

modelovanie - gravimetria

delenia:

- 2D, 2.5D, 2.75 D, 3D
- manuálne, automatické (optimalizačné, iteratívne)
- s akceptáciou doplňujúcich podmienok
(izostatická rovnováha, integrované modelovanie, ...)
- atď.

modelovanie - gravimetria

automatické (optimalizačné, iteratívne)

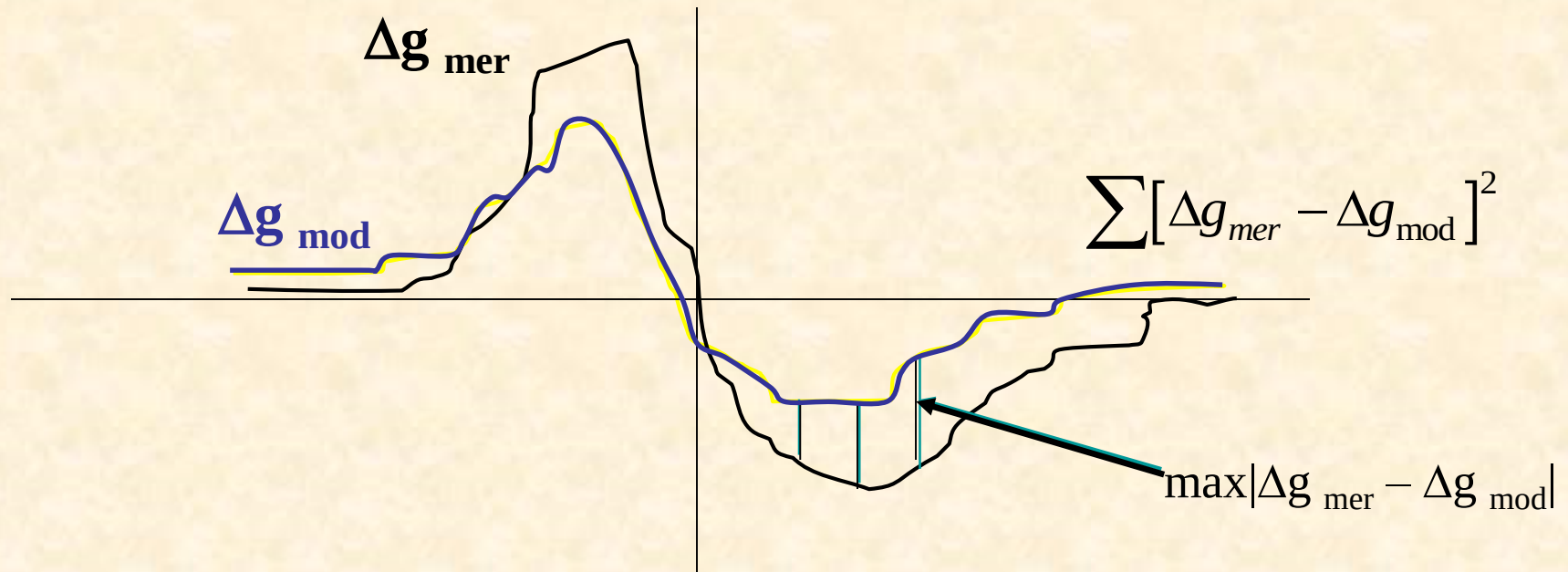
- uskutočňuje sa automaticky pomocou špeciálneho algoritmu ktorý patrí do skupiny tzv. optimalizačných metód numerickej matematiky (užívateľ zadáva tzv. vstupný alebo štartovací model, nastavuje parametre algoritmu, ale samotnú úpravu modelu vykonáva algoritmus),
- tieto algoritmy často prebiehajú v po sebe sa opakujúcich cykloch –
- tzv. iteráciách (užívateľ nastavuje ich počet),
- základná myšlienka väčšiny optimalizačných metód je minimalizácia tzv. funkcionálu (v angličtine často ako ‘objective function’ alebo ‘misfit function’), čo je vlastne funkcia popisujúca „tesnosť“ („blízkosť“) dvoch funkcií – nameranej a modelovanej. Ako dobrý príklad funkcionálu môže poslúžiť suma štvorcov odchýliek medzi dvoma funkciami alebo maximálna absolútna hodnota ich rozdielov vo všetkých bodoch,

modelovanie - gravimetria

automatické (otpimalizačné, iteratívne)

najčastejšie používané funkcionály (objective functions):

