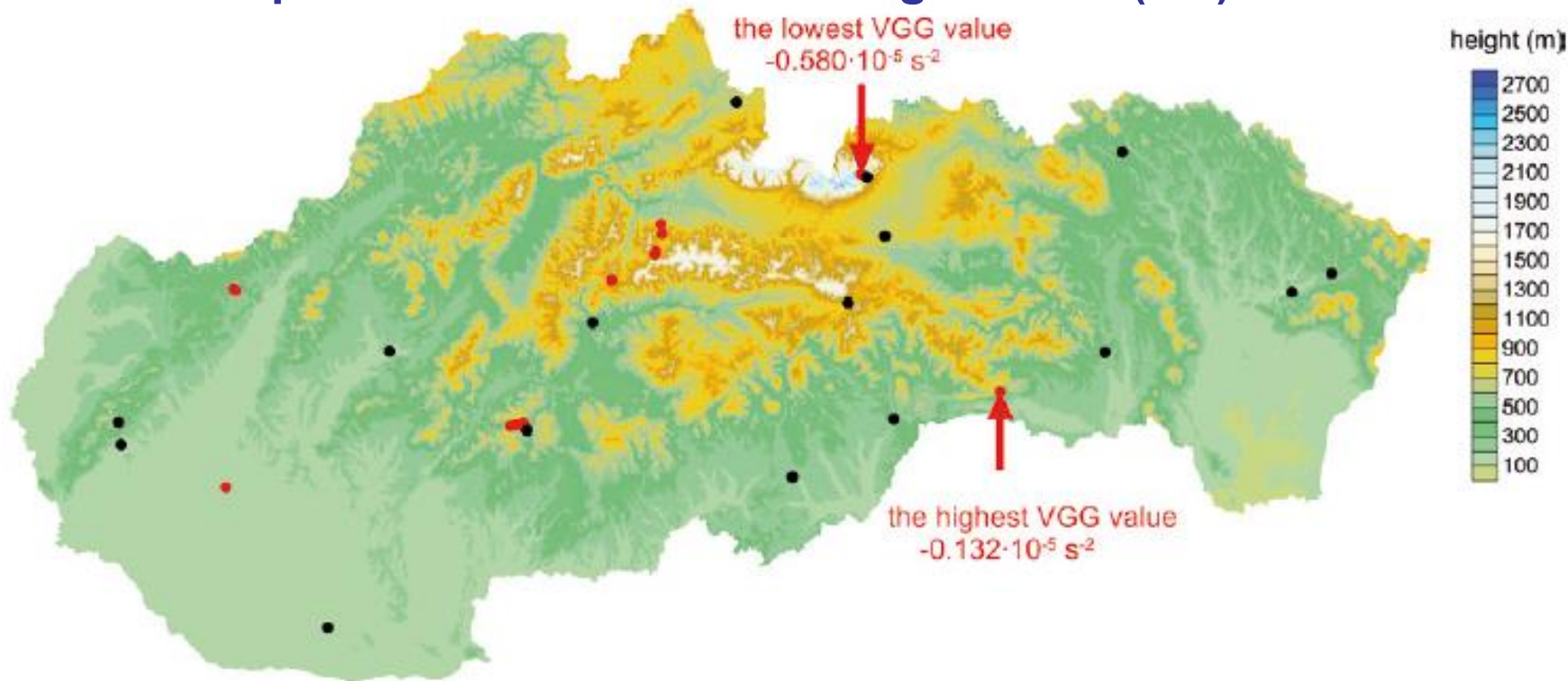
poznámka ku vertikálnemu gradientu (VG)

reálny VG je možné odhadnúť meraním (tzv. tower VG)



hodnota normálneho VG ($-0.3086h$) je výrazne ovplyvnená vplyvom okolitej topografie a blízkych budov
otázka: aká bude hodnota reálneho VG na kopcoch (v dolinách)?

poznámka ku vertikálnemu gradientu (VG)



Lomnický
štít



Zádielska
dolina

rozdiely reálneho VG voči normálnemu VG ($-0.3086h$) dosahujú na našom území až 88% (v doterajších publikáciách sa uvádzali max. rozdiely na úrovni 20-30%)

kroky výpočtu Bouguerovej anomálie (tzv. korekcie/redukcie)

$$\Delta g_B = g - g_n + 0.3086h - 0.0419h\rho - B + T$$

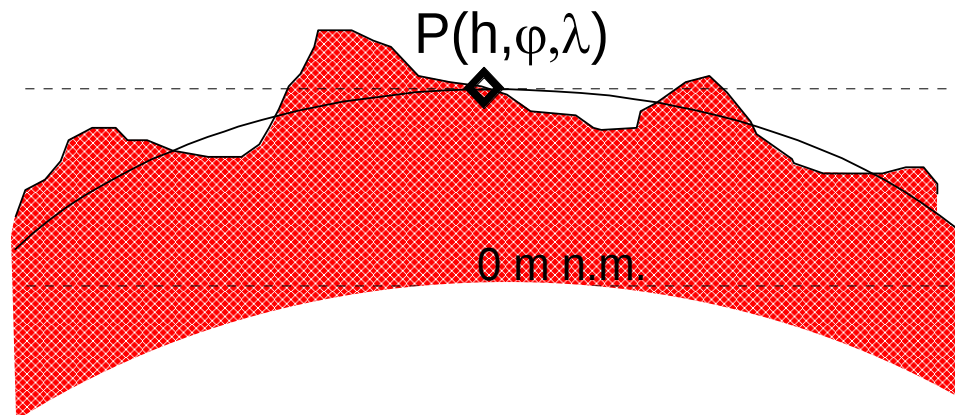
1. koncepcia:

rovinná Bougerova
(nekonečná) doska

Bullardov člen –
- úprava rovinnnej
dosky na zakrivenú
(ohranič. na 166.7 km)

terénne
korekcie

Bouguerova korekcia – oprava o účinok hmôt medzi bodom merania (P) a referenčným telesom



máme 3 koncepcie:

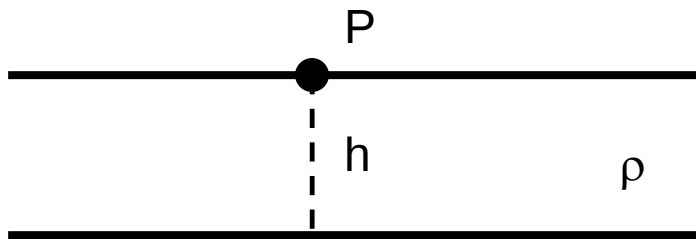
1. tri členy v zmysle Bullarda (1936):
(rovinná doska, Bullard. člen, terr. kor.)
(tzv. Bullard A, Bullard B, Bullard C term)
2. dva členy:
(sférická doska, terénne korekcie)
3. jeden člen:
(tzv. masové korekcie, topo-efekt)

kroky výpočtu Bouguerovej anomálie (tzv. korekcie/redukcie)

Bouguerova korekcia –

1. koncepcia - „klasický spôsob“: najprv je odpočítaný účinok rovinatej nekonečnej dosky, potom je tento krok upravený pre prípad zakrivenej ohraničenej dosky a napokon sú zavedené topokorekcie
 - a) účinok rovinatej nekonečnej Bouguerovej dosky (Boug. slab):

$$2\pi\kappa\rho h \cong 0.0419\rho h \quad (\text{pre [mGal] a [g}\cdot\text{cm}^{-3}\text{]})$$



Pozn.: presné odvodenie bude približne v strede semestra počas riešenia tzv. priamych úloh pre jednoduché telesá (vychádza sa gravitačného účinku tzv. horizontálneho pásu a polonekonečnej dosky)

kroky výpočtu Bouguerovej anomálie (tzv. korekcie/redukcie)

