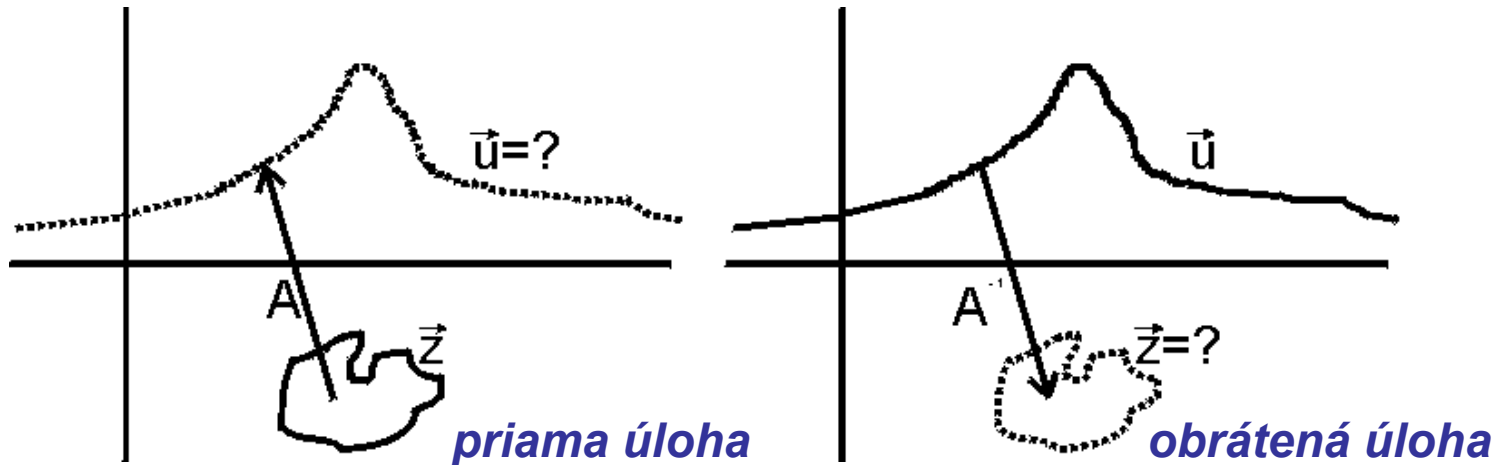


priama úloha v gravimetrii

priama vs. obrátená úloha v geofyzike (direct, inverse problem in geophysics)

priama úloha:

známy súbor (vektor) parametrov zdroja \mathbf{z} \rightarrow vypočítavame pole (vektor) \mathbf{u}
 $\mathbf{u} = A(\mathbf{z})$, kde $A()$ – je tzv. operátor priamej úlohy

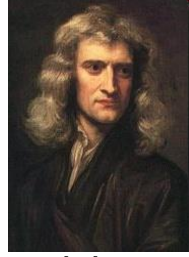


obrátená úloha:

známe pole (vektor) \mathbf{u} \rightarrow určujeme súbor (vektor) parametrov zdroja \mathbf{z}
(hĺbka, rozmery, tvar, fyzikálne parametre)

$\mathbf{z} = A^{-1}(\mathbf{u})$, kde $A^{-1}()$ – je tzv. operátor obrátenej úlohy

je omnoho omnoho náročnejšia, ako priama úloha



priama úloha v gravimetrii – základné odvodenia

odvodenie gravitačného potenciálu V

vychádzame z Newtonovho zákona: $F = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^2}$

F – gravitačná sila, pôsobiaca medzi dvoma telesami s hmotnosťami m_1 a m_2 ,
r – je ich vzdialenosť,
 κ – univerzálna gravitačná konštanta

pre intenzitu sily **f** platí: $f = \frac{F}{m_1} = \kappa \frac{m_2}{r^2} = \kappa \frac{m}{r^2}$

tu sme položili $m_2 = m$

a pre malý element hmotnosti **dm** platí: $f = \kappa \frac{dm}{r^2}$

Uvažujme teraz, akú potenciálnu energiu získa tento malý element hmotnosti **dm**, keď ho umiestnime do určitého bodu v gravitačnom poli. Táto energia sa dá vyjadriť pomocou práce **A** premiestnime **dm** v gravitačnom poli z miesta **1** do miesta **2**:

$$A = -\int_1^2 f \, dr = -\int_1^2 \kappa \frac{dm}{r^2} \, dr = -\left[-\kappa \frac{dm}{r} \right]_1^2 = \kappa \left[\frac{dm}{r} \right]_1^2 .$$

pozn.: znamienko mínus pred integrálom vyjadruje skutočnosť, že práca pôsobí proti pôsobeniu gravitačného poľa (potenciálna energia sa získava).

Uvažujme, že bod **1** je v nekonečne – čiže akú prácu musíme vynaložiť, aby sme hmotnosť **dm** preniesli z nekonečna do jeho súčasnej pozície (čiže do bodu **2**).

Potom bude pre prácu **A** platíť:

priama úloha v gravimetrii – základné odvodenia

odvodenie gravitačného potenciálu V

Potom bude pre prácu A platiť:

$$A = \kappa \left[\frac{dm}{r} \right]_{\infty}^2 .$$

Dosadenie spodnej hranice vedie k nule a teda získame:

$$A = \kappa \left[\frac{dm}{r} \right]_{\infty}^2 = \kappa \frac{dm}{r_2} = \kappa \frac{dm}{r} .$$

Pričom sme položili $r_2 = r$.

Pre teleso s hmotnosťou m (a objemom τ) vieme túto potenciálnu energiu vyjadriť integrálom cez celkovú hmotnosť:

$$A = V = \kappa \int_m \frac{dm}{r}$$

Alebo integrovaním cez 3D objem τ (pri uplatnení vzťahu $dm = \sigma d\tau$, kde σ je hustota):

$$V = \kappa \iiint_{\tau} \frac{\sigma d\tau}{r}$$

- základný vzťah pre gravitačný potenciál

priama úloha v gravimetrii – základné odvodenia

vyššie derivácie potenciálu V:

Pri reálnych meraniach však potenciál V (v súčasnosti) však merať nevieme. namiesto toho meriame zrýchlenie g , ktoré vyjadrujeme ako vertikálnu deriváciu potenciálu V_z (veľmi malá zmena pozdĺž osi z):

$$g \approx V_z = \frac{\partial V}{\partial z}$$

Zo zrýchlenia V_z vychádzajú všetky ďalšie vyššie derivácie (gradienty) potenciálu: V_{xz} , V_{yz} , V_{zz} a V_{xx} , V_{yy} , V_{zz} , V_{xz} , V_{yz} , V_{xy} .

Tieto tvoria tzv. tenzor vyšších derivácií:

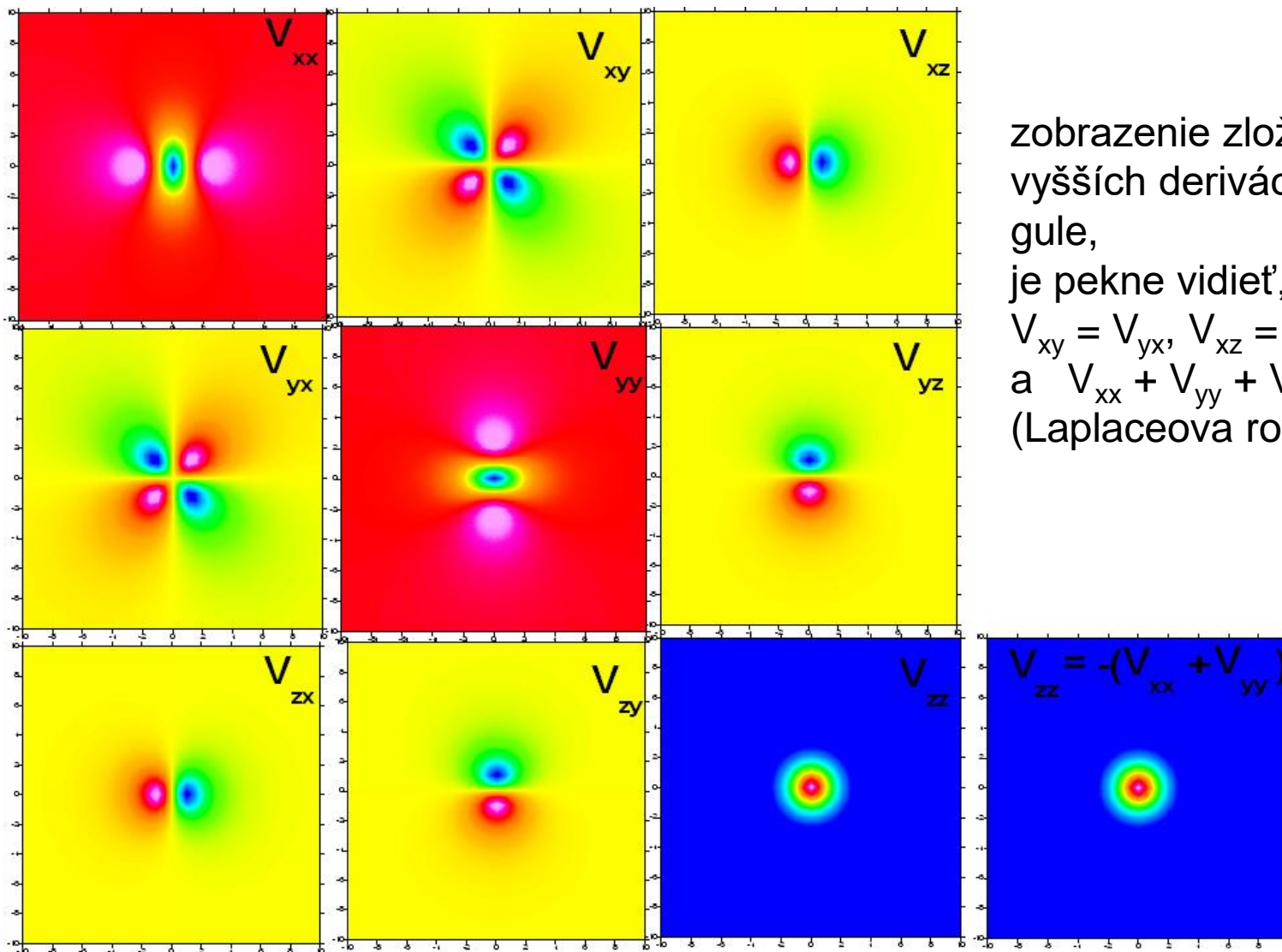
$$\begin{pmatrix} V_{xx} & V_{xy} & V_{xz} \\ V_{yx} & V_{yy} & V_{yz} \\ V_{zx} & V_{zy} & V_{zz} \end{pmatrix}$$

Tieto dokážeme v súčasnosti merať pomocou gradientometrov (letecky a na mori). Z celého tenzora je nezávislých 5 zložiek: V_{xy} , V_{xz} , V_{yz} , V_{zz} a V_{yy} , nakoľko platí $V_{xy} = V_{yx}$, $V_{xz} = V_{zx}$, $V_{yz} = V_{zy}$ a $V_{xx} + V_{yy} + V_{zz} = 0$ (Laplaceova rovnica).

priama úloha v gravimetrii – základné odvodenia

vyššie derivácie potenciálu V:

$$V_{xx}, V_{xy}, V_{xz}, V_{yx}, V_{yy}, V_{yz}, V_{zx}, V_{zy}, V_{zz}$$



zobrazenie zložiek tenzora vyšších derivácií pre prípad gule,

je pekne vidieť, že platí:

$$V_{xy} = V_{yx}, V_{xz} = V_{zx}, V_{yz} = V_{zy}$$

$$\text{a } V_{xx} + V_{yy} + V_{zz} = 0$$

(Laplaceova rovnica).