- a) suma štvorcov odchýliek (Least Squares - LSQ) alebo
- b) maximálna absolútna hodnota ich rozdielov vo všetkých bodoch (tzv. Čebyševovo kritérium alebo C-norma)



čím sú tieto funkcionály hodnotovo nižšie, tým sú dané funkcie k sebe „bližšie“ („tesnejšie“)

modelovanie - gravimetria

automatické (otpimalizačné, iteratívne)

ako fungujú metódy hľadania minima funkcionálu?

$$F = \sum [\Delta g_{mer} - \Delta g_{mod}]^2 = \min.$$

1. derivačné metódy

(Newtonova metóda, metóda najväčšieho spádu, Fletcher-Powelova metóda, metóda konjugovaných gradientov, Levenberg-Marquardtov algoritmus, atď.)

2. nederivačné metódy

(metóda Simplex, neurónové siete, genetické programovanie, atď.)

*minimum funkcionálu sa hľadá podobne, ako minimum funkcie –
- napr. jeho derivácia (podľa meniaceho sa parametra modelu)
sa položí rovná nule – základ tzv. derivačných metód*

modelovanie - gravimetria

automatické (optimalizačné, iteratívne)

základ derivačných metód

$$F = \sum [\Delta g_{mer} - \Delta g_{mod}]^2 = \min.$$

$$\frac{\partial F}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p} \left\{ \sum [\Delta g_{mer} - \Delta g_{mod}]^2 \right\} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p} \sum [\Delta g_{mer} - \Delta g_{mod}]^2 = 2 \sum [\Delta g_{mer} - \Delta g_{mod}] \left(-\frac{\partial \Delta g_{mod}}{\partial p} \right) = 0$$

z uvedeného vyplýva, že treba poznať parciálnu deriváciu Δg_{mod} podľa meneného parametra p , čo nie je až taký veľký problém, nakoľko Δg_{mod} vyjadrujeme analytickým vzťahom pre priamu úlohu pre elementárne telesá (stupy, hranoly, atď.).

optimalizačné modelovanie - gravimetria

najjednoduchšia derivačná metóda: **Newtonova metóda**

hľadáme riešenie rovnice $f(x) = 0$

tým, že hľadáme bod x , pre ktorý platí $f(x) = 0$ v rámci určitej zadefinovanej presnosti ε . Začíname s tzv. štartovacím bodom x_0 (blízkym ku skutočnému riešeniu x): $x = x_0 + \delta$, kde δ je vyjadrenie určitej nepresnosti v určení x_0

Čiže: $f(x_0 + \delta) \cong 0$.

Keď si vyjadríme Taylorov rozvoj tejto funkcie: $f(x_0 + \delta) \cong f(x_0) + f'(x_0)\delta + \dots$,

Tak pri zanedbaní vyšších členov platí: $f(x_0 + \delta) = f(x_0) + f'(x_0)\delta = 0$.

A z toho pre δ :
$$\delta = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Čiže: $x = x_0 + \delta$,

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

„správnu“ polohu x nájdeme, keď od štartovacieho bodu x_0 odpočítame pomer $f(x_0)/f'(x_0)$

(tam je ukryté to využitie derivácie funkcie)

Toto sa opakuje iteratívne – výsledok predchádzajúceho kroku sa stáva štartovacím bodom pre ďalší krok (iteráciu) a celé je to stále opakované v určitom počte krokov.

Pre našu problematiku sa však nehľadá riešenie $f(x) = 0$, ale $f'(x) = 0$.

optimalizačné modelovanie - gravimetria

Newtonova metóda:

namiesto riešenia rovnice $f(x) = 0$

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

hľadáme riešenie rovnice $f'(x) = 0$

$$x = x_0 - \frac{f'(x_0)}{f''(x_0)}$$

uvedený výsledný vzťah aplikujeme na náš zderivovaný funkcionál F' (s využitím F''), pričom nederivujeme podľa x , ale podľa meneného parametra p (napr. horiz. vzdialenosť hrany telesa od vertikálnej osi alebo hustota alebo hĺbka ...)