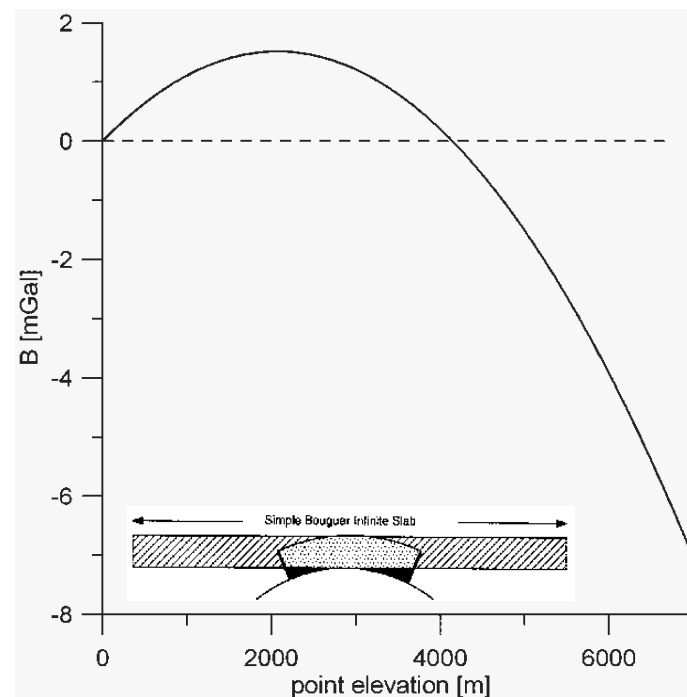
Bouguerova korekcia –

1. koncepcia - „klasický spôsob“ – najprv je odpočítaný účinok rovinatej nekonečnej dosky, potom je tento krok upravený pre prípad zakrivenej ohraničenej dosky a napokon sú zavedené topokorekcie
 - b) zavedenie tzv. Bullardovho člena (B), ktorý je rozdielom účinku sfér. vrstvy (g_{sp}) s otvorovým uhlom $\theta \approx 1.5^\circ$ a rovinatej Bouguerovej dosky ($2\pi\kappa\rho h$)

dnes sa počíta B pomocou aproximujúceho vzorca:

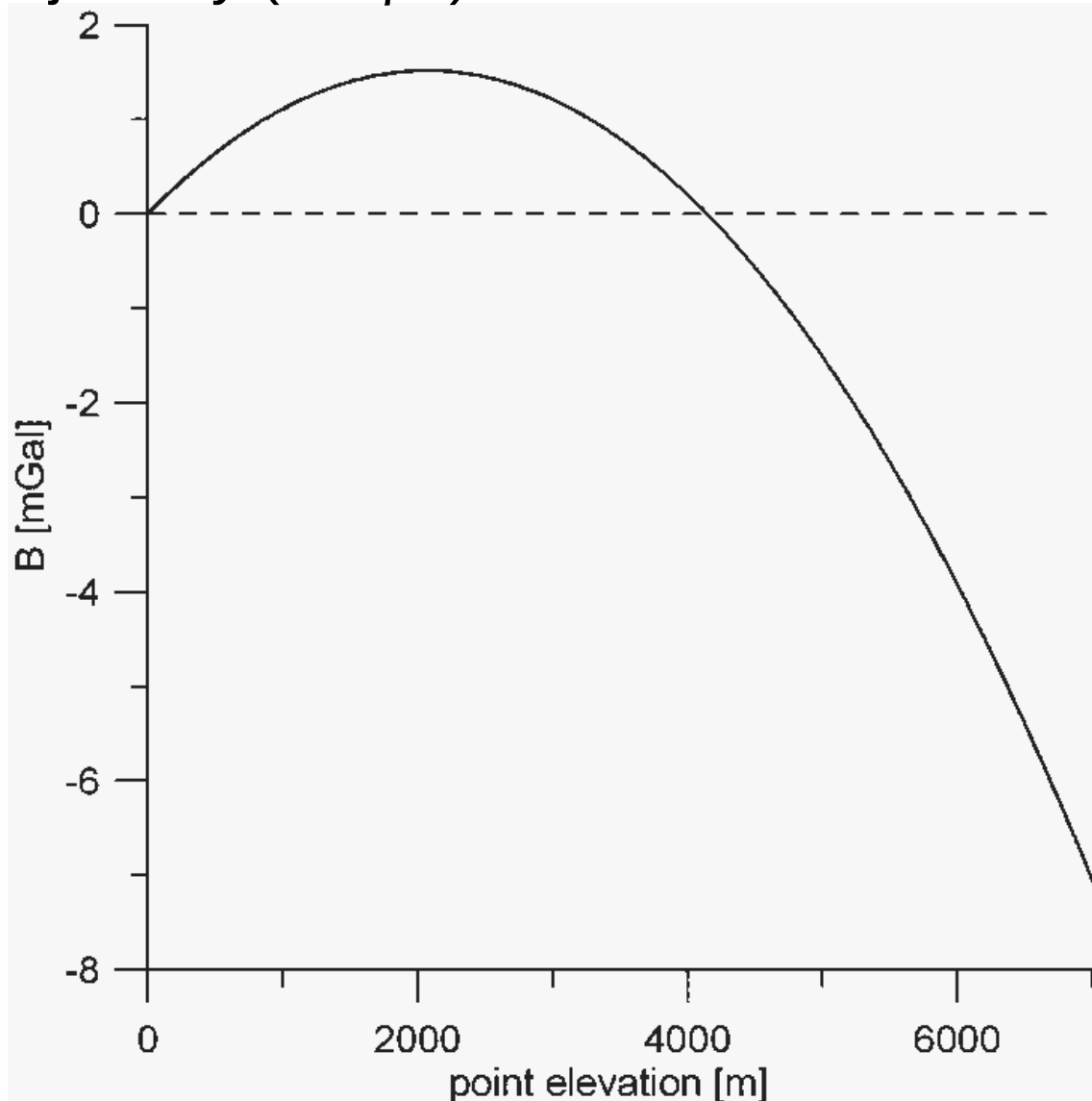
$$B = 0.00146471h - 3.534 \cdot 10^{-7} h^2 \text{ [mGal]}$$

(platí pre $\rho = 2.67 \text{ g.cm}^{-3}$)



tzv. Bullardov člen

rozdiel účinku sfér. vrstvy (g_{sp}) s otvorovým uhlom $\theta \approx 1.5^\circ$
a rovinnej Bouguerovej dosky ($2\pi\kappa\rho h$)



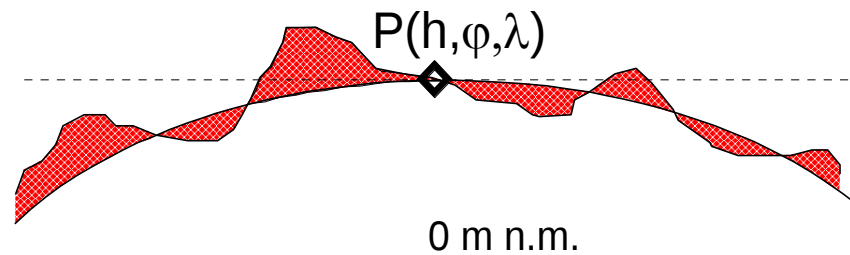
hodnoty v grafe sú
pre hustotu 2.67 g.cm^{-3}

kroky výpočtu Bouguerovej anomálie (tzv. korekcie/redukcie)

Bouguerova korekcia –

1. „klasický spôsob“ – najprv je odpočítaný účinok rovinatej nekonečnej dosky, potom je tento krok upravený pre prípad zakrivenej ohraničenej dosky a napokon sú zavedené terénne korekcie

c) zavedenie terénnych korekcií



Terénne korekcie “ošetrujú” dva dôležité prípady:

1. treba doplniť (pripočítať) gravitačný účinok výplní dolín, ktorý bol odrátaný pri odrátaní sférickej Bouguerovej dosky (rovinnej dosky a Bullard člena),
2. treba pripočítať gravitačný účinok kopcov, ktoré vo väčšine prípadov svojimi hmotami nad úroveň bodu znižujú meranú tiaž (čiže ich vypočítaný účinok by mal mať kladné znamienko); pri “zanorených” kopcoch pod úroveň výšky meraného bodu ich účinok však bude mať opačné znamienko – záporné, takže pre menšie nadmorské výšky výpočtových bodov môžeme získať aj záporné hodnoty terénnych korekcií.

kroky výpočtu Bouguerovej anomálie (tzv. korekcie/redukcie)

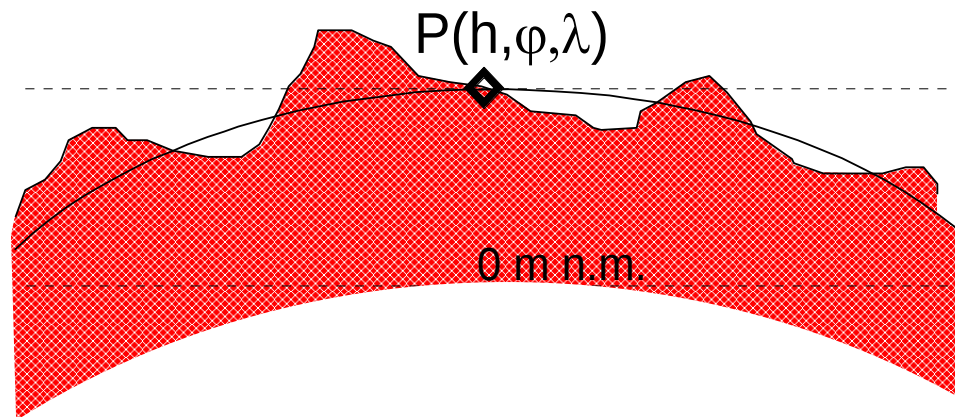
$$\Delta g_B = g - g_n + 0.3086h - g_{sf} + T$$