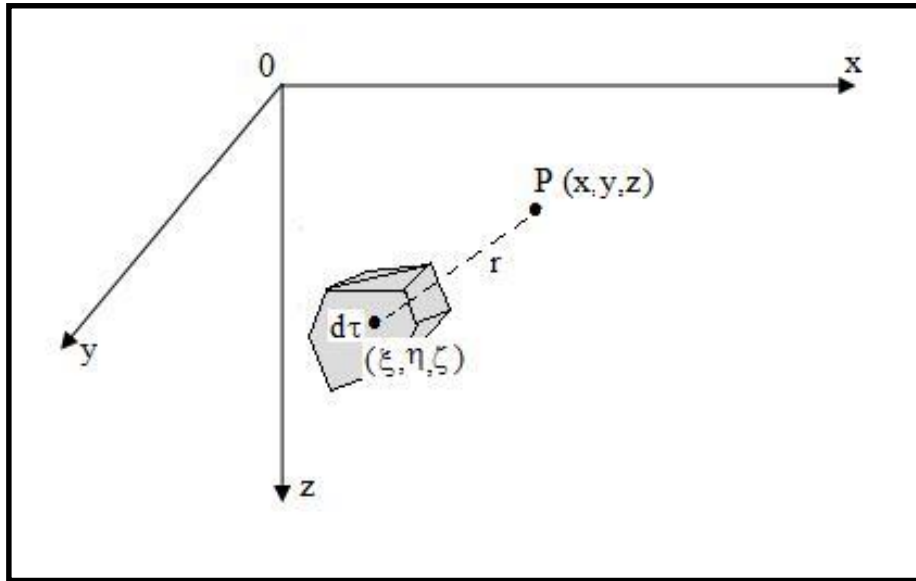
priama úloha v gravimetrii – základné odvodenia

vyjadrenie vzťahu pre potenciál V v kartézskych súradniciach:

bod výpočtu: $P(x, y, z)$

element objemu: $d\tau(\xi, \eta, \zeta)$

vzdialenosť medzi nimi: $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$



$$V = \kappa \iiint_{\tau} \frac{\sigma d\tau}{r} = \kappa \iiint_{\tau} \frac{\sigma(\xi, \eta, \zeta)}{\left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} d\xi d\eta d\zeta$$

priama úloha v gravimetrii – základné odvodenia

vyjadrenie vzťahov pre vyššie derivácie potenciálu V v kartézskych súradniciach:

$$V_x = \frac{\partial V}{\partial x} = \kappa \iiint \frac{\sigma(\xi, \eta, \zeta)(\xi - x)}{\left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} d\xi d\eta d\zeta$$

$$V_y = \frac{\partial V}{\partial y} = \kappa \iiint \frac{\sigma(\xi, \eta, \zeta)(\eta - y)}{\left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} d\xi d\eta d\zeta$$

$$V_z = \frac{\partial V}{\partial z} = \kappa \iiint \frac{\sigma(\xi, \eta, \zeta)(\zeta - z)}{\left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} d\xi d\eta d\zeta$$

najpoužívanejší vzťah v odvádzaniach vzťahov pre priamu úlohu v gravimetrii (tzv. 3D prípad)

priama úloha v gravimetrii – základné odvodenia

vyjadrenie vzťahov pre vyššie derivácie potenciálu V
v kartézskych súradniciach:

$$V_{xx} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \kappa \iiint \frac{\sigma(\xi, \eta, \zeta) \left[2(\xi - x)^2 - (\eta - y)^2 - (\zeta - z)^2 \right]}{\left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 \right]^{\frac{5}{2}}} d\xi d\eta d\zeta$$

$$V_{yy} = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \kappa \iiint \frac{\sigma(\xi, \eta, \zeta) \left[2(\eta - y)^2 - (\xi - x)^2 - (\zeta - z)^2 \right]}{\left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 \right]^{\frac{5}{2}}} d\xi d\eta d\zeta$$

$$V_{zz} = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \kappa \iiint \frac{\sigma(\xi, \eta, \zeta) \left[2(\zeta - z)^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2 \right]}{\left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 \right]^{\frac{5}{2}}} d\xi d\eta d\zeta$$

priama úloha v gravimetrii – základné odvodenia

vyjadrenie vzťahov pre vyššie derivácie potenciálu V v kartézskych súradniciach:

$$V_{xz} = \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} = 3\kappa \iiint \frac{\sigma(\xi, \eta, \zeta)(\xi - x)(\zeta - z)}{\left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 \right]^{\frac{5}{2}}} d\xi d\eta d\zeta$$

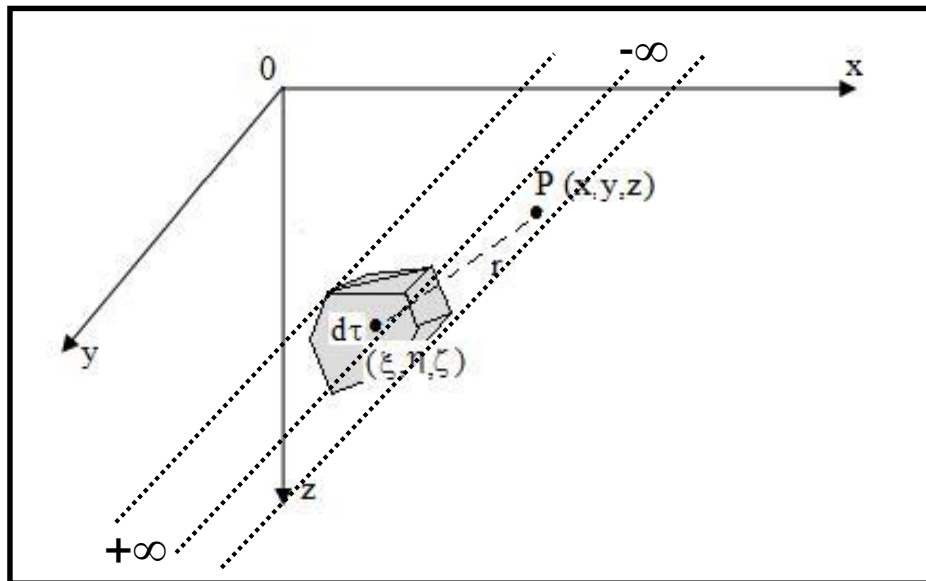
$$V_{yz} = \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y} = 3\kappa \iiint \frac{\sigma(\xi, \eta, \zeta)(\eta - y)(\zeta - z)}{\left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 \right]^{\frac{5}{2}}} d\xi d\eta d\zeta$$

$$V_{xy} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = 3\kappa \iiint \frac{\sigma(\xi, \eta, \zeta)(\xi - x)(\eta - y)}{\left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 \right]^{\frac{5}{2}}} d\xi d\eta d\zeta$$

$$V_{zzz} = \frac{\partial^3 V}{\partial z^3} = 3\kappa \iiint \frac{\sigma(\xi, \eta, \zeta)(\zeta - z) \left[2(\zeta - z)^2 - 3(\xi - x)^2 - 3(\eta - y)^2 \right]}{\left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 \right]^{\frac{7}{2}}} d\xi d\eta d\zeta$$

priama úloha v gravimetrii – základné odvodenia

vyjadrenie vzťahov pre V_z – tzv. 2D prípad:



teleso je natiahnuté v smere osi y (parameter η) od $-\infty$ do $+\infty$ a vo vzťahu pre V_z zo slajdu č.8 je riešený integrál pre η :

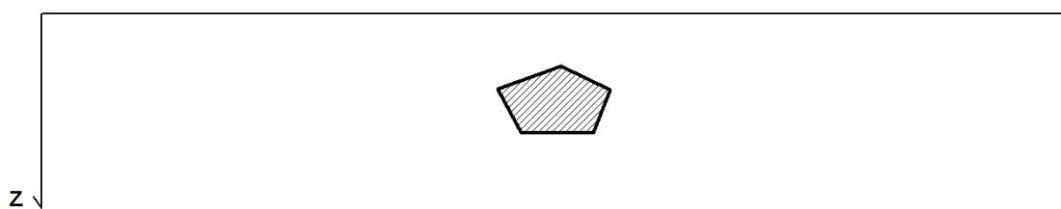
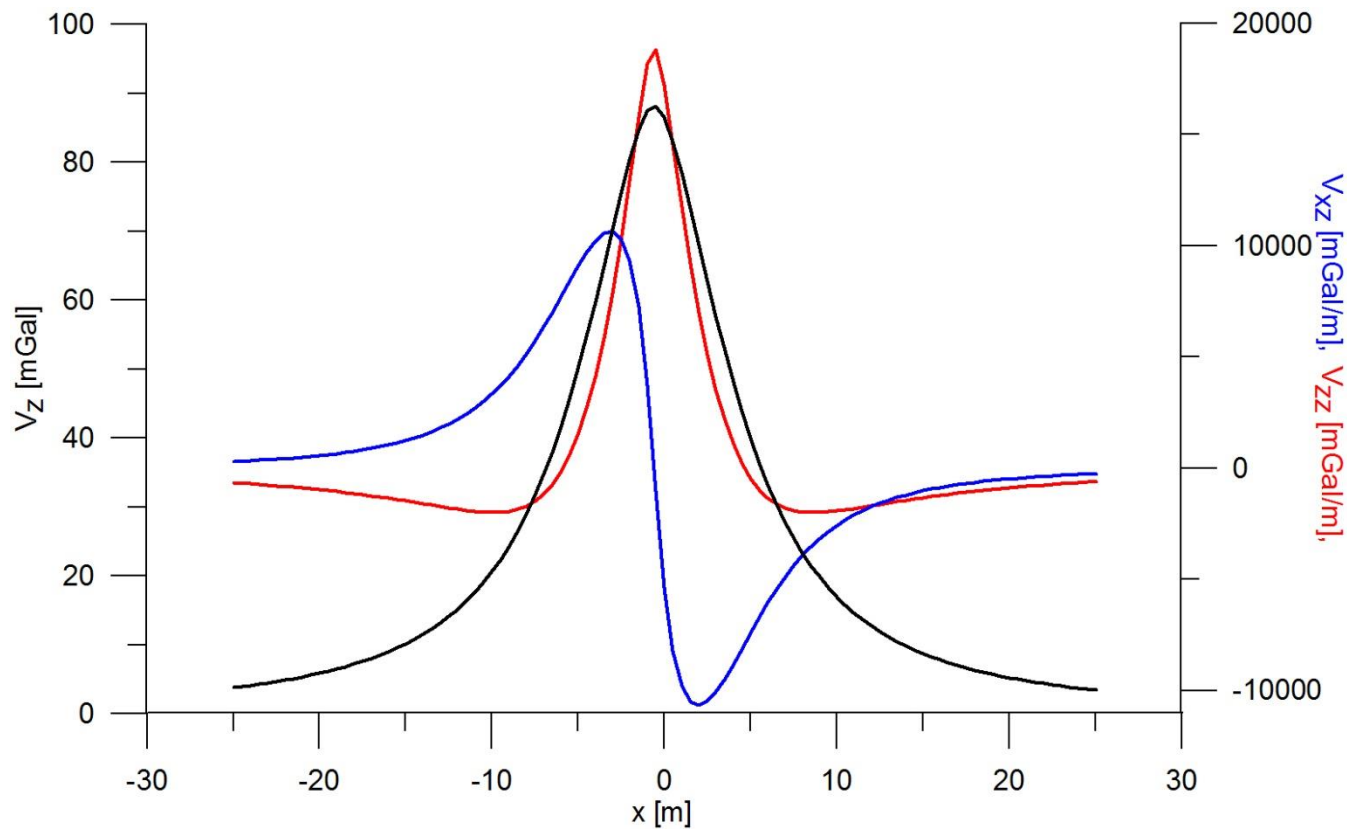
$$V_z = \kappa \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma(\xi, \eta, \zeta)(\zeta - z)}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{3/2}} d\xi d\eta d\zeta$$

(postup riešenia integrálu pre η je načrtnutý v skriptách na str. 72 a 73)

$$V_z^{(2D)} = 2\kappa \int_{\xi} \int_{\zeta} \frac{\sigma(\xi, \zeta)(\zeta - z)}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2} d\xi d\zeta$$

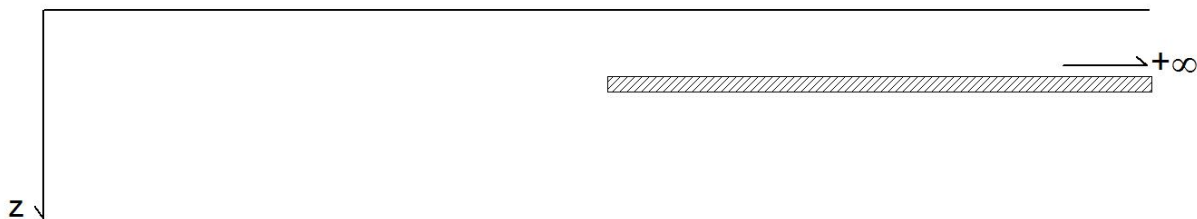
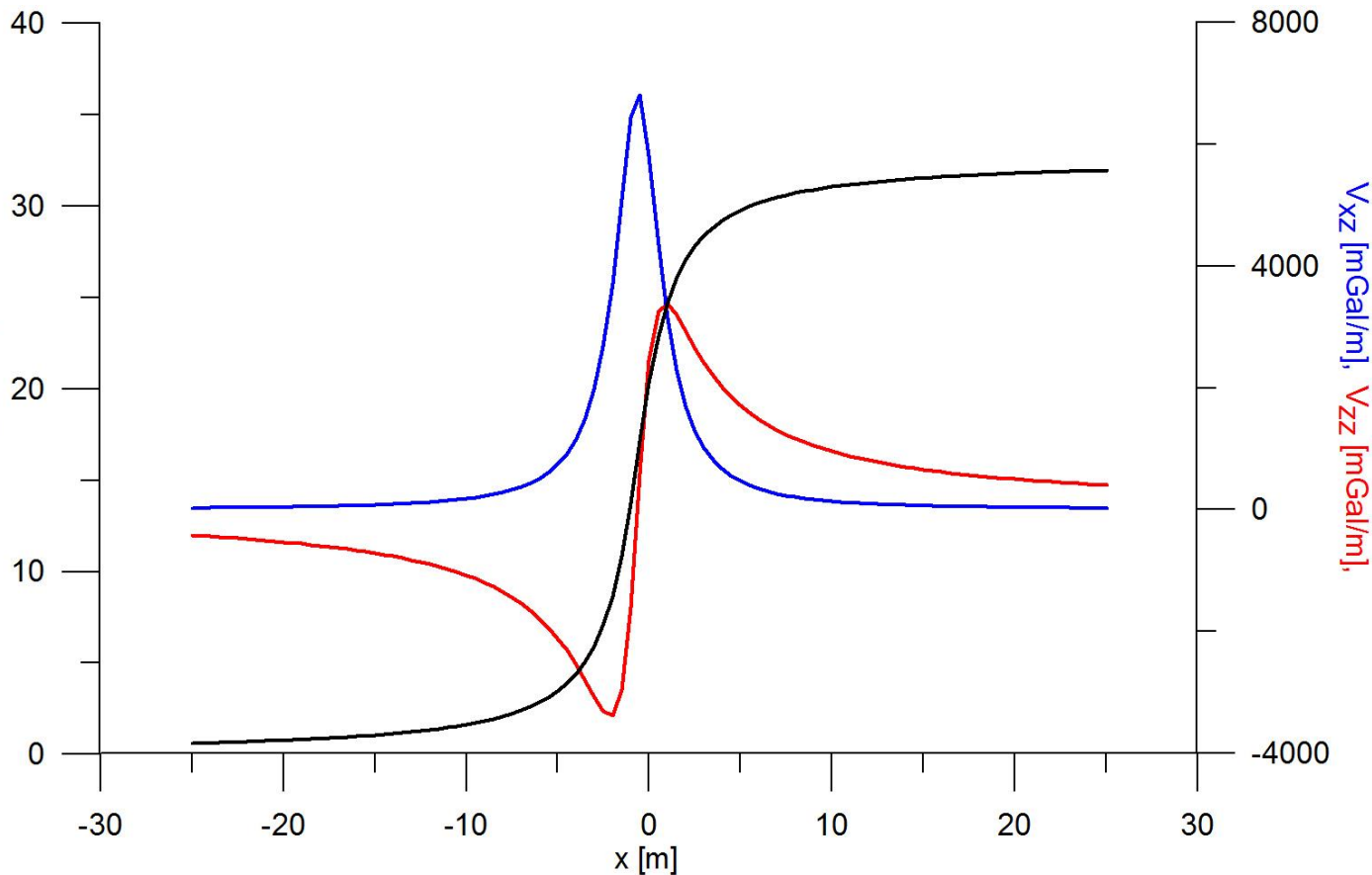
druhý najpoužívanejší vzťah v odvodzaniach vzťahov pre priamu úlohu v gravimetrii (2D prípad)

priama úloha v gravimetrii – typické účinky



priebehy V_z , V_{xz} a V_{zz} pre symetrické 2D teleso

priama úloha v gravimetrii – typické účinky



priebehy V_z , V_{xz} a V_{zz} pre asymetrické 2D teleso

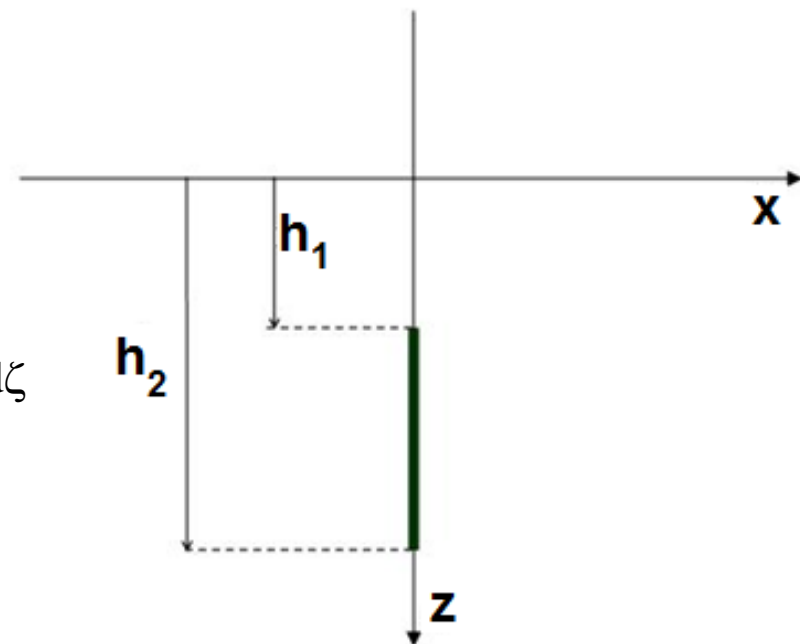
priama úloha v gravimetrii – príklad odvodu V_z pre jednoduché teleso

tenká vertikálna tyč (1/2)

Vychádzame zo všeobecného vzťahu pre V_z pre 3D telesá (slajd č. 8):

$$V_z = \frac{\partial V}{\partial z} = \kappa \iiint \frac{\sigma(\xi, \eta, \zeta)(\zeta - z)}{\left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} d\xi d\eta d\zeta$$

s tým, že uvažujeme konštantnú hustotu (vyjde pre integrál) a položíme $y = 0$ a $z = 0$ (zaujíma nás účinok na profile pozdĺž osi x) a $\xi = 0$ a $\eta = 0$ (tyč je presne pod počiatkom systému). Potom máme:



$$V_z(x, 0, 0) = \kappa \sigma \int_{\xi} \int_{\eta} \int_{\zeta} \frac{\zeta}{\left[x^2 + \zeta^2 \right]^{\frac{3}{2}}} d\xi d\eta d\zeta = \kappa \underbrace{\int_{\xi} \int_{\eta} d\xi d\eta}_{\lambda} \int_{\zeta} \frac{\zeta}{\left[x^2 + \zeta^2 \right]^{\frac{3}{2}}} d\zeta = \kappa \lambda \int_{\zeta} \frac{\zeta}{\left[x^2 + \zeta^2 \right]^{\frac{3}{2}}} d\zeta$$

kde sme využili koncept tzv. dĺžkovej hustoty (λ), čo je vlastne hmotnosť jednotkovej dĺžky tyče (môžeme si to dovoliť, nakoľko teleso je tenké a jeho prierez v smere x a y je veľmi malý – integrovanie v týchto smeroch je malé)

priama úloha v gravimetrii – príklad odvodenia V_z pre jednoduché teleso

tenká vertikálna tyč (2/2)

Pokračujeme riešením integrálu z predošlého slajdu (použitím substitúcie – zavedením premennej t):