účinok ohraničenej
sférickej dosky
(do 166.7 km)

terénne korekcie

2. koncepcia

Bouguerova korekcia – oprava o účinok hmôt medzi bodom merania (P) a referenčným telesom



kroky výpočtu Bouguerovej anomálie (tzv. korekcie/redukcie)

Bouguerova korekcia –

2. koncepcia sfér. ohranič. dosky s následnými topokorekciami –
– v súčasnosti asi najviac rozšírené

$$g_{sp}(R) = 2\pi\gamma\sigma \left\{ \left(\rho^2 / (3R^2) + \rho \cos \theta / (3R) + \cos^2 \theta - 2/3 \right) \sqrt{R^2 - 2R\rho \cos \theta + \rho^2} + \right. \\ \left. + R(\cos^3 \theta - \cos \theta) \ln \left[2\sqrt{R^2 - 2R\rho \cos \theta + \rho^2} + 2(\rho - R \cos \theta) \right] \right\} \left| \begin{array}{l} \theta_2 \\ \theta_1 \end{array} \right| \begin{array}{l} R_0 + h_T \\ R_0 + h_B \end{array} .$$

kde:

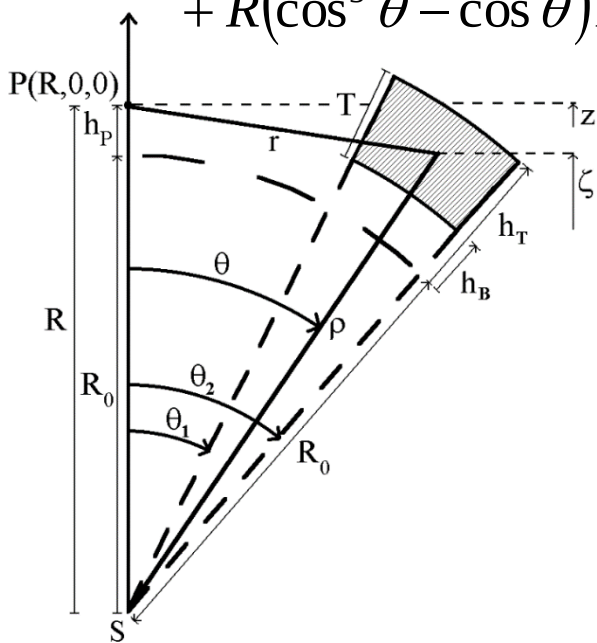
θ – uhol od vert. osi (doplnek zemep. šírky)
(s hranicami θ_1 a θ_2)

ρ – centrálna vzdialenosť časti sfér. vrstvy
(s hranicami od R_0+h_B do R_0+h_T)

R_0 – polomer sférickej Zeme

R – centrálna vzdialenosť výpočt. bodu P
($R = R_0 + h_P$)

h_P – výška bodu P nad sférickou Zemou



kroky výpočtu Bouguerovej anomálie (tzv. korekcie/redukcie)

Bouguerova korekcia –

2. koncepcia sfér. ohranič. dosky s následnými topokorekciami –
– v súčasnosti asi najviac rozšírené

vzťahy pre účinok sfér. vrstvy bol odvodený viacerými autormi:

- Hayford and Bowie (1912), Cassinis et al. (1937), Lejay (1947),
Baeschlin (1948), Jung (1961), Hagiwara (1975), Quereshi (1976),
Rempel (1981), Talwani (1988), Kühtreiber et al. (1989), LaFehr (1991),
Mikuška et al. (2006), a ďalší (možno)

taktiež boli odvodené rôzne aproximácie na základe Taylorových
radov:

- Oliver ed., (1980), Whitman (1990), LaFehr (1991),
Militzer and Weber, ed., (1984), a iní

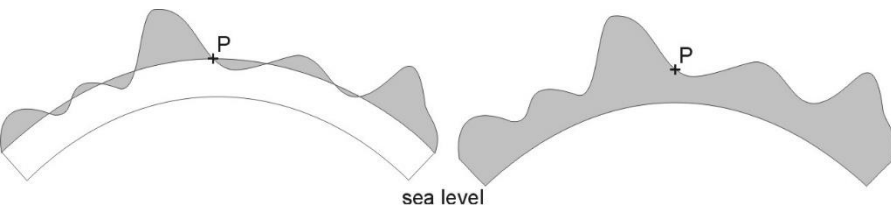
kroky výpočtu Bouguerovej anomálie (tzv. korekcie/redukcie)

$$\Delta g_B = g - g_n + 0.3086h - M$$

tzv. masové korekcie, topo-efekt
(166.7 km)

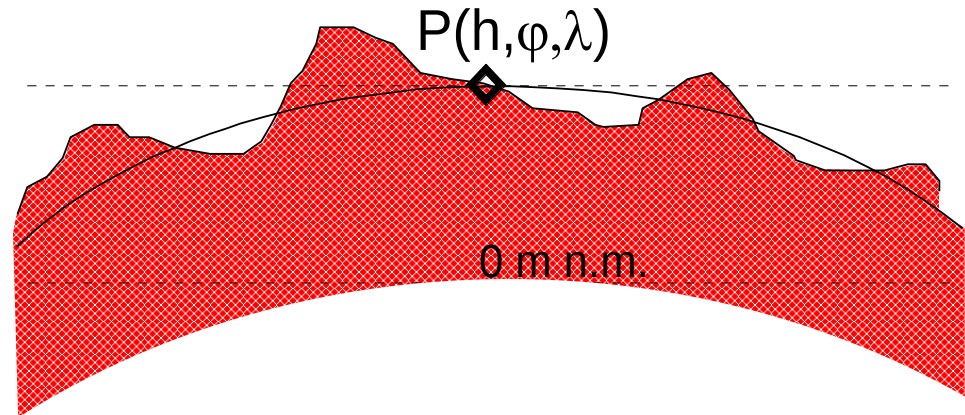
3. koncepcia

Bouguerova korekcia – oprava o účinok hmôt medzi bodom merania (P) a referenčným telesom



terénne korekcie

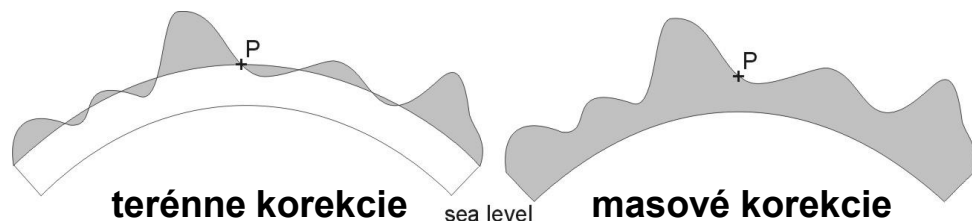
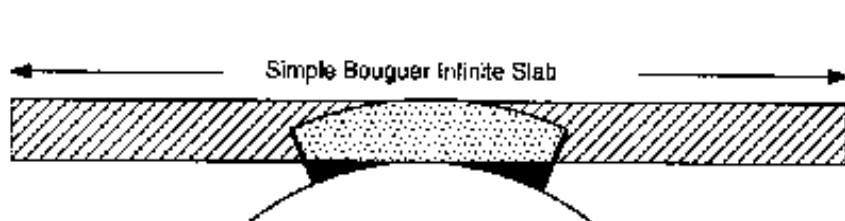
masové korekcie
(topografický efekt)



kroky výpočtu Bouguerovej anomálie (tzv. korekcie/redukcie)

Bouguerova korekcia – výhody a nevýhody jedn. prístupov

3. masové korekcie – priamočiare, avšak realizácia výpočtu je náročnejšia
2. koncepcia sfér. ohranič. dosky s následnými terénnymi korekciami –
– v súčasnosti asi najviac rozšírená
1. „klasický“ spôsob – najprv je odpočítaný účinok rovinatej nekonečnej dosky, potom je tento krok upravený pre prípad zakrivenej ohraničenej dosky a napokon sú zavedené terr. korekcie



kroky výpočtu Bouguerovej anomálie

(tzv. korekcie/redukcie)