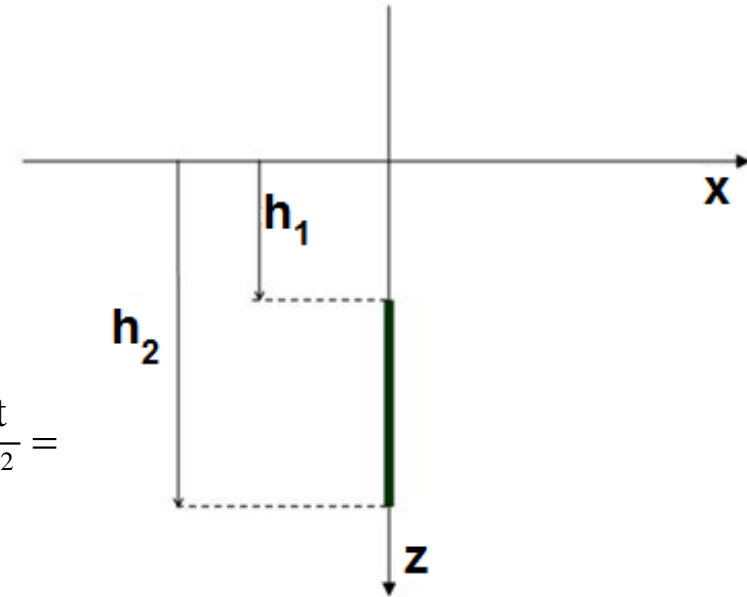
$$V_z(x, 0, 0) = \kappa\lambda \int_{h_1}^{h_2} \frac{\zeta}{[x^2 + \zeta^2]^{\frac{3}{2}}} d\zeta \left[\begin{array}{l} t = x^2 + \zeta^2 \\ dt = 2\zeta d\zeta \end{array} \right] = \kappa\lambda \frac{1}{2} \int_{x^2+h_1^2}^{x^2+h_2^2} \frac{dt}{t^{3/2}} =$$

$$= \kappa\lambda \frac{1}{2} \left[-2t^{-\frac{1}{2}} \right]_{x^2+h_1^2}^{x^2+h_2^2} = -\kappa\lambda \left[\frac{1}{\sqrt{t}} \right]_{x^2+h_1^2}^{x^2+h_2^2} = \kappa\lambda \left[\frac{1}{\sqrt{x^2+h_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+h_2^2}} \right]$$

výsledok

Pre hĺbkovo neobmedzenú tyč ($h_1 = h$, $h_2 = \infty$) platí:

$$V_z(x, 0, 0) = \kappa\lambda \left[\frac{1}{\sqrt{x^2+h^2}} \right]$$

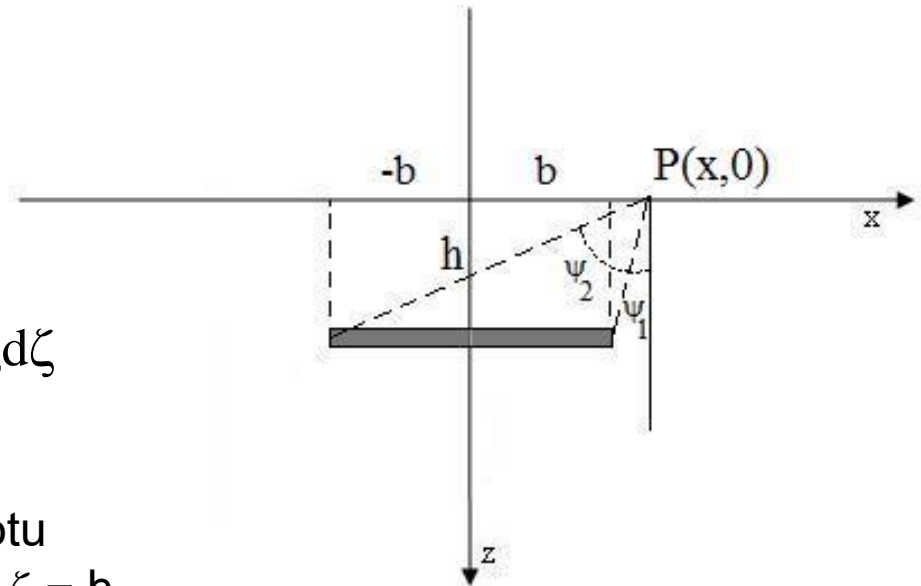


priama úloha v gravimetrii – príklad odvodu V_z pre jednoduché teleso

horizontálny pás (1/3)

Vychádzame zo všeobecného vzťahu pre V_z pre 2D telesá (slajd č. 11):

$$V_z^{(2D)} = 2\kappa \int_{\xi} \int_{\zeta} \frac{\sigma(\xi, \zeta)(\zeta - z)}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2} d\xi d\zeta$$



s tým, že uvažujeme konštantnú hustotu (vyjde pre integrál) a položíme $z = 0$ a $\zeta = h$ (zaujíma nás účinok na povrchu pozdĺž osi x).

Potom máme:

$$V_z = 2\kappa\sigma \int_{\xi} \int_{\zeta} \left[\frac{h}{(\xi - x)^2 + h^2} \right] d\xi d\zeta = 2\kappa h \underbrace{\sigma}_{\mu} \int_{\xi} d\zeta \int_{\xi} \left[\frac{d\xi}{(\xi - x)^2 + h^2} \right] = 2\kappa h \mu \int_{-b}^{+b} \left[\frac{d\xi}{(\xi - x)^2 + h^2} \right]$$

kde sme využili koncept tzv. plošnej hustoty (μ), čo je vlastne hmotnosť jednotkovej plochy pásu (môžeme si to dovoliť, nakoľko teleso je tenké a jeho rozmer v smere z veľmi malý – integrovanie v tomto smere je veľmi malé)

priama úloha v gravimetrii – príklad odvodenia V_z pre jednoduché teleso

horizontálny pás (2/3)

Pokračujeme riešením integrálu z predošlého slajdu (použitím substitúcie – zavedením premennej t):

$$\begin{aligned} V_z(x,0) &= 2\kappa\mu h \int_{-b}^{+b} \frac{\frac{d\xi}{h^2}}{\left[\frac{(\xi-x)^2}{h^2} + \frac{h^2}{h^2}\right]} = 2\kappa\mu \frac{h}{h^2} \int_{-b}^{+b} \frac{d\xi}{\left[\left(\frac{\xi-x}{h}\right)^2 + 1\right]} \left[\begin{array}{l} t = (\xi-x)/h \\ dt = d\xi/h \\ d\xi = hdt \end{array} \right] = \\ &= 2\kappa\mu \frac{1}{h} \int_{\frac{-b-x}{h}}^{\frac{b-x}{h}} \frac{hdt}{[t^2 + 1]} = 2\kappa\mu \left[\text{artctg}(t) \right]_{\frac{-b-x}{h}}^{\frac{b-x}{h}} = 2\kappa\mu \left[\text{artctg}\left(\frac{b-x}{h}\right) - \text{artctg}\left(\frac{-b-x}{h}\right) \right] = \end{aligned}$$

Pri nasledujúcej úprave využijeme nepárnosť funkcie arctg: $\text{arctg}(-t) = -\text{arctg}(t)$

$$= 2\kappa\mu \left[\text{artctg}\left(\frac{x+b}{h}\right) - \text{artctg}\left(\frac{x-b}{h}\right) \right] = 2\kappa\mu(\psi_2 - \psi_1) = 2\kappa\mu\theta \quad \text{výsledok}$$

Prechod k uhľom ψ_1 a ψ_2 je zrejmý z geometrie na obrázku (predchádzajúci slajd).

priama úloha v gravimetrii – príklad odvodu V_z pre jednoduché teleso

horizontálny pás (3/3)

Zo získaného výsledku je zrejmé, že gravitačné zrýchlenie spôsobené prítomnosťou horizontálneho pásu je úmerné uhlu, pod ktorým „vidíme“ pás z bodu $P(x,0)$:

$$V_z(x,0) = 2\kappa\mu\theta$$

Uvedená skutočnosť sa dá využiť pri odvodení vzťahov pre:

polonekonečnú dosku (tzv. sill) so začiatkom presne pod bodom $x = 0$:

$$\dots = 2\kappa\mu \left[\text{artctg}\left(\frac{+b-x}{h}\right) \right]_{-\frac{b-x}{h}}^{\infty} = 2\kappa\mu \left[\text{artctg}\left(\frac{t}{h}\right) \right]_{-\frac{b-x}{h}}^{\infty} = 2\kappa\mu \left[\frac{\pi}{2} - \text{artctg}\left(\frac{-x}{h}\right) \right] = 2\kappa\mu \left[\frac{\pi}{2} + \text{artctg}\left(\frac{x}{h}\right) \right]$$

a nekonečnú (tzv. Bouguerovu) dosku:

$$\dots = 2\kappa\mu \left[\text{artctg}\left(\frac{t}{h}\right) \right]_{-\infty}^{\infty} = 2\kappa\mu \left[\text{artctg}\left(\frac{t}{h}\right) \right]_{-\infty}^{\infty} = 2\kappa\mu \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right] = 2\kappa\pi\mu = 2\kappa\pi\sigma\Delta h = ?$$

kde Δh je vertikálny rozmer dosky.

priama úloha v gravimetrii – príklad odvodu V_z pre jednoduché teleso

horizontálny pás (3/3)

Zo získaného výsledku je zrejmé, že gravitačné zrýchlenie spôsobené prítomnosťou horizontálneho pásu je úmerné uhlu, pod ktorým „vidíme“ pás z bodu $P(x,0)$:

$$V_z(x,0) = 2\kappa\mu\theta$$

Uvedená skutočnosť sa dá využiť pri odvodení vzťahov pre:

polonekonečnú dosku (tzv. sill) so začiatkom presne pod bodom $x = 0$:

$$\dots = 2\kappa\mu \left[\text{artctg}\left(\frac{+b-x}{h}\right) \right]_{-\frac{b-x}{h}}^{\infty} = 2\kappa\mu \left[\text{artctg}\left(\frac{t}{h}\right) \right]_{-\frac{x}{h}}^{\infty} = 2\kappa\mu \left[\frac{\pi}{2} - \text{artctg}\left(\frac{-x}{h}\right) \right] = 2\kappa\mu \left[\frac{\pi}{2} + \text{artctg}\left(\frac{x}{h}\right) \right]$$

a nekonečnú (Bouguerovu) dosku:

$$\dots = 2\kappa\mu \left[\text{artctg}\left(\frac{t}{h}\right) \right]_{-\infty}^{\infty} = 2\kappa\mu \left[\text{artctg}\left(\frac{t}{h}\right) \right]_{-\infty}^{\infty} = 2\kappa\mu \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right] = 2\kappa\pi\sigma\Delta h = \boxed{0.0419\sigma\Delta h}$$

kde Δh je vertikálny rozmer dosky.

(Pozor! Vzťah s konštantou 0.0419 platí len vtedy, keď je hustota σ dosadzovaná v jednotkách $[g\cdot cm^{-3}]$ a výsledok je potom v jednotkách $[mGal]$).