úplné Bouguerove anomálie (complete Bouguer anomalies):

$$\Delta g_B = \text{ÚBA} = g - g_n + 0.3086h - 0.0419h\rho - B + T$$

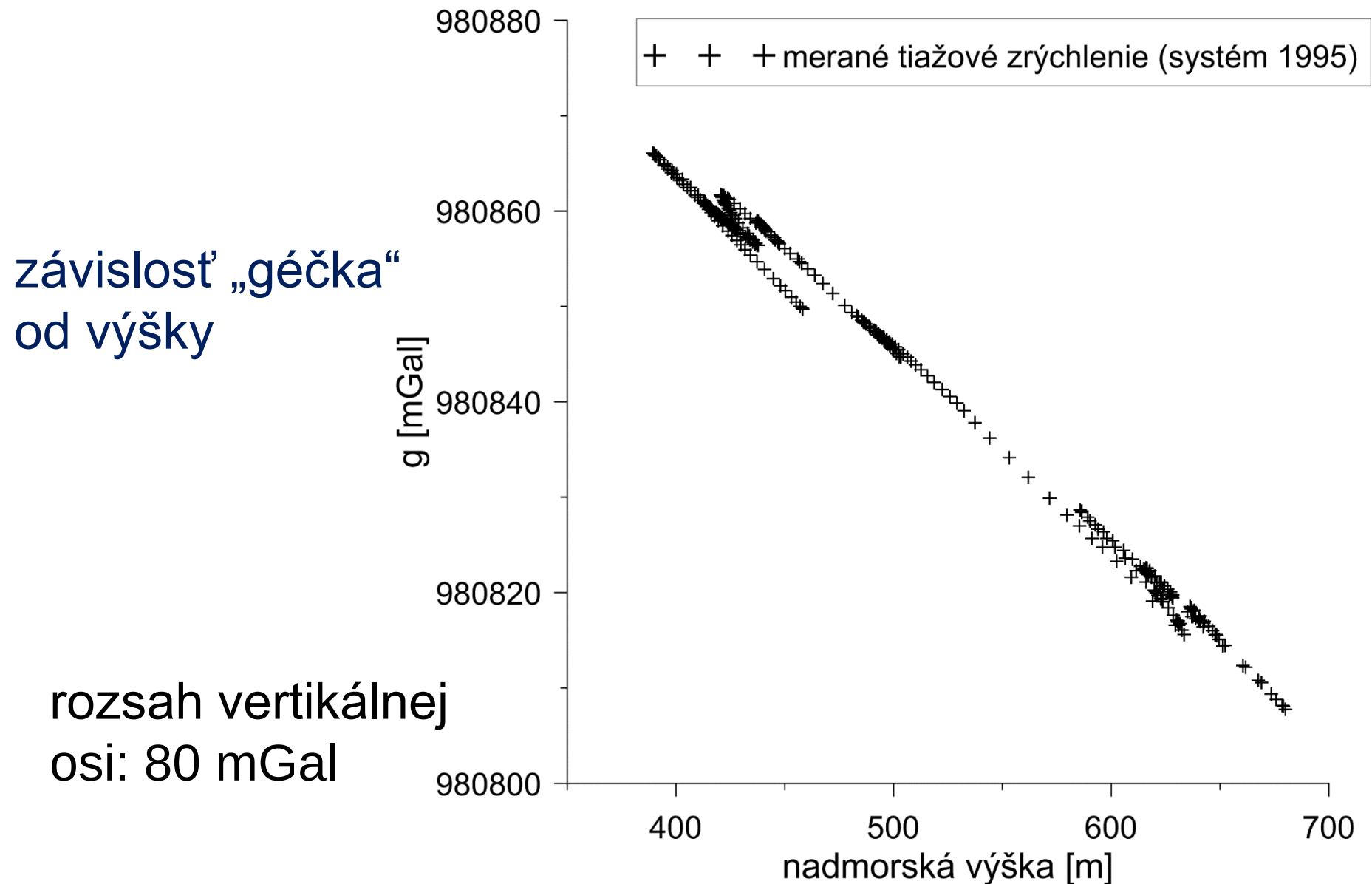
neúplné Bouguerove anomálie (simple Bouguer anomalies),
používané pri detailnom prieskume a v mikrogravimetrii:

$$\Delta g_{NB} = \text{NBA} = g - g_n + 0.3086h - 0.0419h\rho$$

Fayeove anomálie, anomálie vo voľnom vzduchu (Faye anomalies, free air anomalies), používané v geodézii a v niektorých geofyzikálnych aplikáciách:

$$\Delta g_F = \text{Faye} = g - g_n + 0.3086h$$

Ako sa vyvíjajú výškové závislosti pri výpočte ÚBA?

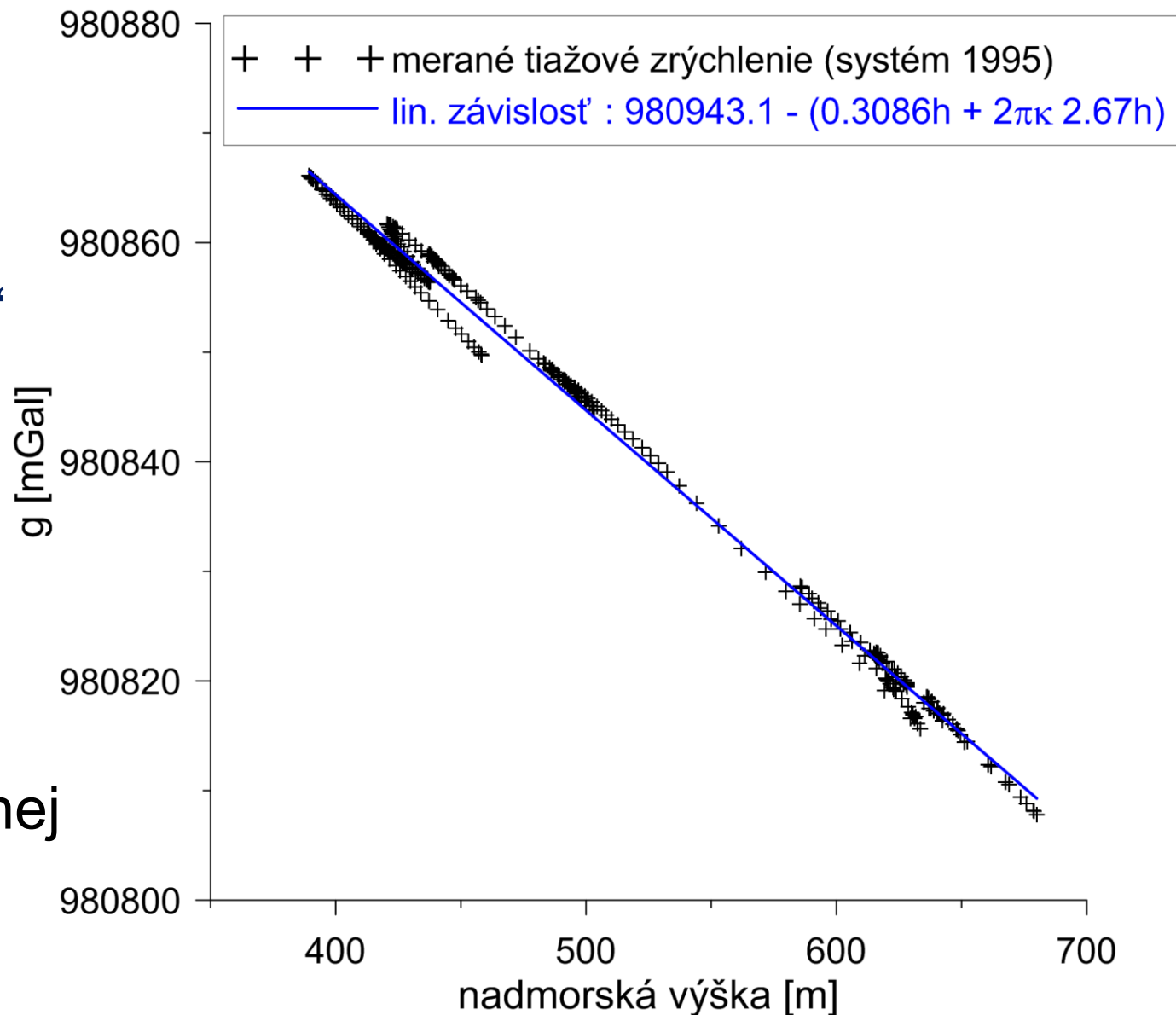


lokalita Mikušovce (detailná gravimetria v bradlovom pásme)