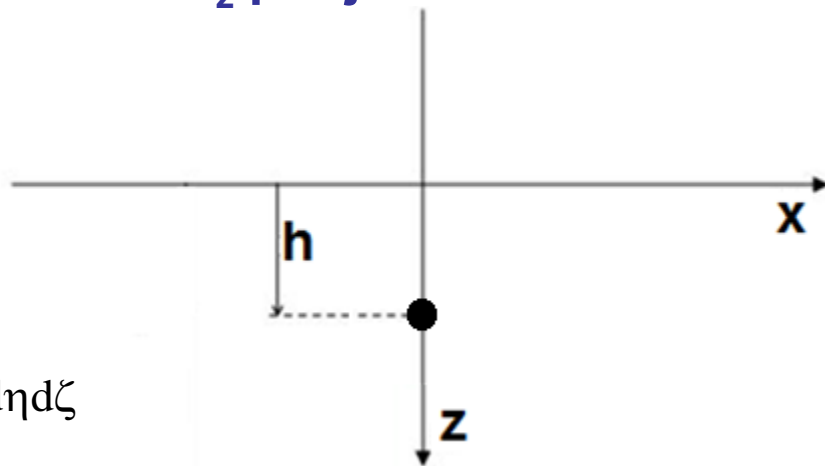


priama úloha v gravimetrii – príklad odvodu V_z pre jednoduché teleso

horizontálna tyč (1/2)

Vychádzame zo všeobecného vzťahu pre V_z pre 3D telesá (slajd č. 8):

$$V_z = \frac{\partial V}{\partial z} = \kappa \iiint \frac{\sigma(\xi, \eta, \zeta)(\zeta - z)}{\left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} d\xi d\eta d\zeta$$



s tým, že uvažujeme konštantnú hustotu (vyjde pre integrál) a položíme $z = 0$ a $y = 0$, $\xi = 0$, $\zeta = h$ a valec je roziahnutý v smere osi y na každú stranu o dĺžku A . Zaujímá nás účinok na povrchu pozdĺž osi x .

Potom máme:

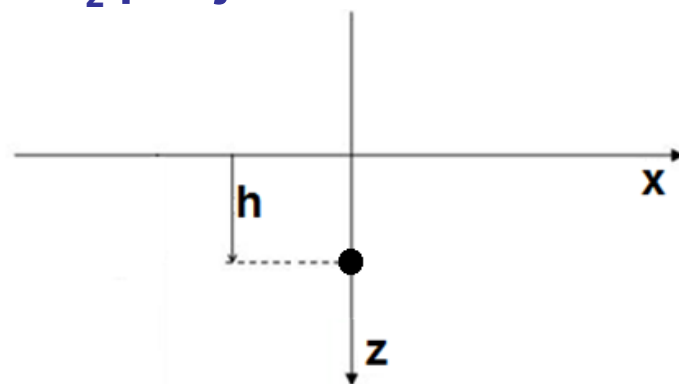
$$V_z(x, 0, 0) = \kappa \sigma \int_{\xi} \int_{\eta} \int_{\zeta} \frac{h}{\left[x^2 + \eta^2 + h^2 \right]^{\frac{3}{2}}} d\xi d\eta d\zeta = \kappa \sigma \underbrace{\int_{\xi} \int_{\zeta} d\xi d\zeta}_{\lambda} \int_{\eta} \frac{h}{\left[x^2 + \eta^2 + h^2 \right]^{\frac{3}{2}}} d\eta$$

kde sme opäť využili koncept tzv. dĺžkovej hustoty (λ) - môžeme si to dovoliť, nakoľko teleso je tenké a jeho prierez v smere x a z je veľmi malý – integrovanie v týchto smeroch je malé)

priama úloha v gravimetrii – príklad odvodenia V_z pre jednoduché teleso

horizontálna tyč (2/2)

$$V_z(x,0,0) = \kappa\lambda h \int_{-A}^{+A} \frac{d\eta}{[x^2 + \eta^2 + h^2]^{3/2}} =$$



Uvedený integrál je možné riešiť pomocou nasledujúceho tabuľkového integrálu: $\int \frac{dt}{\sqrt{a^2 + t^2}^3} = \frac{t}{a^2 \sqrt{a^2 + t^2}}$, kde $a^2 = x^2 + h^2$, $t = \eta$

$$V_z(x,0,0) = \kappa\lambda h \left[\frac{\eta}{(x^2 + h^2) \sqrt{x^2 + \eta^2 + h^2}} \right]_{-A}^{+A} = 2\kappa\lambda h \frac{A}{(x^2 + h^2) \sqrt{x^2 + A^2 + h^2}}$$

priebežný výsledok

V prípade 2D horizontálnej tyče ($A \rightarrow \infty$) treba riešiť limitu:

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{A}{\sqrt{x^2 + A^2 + h^2}} = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{\frac{A}{A}}{\sqrt{\frac{x^2}{A^2} + \frac{A^2}{A^2} + \frac{h^2}{A^2}}} = 1$$

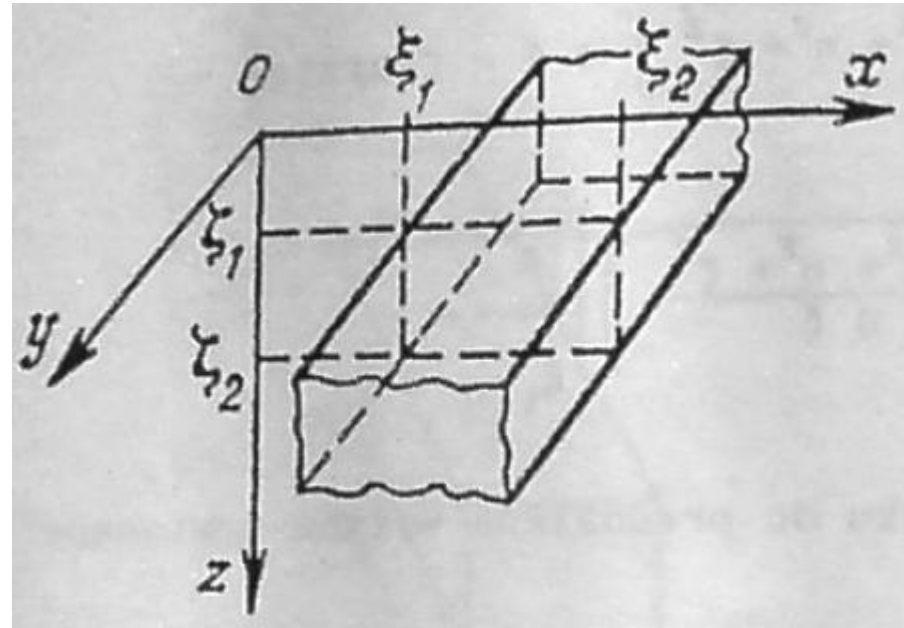
Potom: $V_z^{(2D)}(x,0,0) = 2\kappa\lambda \frac{h}{x^2 + h^2}$ **výsledok**

priama úloha v gravimetrii – príklad odvodenia V_z pre jednoduché teleso

2D pravouhlý hranol (2D prism) (1/3)

Vychádzame zo všeobecného vzťahu pre V_z pre 2D telesá (slajd č. 11):

$$V_z^{(2D)} = 2\kappa \int_{\xi} \int_{\zeta} \frac{\sigma(\xi, \zeta)(\zeta - z)}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2} d\xi d\zeta$$

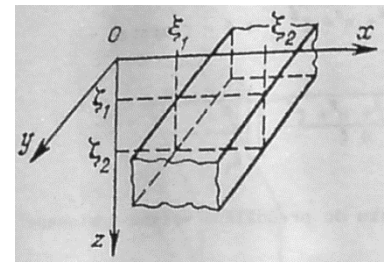


Kvôli výraznému zjednodušeniu budeme počítať účinok V_z v počiatku súradnicovej sústavy pre bod $P(0,0)$, t.j. položíme $x = 0$ a $z = 0$. Hustotu $\sigma()$ opäť pokladáme za konštantnú (prejde dopredu pred integrál). Potom máme:

$$V_z(0,0) = \kappa\sigma \int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{2\zeta}{\xi^2 + \zeta^2} d\xi d\zeta = \kappa\sigma \int_{\xi_1}^{\xi_2} \ln(\xi^2 + \zeta^2) d\xi \Big|_{\zeta_1}^{\zeta_2} =$$

Prvý krok integrovania sme uskutočnili veľmi jednoducho – s využitím derivácie funkcie $\ln(\xi^2 + \zeta^2)$ podľa ζ . Ďalej integrujeme pomocou metódy per-partes, pričom položíme: $v = \xi$, $u = \ln(\xi^2 + \zeta^2)$. Pokračovanie je na ďalšom snímku:

priama úloha v gravimetrii – príklad odvodenia V_z



2D pravouhlý hranol (2D prism) (2/3)

$$V_z(0,0) = \kappa\sigma \int_{\xi_1}^{\xi_2} \ln(\xi^2 + \zeta^2) d\xi \left[\begin{array}{l} v = \xi \\ u = \ln(\xi^2 + \zeta^2) \end{array} \right]_{\zeta_1}^{\zeta_2} \left[\begin{array}{l} v' = d\xi \\ u' = 2\xi/(\xi^2 + \zeta^2) \end{array} \right] =$$

V riešenom integráli máme súčin funkcií $u \cdot v'$, ďalej podľa per-partes máme:

$$= \kappa\sigma \left[\xi \ln(\xi^2 + \zeta^2) - \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{2\xi^2}{\xi^2 + \zeta^2} d\xi \right]_{\zeta_1}^{\zeta_2} = \kappa\sigma \left[\xi \ln(\xi^2 + \zeta^2) - 2 \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\xi^2 + \zeta^2 - \zeta^2}{\xi^2 + \zeta^2} d\xi \right]_{\zeta_1}^{\zeta_2} =$$

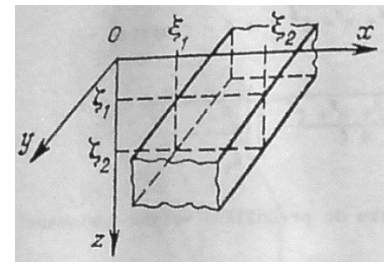
$$= \kappa\sigma \left[\xi \ln(\xi^2 + \zeta^2) - 2 \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\xi^2 + \zeta^2}{\xi^2 + \zeta^2} d\xi + 2 \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\zeta^2}{\xi^2 + \zeta^2} d\xi \right]_{\zeta_1}^{\zeta_2} =$$

$$= \kappa\sigma \left[\xi \ln(\xi^2 + \zeta^2) - 2 \int_{\xi_1}^{\xi_2} d\xi + 2 \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\zeta^2/\zeta^2}{\xi^2/\zeta^2 + \zeta^2/\zeta^2} d\xi \right]_{\zeta_1}^{\zeta_2} =$$

$$= \kappa\sigma \left[\xi \ln(\xi^2 + \zeta^2) - 2\xi \Big|_{\xi_1}^{\xi_2} + 2 \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{1}{\left(\frac{\xi}{\zeta}\right)^2 + 1} d\xi \right]_{\zeta_1}^{\zeta_2} = \kappa\sigma \left[\xi \ln(\xi^2 + \zeta^2) - 2\xi \Big|_{\xi_1}^{\xi_2} + 2\zeta \operatorname{arctg}\left(\frac{\xi}{\zeta}\right) \right]_{\zeta_1}^{\zeta_2} \Big|_{\xi_1}^{\xi_2}$$

bola tu použitá substitúcia $t = \xi/\zeta$

priama úloha v gravimetrii – príklad odvodu V_z



2D pravouhlý hranol (2D prism) (3/3)

$$V_z(0,0) = \kappa\sigma \left[\xi \ln(\xi^2 + \zeta^2) - 2\xi \frac{\xi}{\xi_1} + 2\zeta \operatorname{arctg}\left(\frac{\xi}{\zeta}\right) \right] \Bigg|_{\zeta_1}^{\zeta_2} \Bigg|_{\xi_1}^{\xi_2}$$

Po dosadení všetkých hraníc vypadne z riešenia člen 2ξ (nakoľko v sebe neobsahuje súradnicu ζ). Získavame tak výsledný vzťah pre výpočtový bod $P(0,0)$:

$$V_z(0,0) = \kappa\sigma \left[\xi \ln(\xi^2 + \zeta^2) + 2\zeta \operatorname{arctg}\left(\frac{\xi}{\zeta}\right) \right] \Bigg|_{\zeta_1}^{\zeta_2} \Bigg|_{\xi_1}^{\xi_2}$$

**výsledok
(v hutnom tvare)**

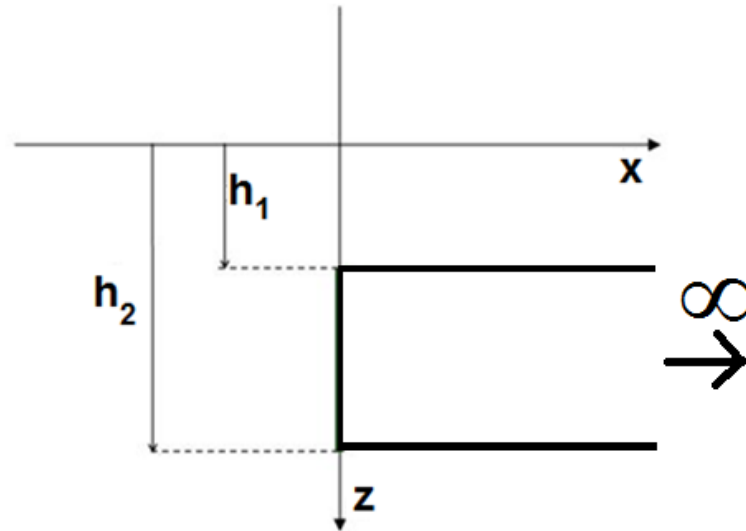
Aby sme výsledok zovšeobecnil pre výpočtový bod $P(x,0)$, musíme všade namiesto člena ξ dosadiť $(\xi - x)$. Po dosadení integračných hraníc získavame výsledný vzťah:

$$V_z(x,0) = \kappa\sigma \left[(\xi_1 - x) \ln \frac{(\xi_1 - x)^2 + \zeta_1^2}{(\xi_1 - x)^2 + \zeta_2^2} - (\xi_2 - x) \ln \frac{(\xi_2 - x)^2 + \zeta_1^2}{(\xi_2 - x)^2 + \zeta_2^2} + \right. \\ \left. + 2\zeta_2 \left(\operatorname{arctg} \frac{\xi_2 - x}{\zeta_2} - \operatorname{arctg} \frac{\xi_1 - x}{\zeta_2} \right) + 2\zeta_1 \left(\operatorname{arctg} \frac{\xi_1 - x}{\zeta_1} - \operatorname{arctg} \frac{\xi_2 - x}{\zeta_1} \right) \right]$$

výsledok

priama úloha v gravimetrii – príklad odvodenia V_z pre jednoduché teleso

pravouhlý stupeň (step)



Vychádza sa zo vzťahu pre 2D pravouhlý hranol, pričom sa jedna x-ová súradnica berie rovná nule a druhá ide do nekonečna ($\xi_1 = 0$, $\xi_2 = \infty$).

Napokon po niekoľkých úpravách získame nasledujúci vzťah:

$$V_z(x,0) = \kappa\sigma \left[-(\xi - x) \ln \frac{(\xi - x)^2 + h_2^2}{(\xi - x)^2 + h_1^2} \right] + h_2 \left(\pi - 2 \operatorname{arctg} \frac{\xi - x}{h_2} \right) - h_1 \left(\pi - 2 \operatorname{arctg} \frac{\xi - x}{h_1} \right)$$

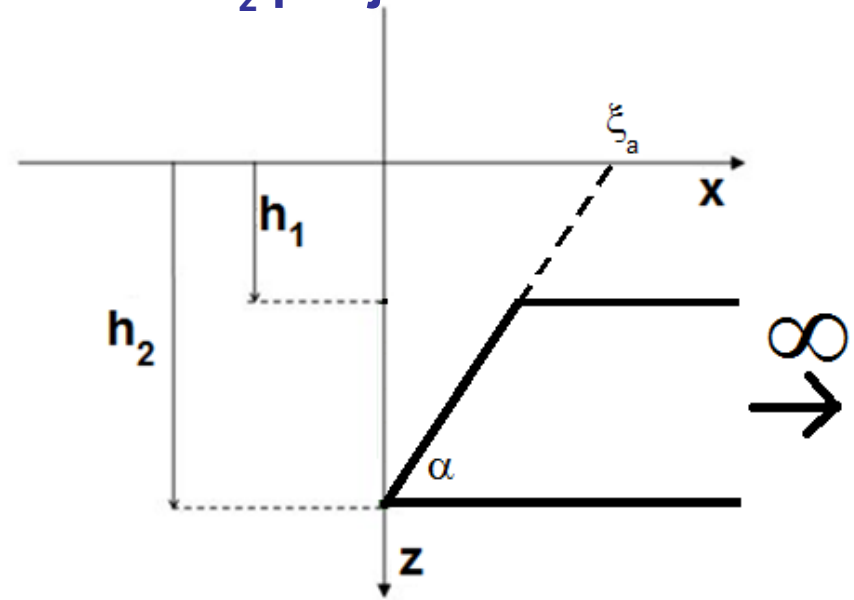
výsledok

priama úloha v gravimetrii – príklad odvodu V_z pre jednoduché teleso

šikmý stupeň (inclined step)

Vychádzame zo všeobecného vzťahu pre V_z pre 2D telesá (slajd č. 11):

$$V_z^{(2D)} = 2\kappa \int_{\xi} \int_{\zeta} \frac{\sigma(\xi, \zeta)(\zeta - z)}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2} d\xi d\zeta$$



Vezmeme polonekonečnú dosku a túto integrujeme tak, aby sme ňou „vyplnili“ objem tohto šikmého stupňa (mení sa jej vzdialenosť od osi z). Dôležitý je tu parameter ξ_a , ktorý je priesečníkom osi x a priamky prebiehajúcej šikmou hranou stupňa.

Po integrácii (napr. skriptá Gravimetria, str. 110) dostaneme nasledujúci vzťah:

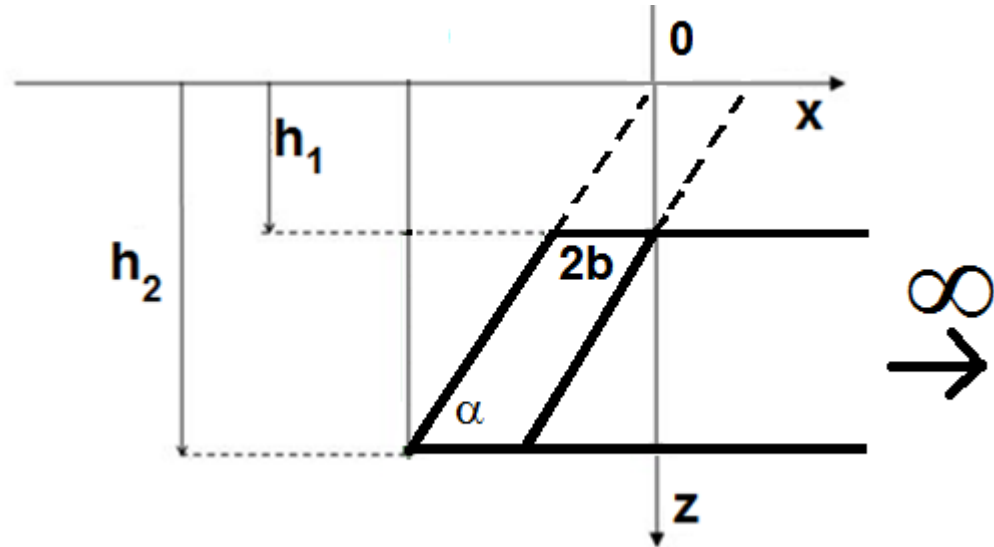
$$V_z(x,0) = 2\kappa\sigma \left[\zeta \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\xi_a - \zeta \cot g\alpha}{\zeta} \right) - \frac{\xi_a \sin^2 \alpha}{2} \ln \left(\zeta^2 - 2\xi_a \zeta \sin \alpha \cos \alpha + \xi_a^2 \sin^2 \alpha \right) - \xi_a \sin \alpha \cos \alpha \operatorname{arctg} \frac{\zeta - \xi_a \cos \alpha \sin \alpha}{\xi_a \sin^2 \alpha} \right] \Bigg|_{h_1}^{h_2}$$

výsledok

priama úloha v gravimetrii – príklad odvodu V_z pre jednoduché teleso

šikmá doska (dike)

Vznikne odčítaním účinkov dvoch šikmých stupňov:



Získame koncový vzťah napr. skriptá Gravimetria, str. 113 :

$$V_z(x,0) = 2\kappa\sigma[h_2\psi_2 - h_1\psi_1 - h_2\psi_{2'} + h_1\psi_{1'} + \sin^2 \alpha \left(x \ln \frac{r_2}{r_1} - (x - 2b) \ln \frac{r_{2'}}{r_{1'}} \right) + \\ + [x(\psi_2 - \psi_1) - (x - 2b)(\psi_{2'} - \psi_{1'})] \sin \alpha \cos \alpha]$$

kde ψ je skráteneý zápis pre typ výrazu $\arctg()$

výsledok

priama úloha v gravimetrii – príklad odvodu V_z pre jednoduché teleso

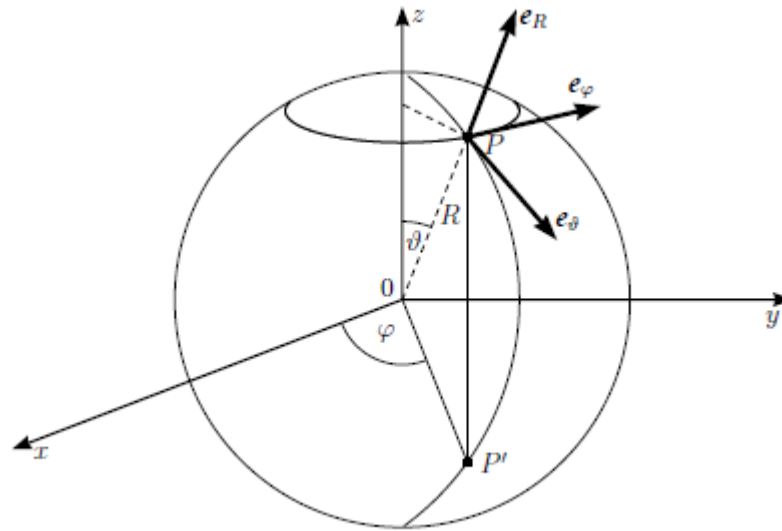
guľa, guľová vrstva (sphere, spherical layer)

1/2

Vychádza sa zo základného vzťahu pre potenciál V pre 3D teleso (snímok č.4):

$$V = \kappa \iiint_{\tau} \frac{\sigma d\tau}{r}$$

Ale vzťah sa vyjadří nie pre kartézske ale sférické súradnice (skriptá, str. 86-87).