Ako sa vyvíjajú výškové závislosti pri výpočte ÚBA?

závislosť „géčka“
od výšky

rozsah vertikálnej
osi: 80 mGal

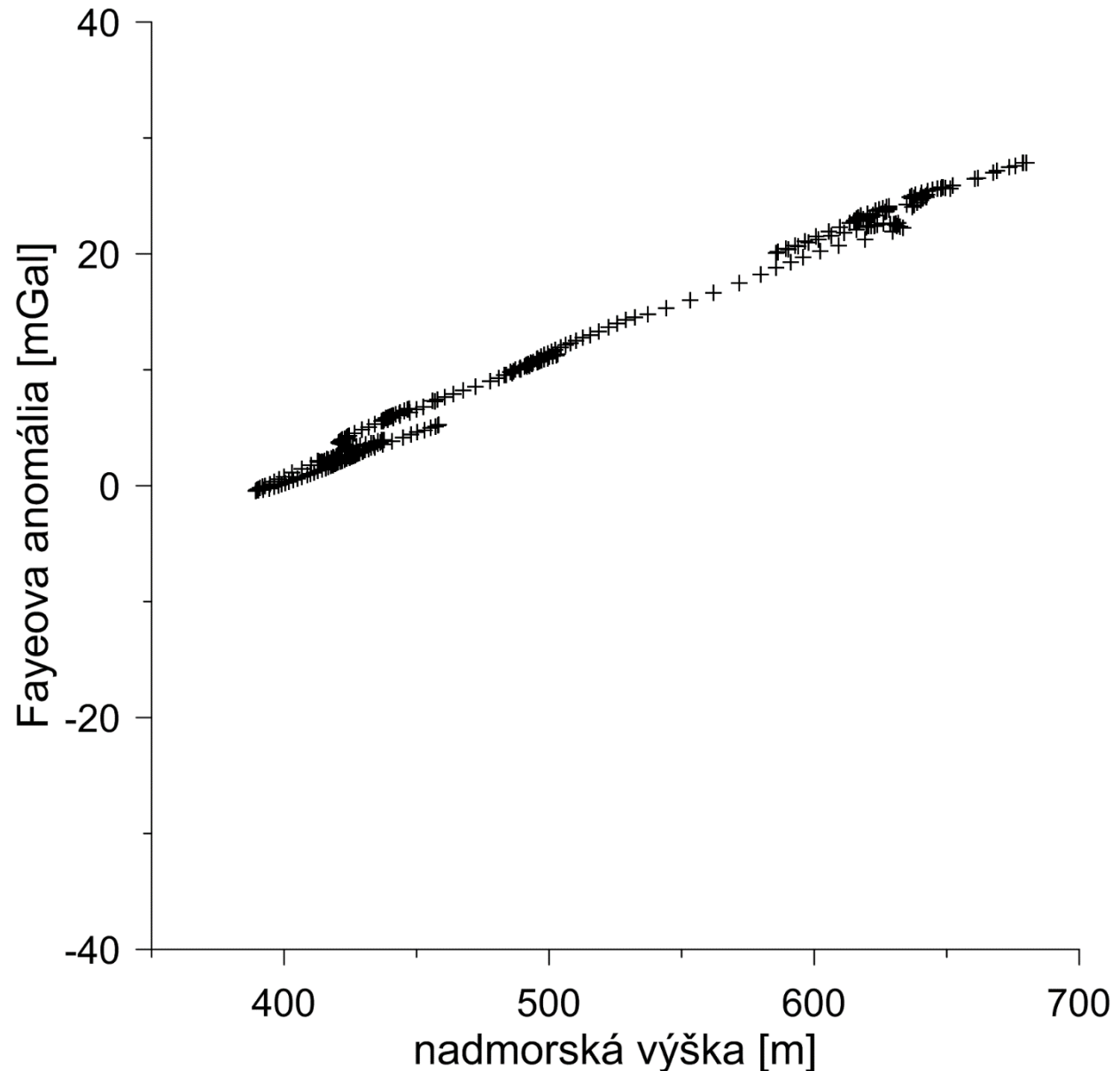


lokalita Mikušovce (detailná gravimetria v bradlovom pásme)

Ako sa vyvíjajú výškové závislosti pri výpočte ÚBA?

Závislosť hodnôt
Fayeovej
anomálie
od výšky

rozsah vertikálnej
osi: 80 mGal

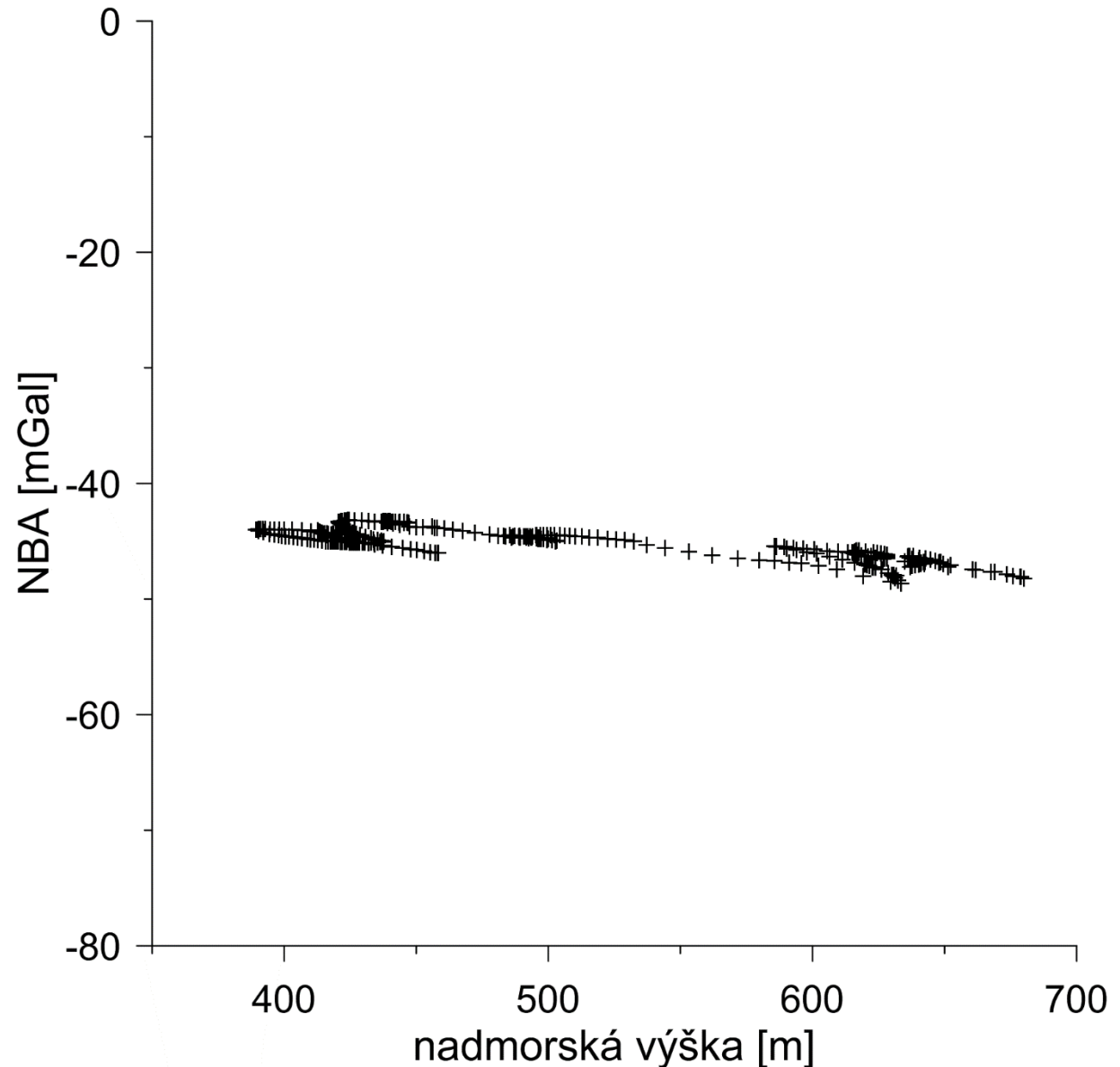


lokalita Mikušovce (detailná gravimetria v bradlovom pásme)

Ako sa vyvíjajú výškové závislosti pri výpočte ÚBA?