Obr. 2.3

Integrácia pozdĺž súradnice φ je jednoduchá (výsledkom je násobenie konštantou), potom sa integruje pozdĺž súradnice ϑ a až na záver pozdĺž R . A práve táto integrácia je zaujímavá, nakoľko tu sa dá rozlíšiť, či sa bod výpočtu nachádza mimo gule alebo v jej vnútri.

priama úloha v gravimetrii – príklad odvodenia V_z pre jednoduché teleso

guľa, guľová vrstva (sphere, spherical layer)

2/2

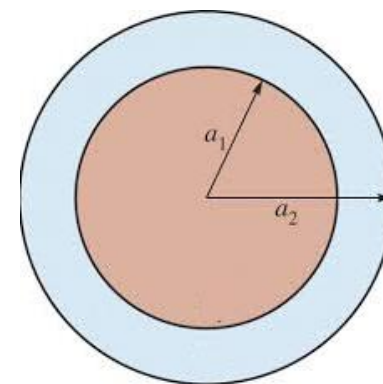
Výsledkom je pre bod mimo gule známy vzťah:

$$V = \kappa \frac{M}{R} = \kappa \frac{4}{3} \pi a^3 \sigma \frac{1}{R}$$

kde M je hmotnosť gule a R je vzdialenosť bodu výpočtu od jej stredu.

Veľmi zaujímavý je výsledok pre bod vo vnútri gule (úplne z neho vypadla radiálna súradnica R !):

$$V = \frac{2}{3} \pi \kappa \sigma (3a_2^2 - a_1^2)$$



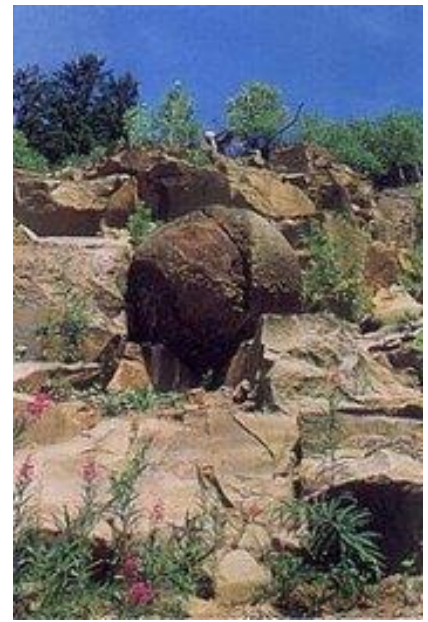
Vzťah pre V_z získame prechodom do kartézskych súradníc a derivovaním podľa z .

$$V_z = \kappa M \frac{\zeta - z}{R^3}$$

bod mimo gule

$$V_z = 0$$

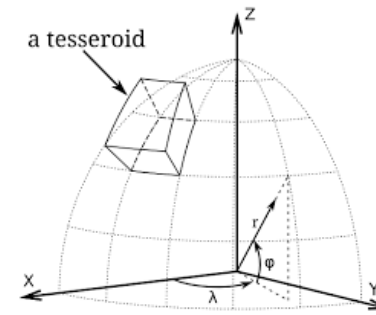
bod vo vnútri gule
(kdekoľvek, nie len v jej strede)



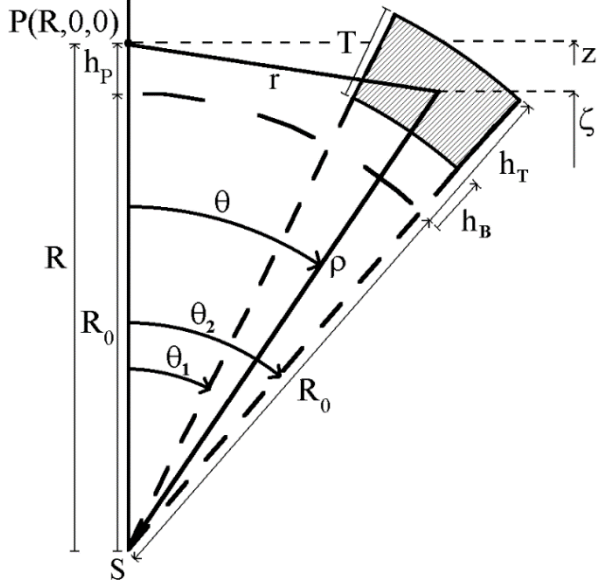
priama úloha v gravimetrii

segment guľovej vrstvy (tesseroid)

Účinok prstenca (vyrezaného z guľovej vrstvy):



$$g_{sp}(R) = 2\pi\gamma\sigma \left\{ \left(\rho^2 / (3R^2) + \rho \cos \theta / (3R) + \cos^2 \theta - 2/3 \right) \sqrt{R^2 - 2R\rho \cos \theta + \rho^2} + \right. \\ \left. + R(\cos^3 \theta - \cos \theta) \ln \left[2 \sqrt{R^2 - 2R\rho \cos \theta + \rho^2} + 2(\rho - R \cos \theta) \right] \right\} \left| \begin{array}{l} \theta_2 \\ \theta_1 \end{array} \right| \begin{array}{l} R_0 + h_T \\ R_0 + h_B \end{array} .$$



kde:

θ – uhol od vert. osi (doplnok zemep. šírky)
(s hranicami θ_1 a θ_2)

ρ – centrálna vzdialenosť časti sfér. vrstvy
(s hranicami od R_0+h_B do R_0+h_T)

R_0 – polomer sférickej Zeme

R – centrálna vzdialenosť výpočt. bodu P
($R = R_0 + h_p$)

h_p – výška bodu P nad sféricickou Zemou

Pozor: Vzorec sa dá analyticky odvodiť len pre body P(R,0,0) – na vert. osi z.

Pozn.: Presné odvodenie v článku Mikuška et al., 2006 (Geophysics).

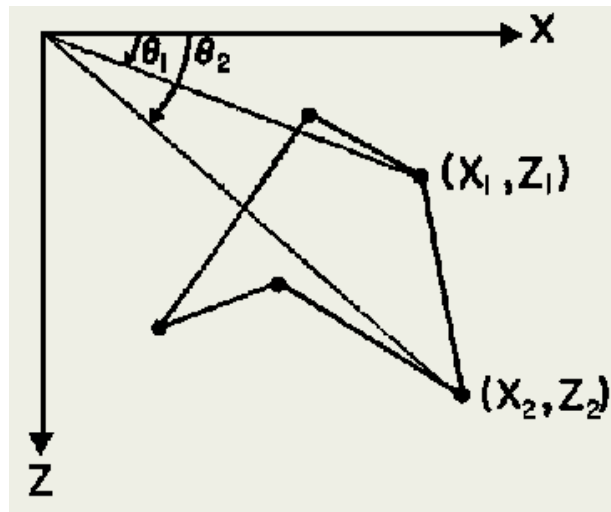
priama úloha v gravimetrii – príklad odvodenia V_z pre jednoduché teleso

asi najdôležitejší vzťah – tzv. 2D polygonálny hranol, presnejšie presnejšie: 2D horizontálny hranol s polygon. prierezom (polyg. prism), slangovo – „Talwaniho vzťah“

Odvodili Talwani et al. (1959) a neskôr upravili Talwani and Ewing (1960). Vychádzali z konceptu komplexného potenciálu a fundamentálne teleso bol hranol s trojuholníkovým prierezom.

Dôležité sú súradnice rohov (x_i, z_i) polygonálneho prierezu.

Výsledný vzťah (napr. skriptá Gravimetria, str. 124):



$$V_z(0,0) = 2\kappa\sigma \sum_{i=1}^N \frac{x_i z_{i+1} - z_i x_{i+1}}{(x_{i+1} - x_i)^2 + (z_{i+1} - z_i)^2} \left[(x_{i+1} - x_i) \left(\arctg \frac{x_{i+1}}{z_{i+1}} - \arctg \frac{x_i}{z_i} \right) + (z_{i+1} - z_i) \ln \sqrt{\frac{x_{i+1}^2 + z_{i+1}^2}{x_i^2 + z_i^2}} \right]$$

priama úloha v gravimetrii – príklad odvodu V_z pre jednoduché teleso

asi najdôležitejší vzťah – tzv. 2D polygonálny hranol, presnejšie presnejšie: 2D horizontálny hranol s polygon. prierezom (polyg. prism), slangovo – „Talwaniho vzťah“

Výsledný vzťah (web-stránka, UNI-Kiel Nemecko):

$$g_z = 2fp \sum_{i=1}^n Z_i$$

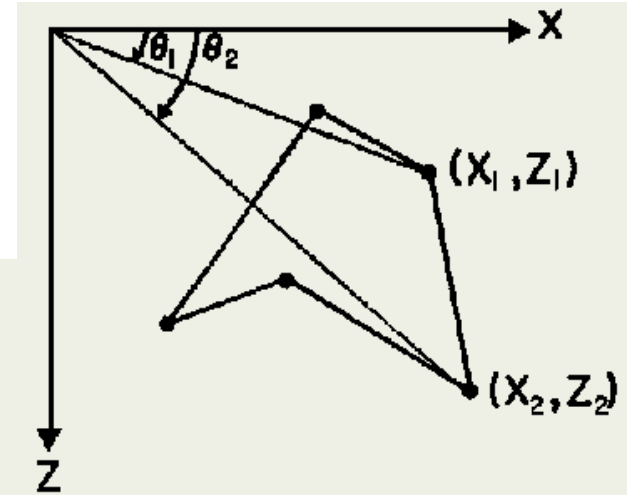
with:

$$Z_i = A[(\theta_i - \theta_{i+1}) + B \ln \frac{r_{i+1}}{r_i}]$$

where:

$$A = \frac{(x_{i+1} - x_i)(x_i z_{i+1} - x_{i+1} z_i)}{(x_{i+1} - x_i)^2 + (z_{i+1} - z_i)^2} \quad \text{and} \quad B = \frac{z_{i+1} - z_i}{x_{i+1} - x_i}$$