Závislosť hodnôt
NBA od výšky

rozsah vertikálnej
osi: 80 mGal

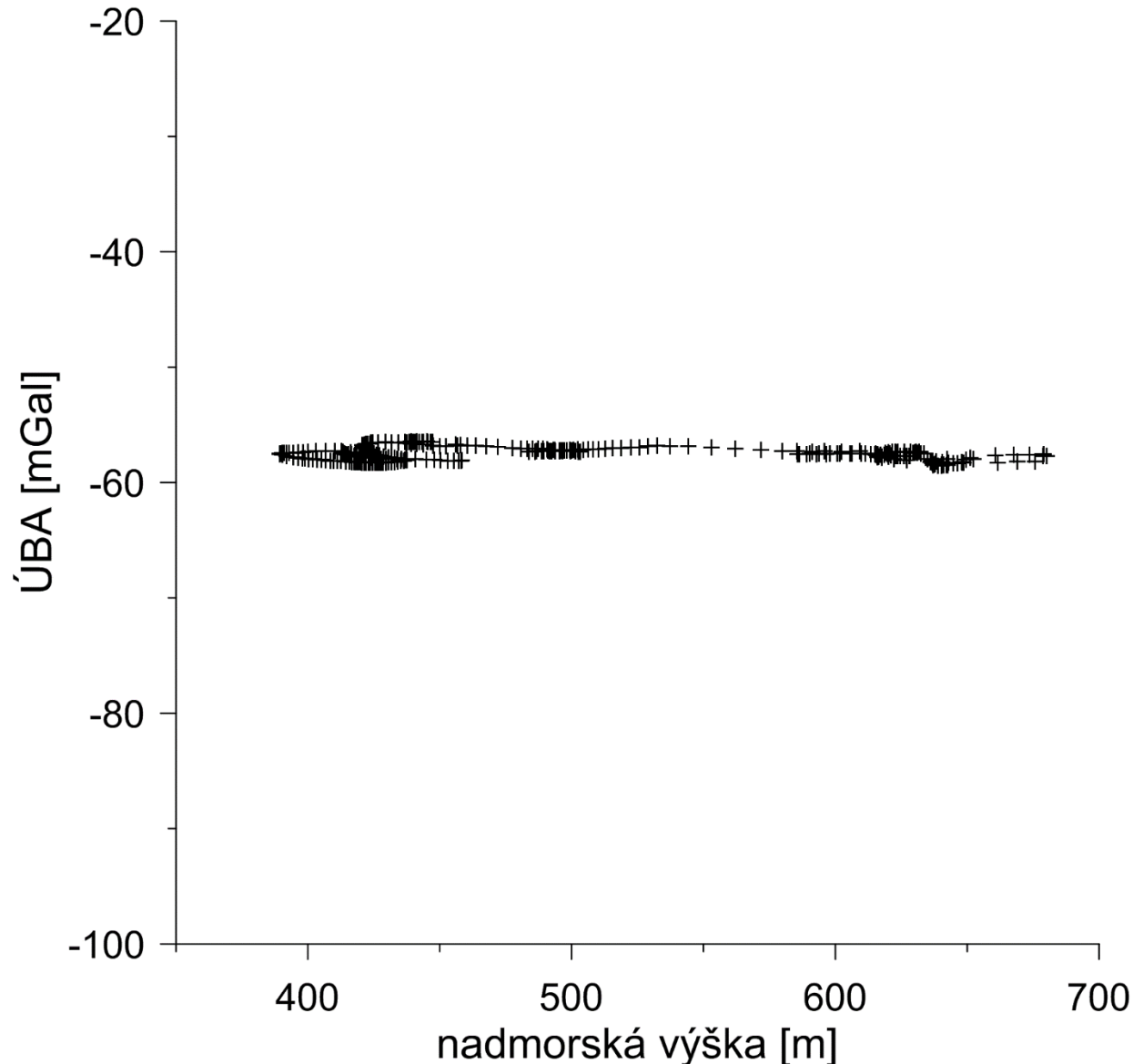


lokalita Mikušovce (detailná gravimetria v bradlovom pásme)

Ako sa vyvíjajú výškové závislosti pri výpočte ÚBA?

Závislosť hodnôt
ÚBA od výšky
(aj s terénnymi
korekciami)

rozsah vertikálnej
osi: 80 mGal



lokalita Mikušovce (detailná gravimetria v bradlovom pásme)

Výškové závislosti - zaujímavosť

ZÁKLADNÁ MAPA SLOVENSKEJ REPUBLIKY

Súradnicový systém Jednotnej trigonometrickej siete katastrálnej

Výškový systém baltský - po vyrovnaní

ÚRAD GEODÉZIE, KARTOGRAFIE A KATASTRA SLOVENSKEJ REPUBLIKY

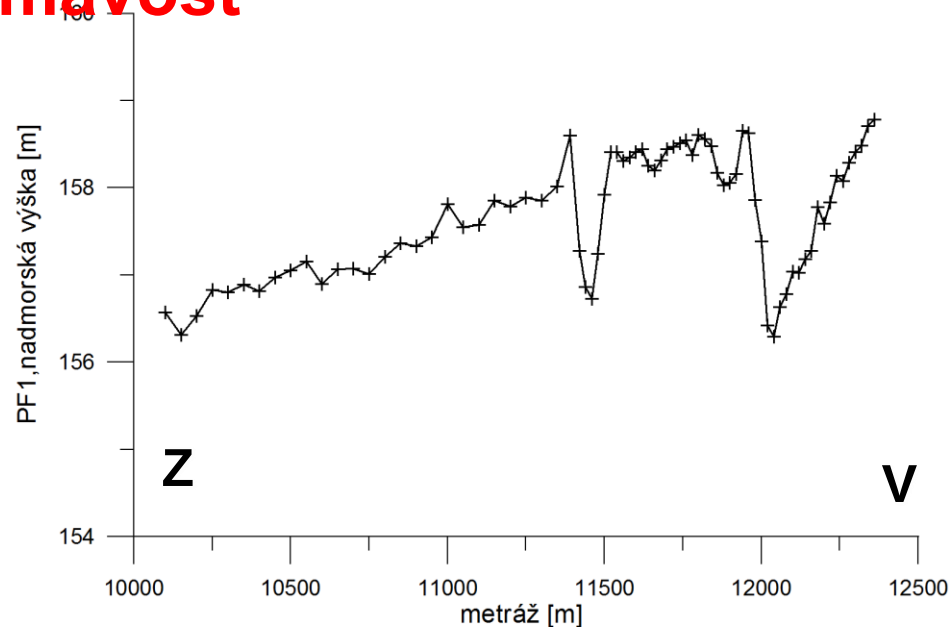
35-32-18



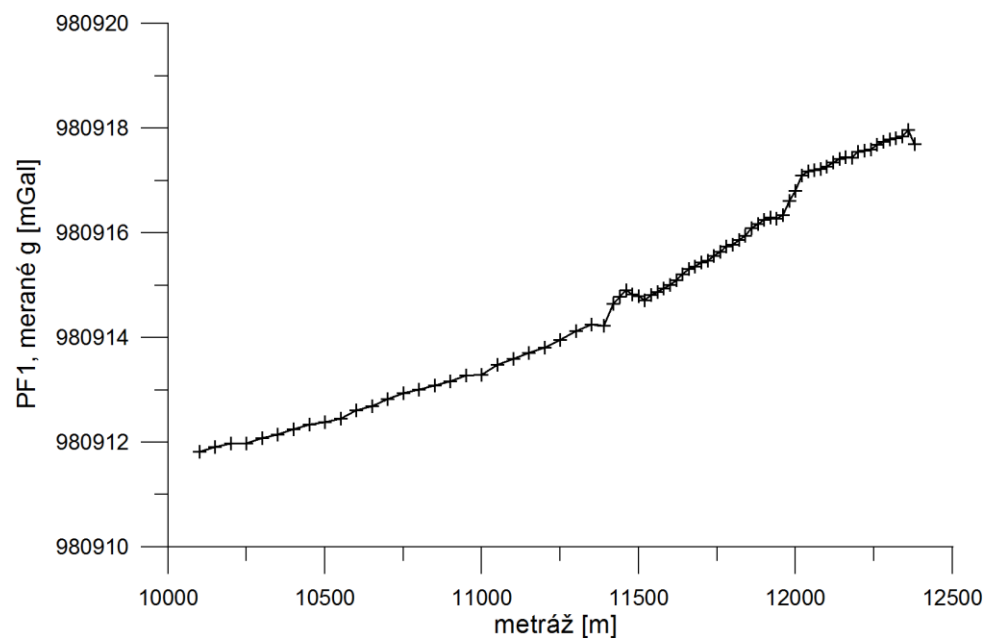
lokalita Piešťany (detailná gravimetria pre plánovanie geotermálneho vrtu) – profily Z–V smeru z Podunajskej panvy ku Považskému Inovcu

Výškové závislosti - zaujímavosť

nadmorské
výšky:



merané g:



lokalita Piešťany (detailná gravimetria)

trošku z histórie:

Kto zaviedol pojem Bouguerove anomálie?

Určite ich používa Bullard (1936), pred ním Lambert (1930) a dopátrali sme sa ku nim aj v práci od Putnama (1895). Hayford and Bowie (1912) používajú výpočet v zmysle dnešnej ÚBA, aj keď ju tak nenazývajú.

Pojem Bouguerova redukcia však uvádzajú už Thomas Young (1819) a nezávisle od neho aj Simon Denis Poisson (1833) - ten účinok nekonečnej dosky matematicky odvádza (v samotnej práci „La figure de la terre, 1749“ to však sám Bouguer neodvádza !).



Pierre Bouguer
(1698 – 1758)

RESULTS OF A TRANSCONTINENTAL SERIES OF
GRAVITY MEASUREMENTS.

BY

GEORGE ROCKWELL PUTNAM.

[Read before the Society, February 2, 1895, and published by permission
of the Superintendent of the U. S. Coast and Geodetic Survey.]

trošku z histórie:

Kto zaviedol pojem Bouguerove anomálie?

Určite ich používa Bullard (1936), pred ním Lambert (1930) a dopátrali sme sa ku nim aj v práci od Putnama (1895). Hayford and Bowie (1912) používajú výpočet v zmysle dnešnej ÚBA, aj keď ju tak nenazývajú.

Pojem Bouguerova redukcia však uvádzajú už Thomas Young (1819) a nezávisle od neho aj Simon Denis Poisson (1833) - ten účinok nekonečnej dosky matematicky odvádza (v samotnej práci „La figure de la terre, 1749“ to však sám Bouguer neodvádza!).



Pierre Bouguer
(1698 – 1758)

Dôležitý je odkaz v práci Helmerta (1884) na str. 166-167:

Die Formel (6) nennt man die *Regel von Young*, auch *Formel von Poisson* für *ebenes Terrain*. Wir werden sie aber nach *Bouguer* bezeichnen, der zuerst derartige Beziehungen untersuchte.

LA FIGURE DE LA TERRE,

Déterminée par les Observations de Messieurs
BOUGUER, & DE LA CONDAMINE, de
l'Académie Royale des Sciences, envoyés par
ordre du Roy au Pérou, pour observer aux
environs de l'Equateur.

*Avec une Relation abrégée de ce Voyage, qui contient
la description du Pays dans lequel les
Opérations ont été faites.*

PAR M. BOUGUER.



A PARIS, QUAY DES AUGUSTINS,
Chez CHARLES-ANTOINE JOMBERT, Libraire du Roy
pour l'Artillerie & le Génie, au coin de la rue Gift-le-Cœur,
à l'Image Notre-Dame.

M. DCC. XLIX.



Pierre Bouguer
(1698 – 1758)

LA FIGURE

DE LA

TERRE,

1/2



“Bouguer treats on the diminution of attraction at different heights above the level of the sea. He finds that on a mountain at the height h above the level of the sea, the attraction is proportional to

$$(r - 2h)\Delta + \frac{3}{2}h\delta \quad (3.1)$$

where r is the Earth radius, Δ the Earth mean density, and δ the density of the mountain. This is the first appearance of the formula, which has now passed into elementary books.”

lorsqu'il est produit par une chaîne de montagnes. Il est la moitié de celui que produiroit la couche sphérique, ce qui nous donne $\frac{3}{2}h\delta$ pour son expression. Et si on l'ajoute à la pesanteur $r - 2h \times \Delta$ que produit en a le Globe A D D, nous aurons $r - 2h \times \Delta + \frac{3}{2}h\delta$ pour la pesanteur à Quito, pendant que $r\Delta$ exprime celle qu'on

LA FIGURE DE LA TERRE,

2/2



First let us multiply all three terms by the factor $\frac{4}{3}\pi\gamma$, where the last symbol stands for the gravitational constant with the known value of $6.674 \times 10^{-11} \text{ kg/m}^3 \text{ per s}^2$ (Petit and Luzum, 2010, p. 18). We get

$$\frac{4}{3}\pi\gamma r\Delta - \frac{8}{3}\pi\gamma h\Delta + 2\pi\gamma h\delta \quad (3.1b)$$

It is now evident that the first term of Eq. (3.1b) represents the gravitational effect of a homogenous sphere with radius r and density Δ , calculated at its surface. Taking the γ value as quoted earlier, Δ equal to 5515 kg/m^3 (Cox, 2002, p. 12) and $r = 6371000 \text{ m}$ (the mean radius of the oblate ellipsoidal reference figure, Cox, 2002, p. 240) we obtain for the Bouguer's first term the value about 981938 mGal ($1 \text{ mGal} = 10^{-5} \text{ m/s}^2$).

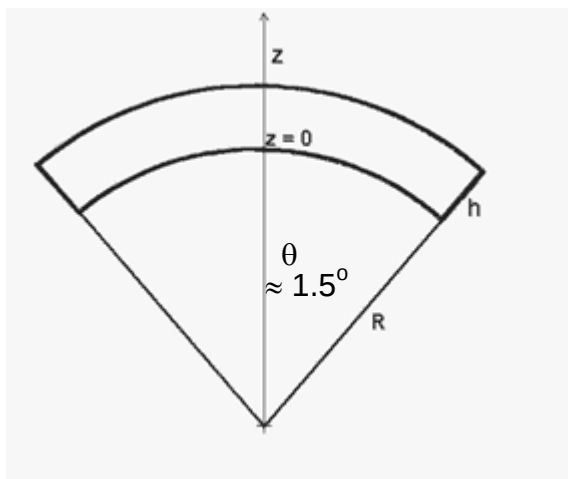
-
1. člen: akože normálne pole (sférické),
 2. člen: Fayeova korekcia (vo voľnom vzduchu),
 3. člen: rovinná Bouguer. korekcia

kroky výpočtu Bouguerovej anomálie (tzv. korekcie/redukcie)

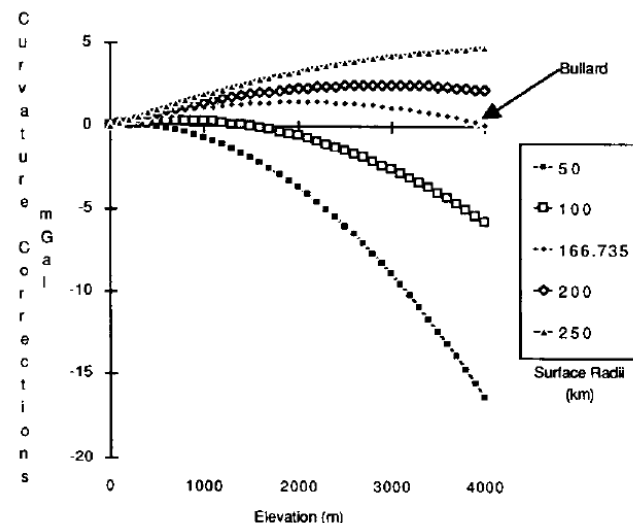
Bouguerova korekcia –

Prečo je volený otvorový uhol sférickej dosky $\theta \approx 1.5^\circ$ (presne $\theta = 1^\circ 29' 58''$) ?
(zodpovedá vzdialenosti po povrchu Zeme cca. 166.7 km)