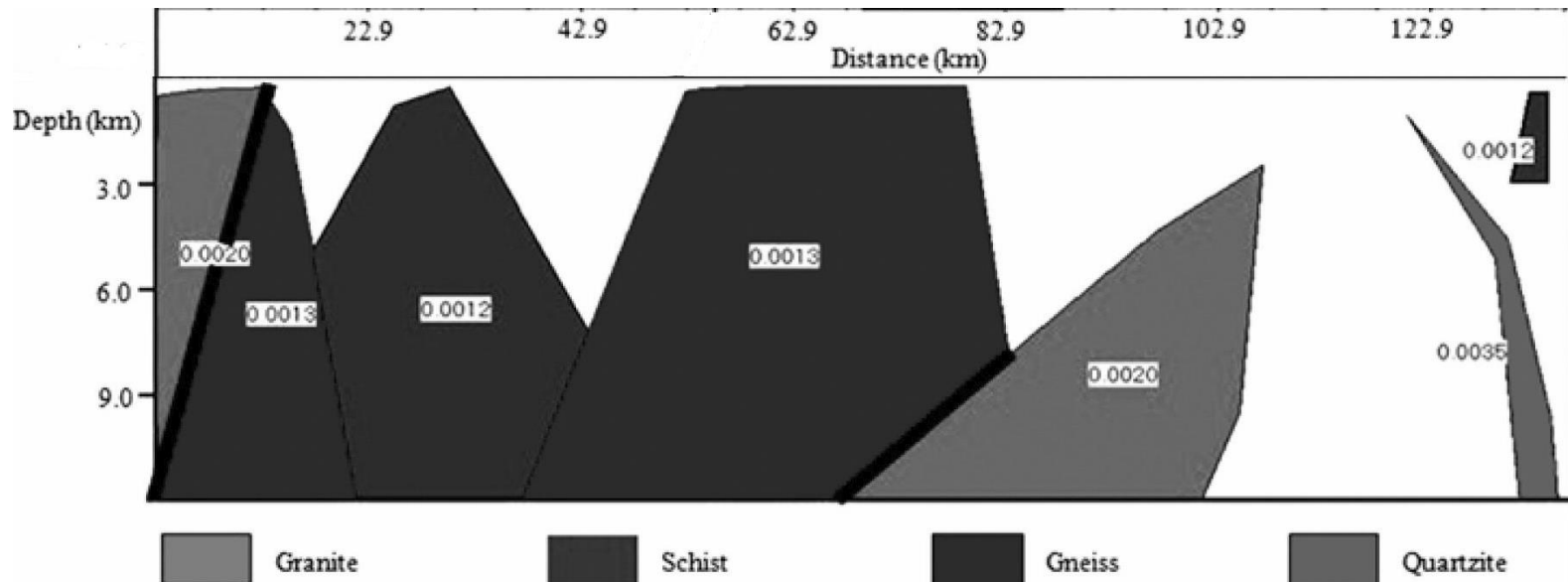
$$r_i^2 = x_i^2 + z_i^2; \quad r_{i+1}^2 = x_{i+1}^2 + z_{i+1}^2; \quad \theta_i = \arctan \frac{z_i}{x_i}; \quad \theta_{i+1} = \arctan \frac{z_{i+1}}{x_{i+1}}$$



priama úloha v gravimetrii – príklad odvodenia V_z pre jednoduché teleso

asi najdôležitejší vzťah – tzv. 2D polygonálny hranol, presnejšie presnejšie: 2D horizontálny hranol s polygon. prierezom (polyg. prism), slangovo – „Talwaniho vzťah“

Obrovskou výhodou tohto vzorca (telesa) je jeho aplikovateľnosť na popis rôznych geologických štruktúr a iných anomálnych objektov (aj antropogénnych). Je významne používaný pri modelovaní v gravimetrii (bude preberané neskôr).



priama úloha v gravimetrii – príklad odvodenia V_z pre jednoduché teleso

najmodernejší vzťah – tzv. 3D polyedrálny hranol (mnohosten, polyheder)

Odvodili viacerí autori od 1970ich do 1990ich rokov 20. storočia – napr. Götze a Lahmayer (1988, Geophysics), Pohánka (1988, Geoph. Prospecting) (prvé vydokladovanie publikovania tohto vzťahu: Sludsky (1863) a Mehler (1866)).

Polyéder (mnohosten) je 3D teleso ohraničené rovinnými mnohouholníkmi.

Existuje presne **päť pravidelných konvexných polyédrov** (mnohostenov). (sú známe už z dôb antiky a súhrnne sa nazývajú Platónske telesá).

pravidelný štvorsten – steny sú tvorené rovnostrannými trojuholníkmi

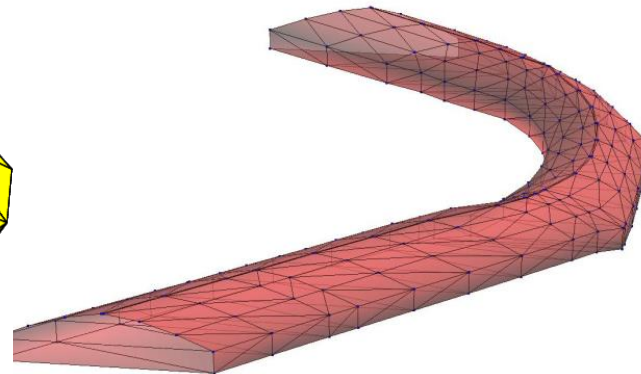
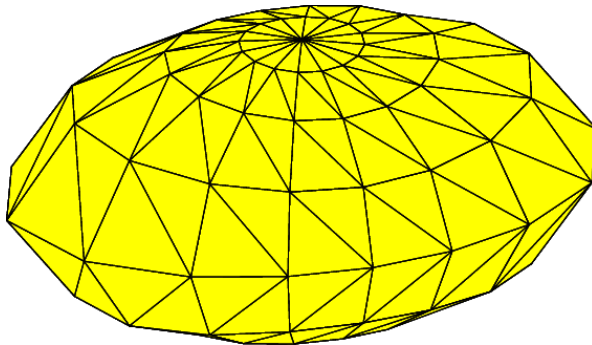
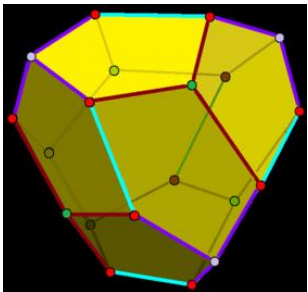
pravidelný šesťsten (kocka) – steny sú tvorené štvorcami

pravidelný osemsten – steny sú tvorené rovnostrannými trojuholníkmi

pravidelný dvanásťsten – steny sú tvorené pravidelnými päťuholníkmi

pravidelný dvadsaťsten – steny sú tvorené rovnostrannými trojuholníkmi

V gravimetrii však využívame tzv. **nepravidelné polyédre**.



priama úloha v gravimetrii – príklad odvodu V_z pre jednoduché teleso

a najmodernejší vzťah – tzv. 3D polyhedrálny hranol (polyhéder)

Odvodili viacerí autori od 1970ich do 1990ich rokov 20. storočia – napr. Götze a Lahmayer (1988, Geophysics), Pohánka (1988, Geoph. Prospecting) (prvé vydokladovanie publikovania tohto vzťahu: Sludsky (1863) a Mehler (1866)).

Odvodenie je založené na využití Gauss-Ostrogradského vety – najprv pri prechode od objemového integrálu na plošný a neskôr pri prechode od plošného na krivkový (pozdĺž obvodov jednotlivých strán).

Výsledný vzťah (napr. skriptá Gravimetria, str. 128 alebo dizert. práca Pánisovej, 2013):

$$g_z(P) = \kappa \sigma \sum_{k=1}^K \cos(\mathbf{n}_k, \mathbf{z}) \sum_{i=1}^3 \left[w_{k,i} \ln \frac{v_{k,i} + \sqrt{v_{k,i}^2 + w_{k,i}^2 + z_k^2}}{u_{k,i} + \sqrt{u_{k,i}^2 + w_{k,i}^2 + z_k^2}} + \frac{|z_k|}{|w_{k,i}|} \left(\arctan \frac{v_{k,i} |z_k|}{|w_{k,i}| \sqrt{v_{k,i}^2 + w_{k,i}^2 + z_k^2}} - \arctan \frac{u_{k,i} |z_k|}{|w_{k,i}| \sqrt{u_{k,i}^2 + w_{k,i}^2 + z_k^2}} \right) + 2\pi |z_k| \delta \right],$$

Pomocou polyédrov je možné modelovať komplexné 3D geologické štruktúry. Hlavným problémom je ich vizualizácia (viac d'alej v časti modelovanie).

priama úloha v gravimetrii – príklad odvodu V_z pre jednoduché teleso

a najmodernejší vzťah – tzv. 3D polyhedrálny hranol (polyhéder)

General 3D polyhedra			
Density contrast	Singularity-free	Components	References
Constant	–	g^z	Paul (1974)
Constant	–	g^z, ϕ	Barnett (1976)
Constant	–	$\nabla\phi, \nabla\nabla\phi$	Okabe (1979)
Constant	✓	ϕ	Waldvogel (1979)
Constant	✓	$\nabla\phi$	Pohanka (1988) Götze and Lahmayer (1988)
Constant	✓	$\nabla\nabla\phi$	Kwok (1991)
Constant	✓	$\nabla\phi$	Holstein and Ketteridge (1996)
Constant	✓	$\phi, \nabla\phi, \nabla\nabla\phi$	D'Urso (2013, 2014a)
Constant	✓	$\nabla\phi$	Conway (2015)
Linear	✓	$\nabla\phi$	Hansen (1999)
Linear	✓	$\phi, \nabla\phi, \nabla\nabla\phi$	Holstein (2003)
Linear	✓	ϕ	Hamayun and Tenzer (2009)
Linear	✓	$\phi, \nabla\phi, \nabla\nabla\phi$	D'Urso (2014b)
Constant	✓	$\phi, \nabla\phi$	Our approach
Linear	✓	$\phi, \nabla\phi$	Our approach
Quadratic	✓	ϕ	Our approach

Symbols ✓ and – indicate the availability and non-availability of a singularity-free analytic formula. Symbol ϕ denotes the gravitational potential, $\nabla\phi$ denotes the gravitational field and $\nabla\nabla\phi$ denotes the gravity gradient tensor (e.g., Beiki and Pedersen 2010; Abtahi et al. 2016)

Fotka z diskusie Nemeckej geofyzikálnej konferencie (2009):

Prof. Götze

prof. Talwani