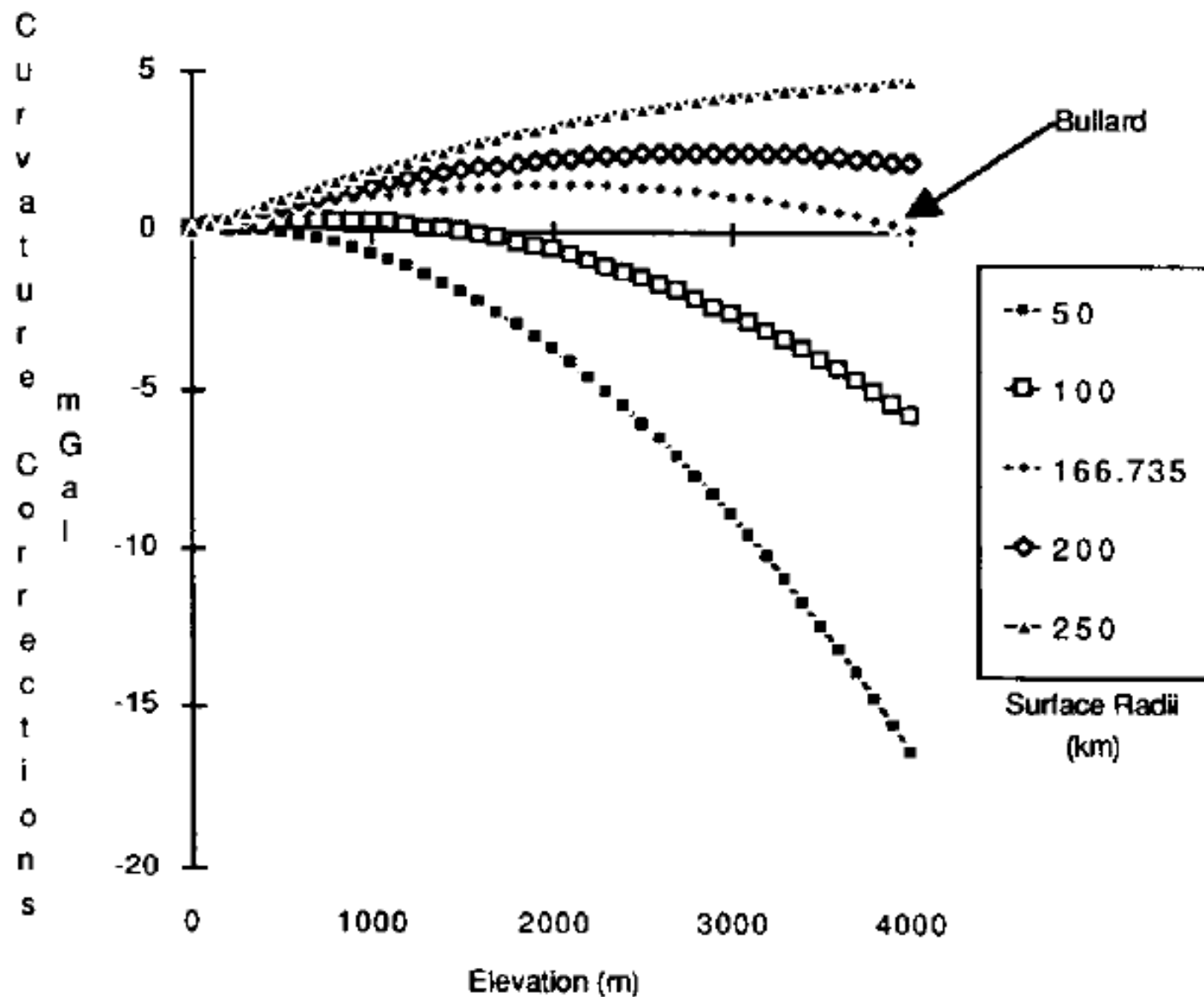
1. uvedený uhol je hranicou tzv. Hayford-Bowieho zóny O_2 a zodpovedá skoro presne 100 americkým mílam (t.j. 160.9 km) (?) - nesedí to,
2. Lambert (1930) a Bullard (1936) tvrdia, že v rámci tohto otvorového uhla je viditeľný zemský reliéf – asi mali na mysli, že by bolo ešte vidieť nezanorené kopce,
3. Schleusener (1953) tvrdí, že tento uhol dáva účinok sfér. dosky, ktorý sa najviac podobá na účinok rovinnej nekonečnej Boug. dosky (pravdivé tvrdenie).



**v podstate to presne
nevieme - ale vieme,
že to bolo určené dobre**

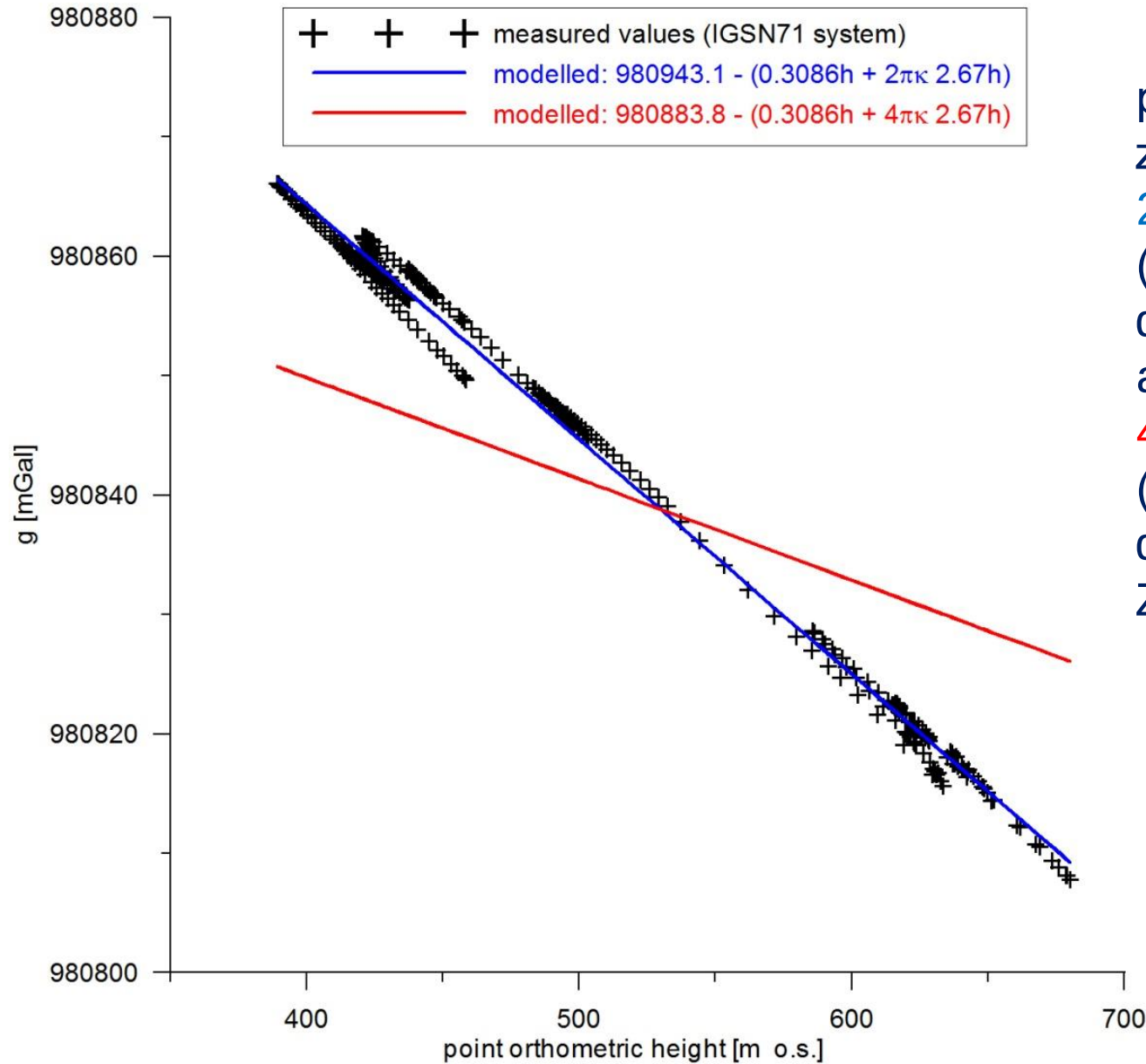


Prečo je volený otvorový uhol sférickej dosky $\theta \approx 1.5^\circ$ (presne $\theta = 1^\circ 29' 58''$) ?
 (zodpovedá vzdialenosti po povrchu Zeme cca. 166.7 km)



rovinná Bouguerova korekcia – ako je to „v prírode“?

(nebolo by vhodnejšie odpočítať účinok kompletnej sférickej vrstvy?)



porovnanie 2 lineárnych závislostí:

$2\pi\kappa\rho h$

(rovinná nekonečná doska)

a

$4\pi\kappa\rho h$

(kompletná sférická doska - okolo celej Zemi)