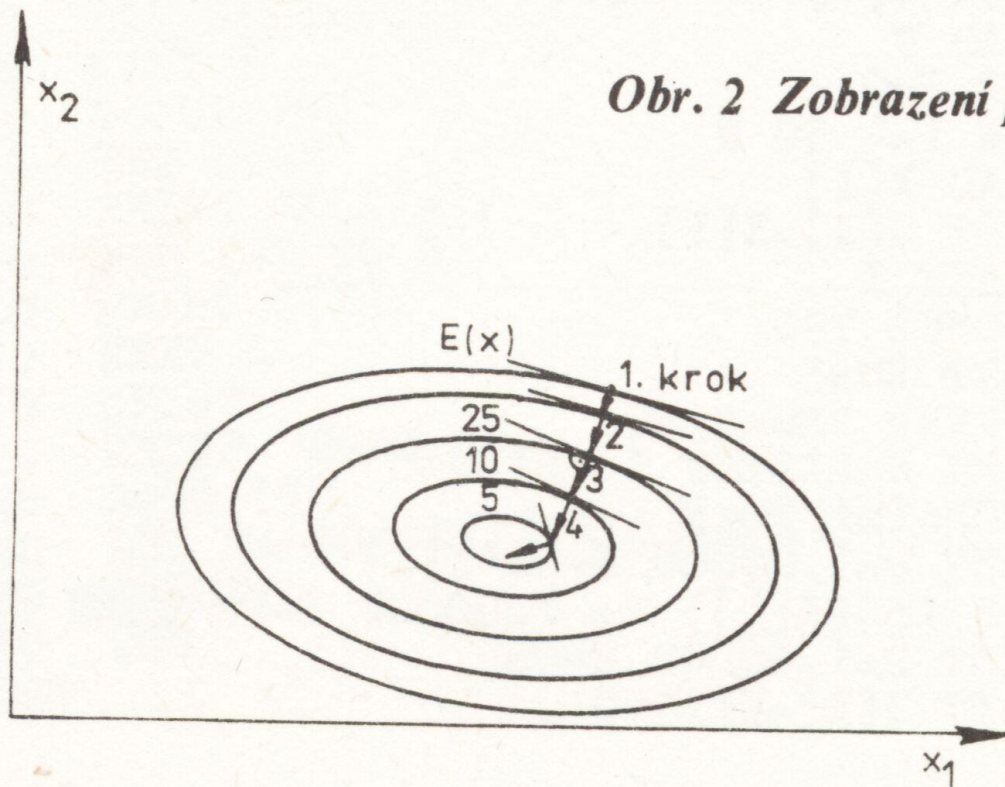
podobným spôsobom pracujú aj ďalšie „vyššie“ derivačné metódy, ako metóda najväčšieho spádu, metóda konjugovaných gradientov, atď.

optimalizačné modelovanie - gravimetria

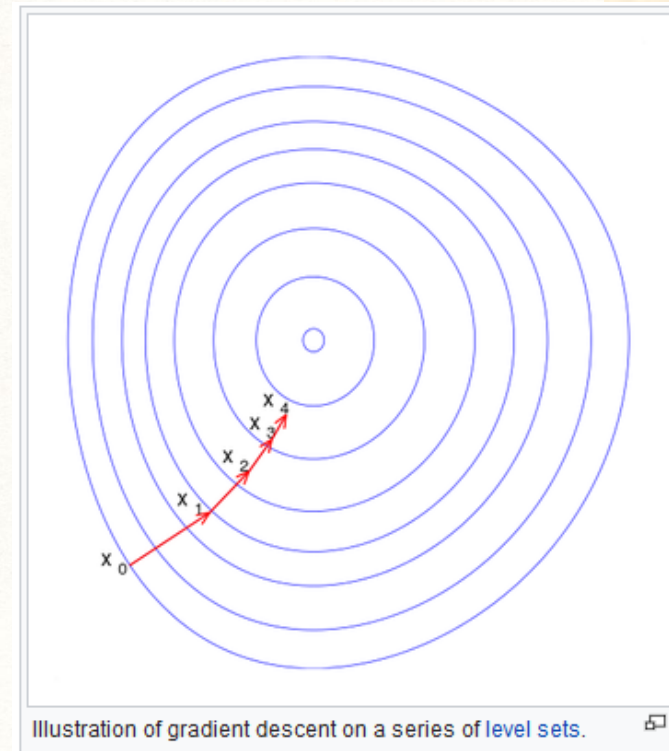
metóda najväčšieho spádu

$$\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{a}_n - \gamma \nabla F(\mathbf{a}_n)$$
 základná rovnica

($\mathbf{a}_{n+1}$: nové riešenie, $\mathbf{a}_n$: pôvodné riešenie, γ : konštanta)



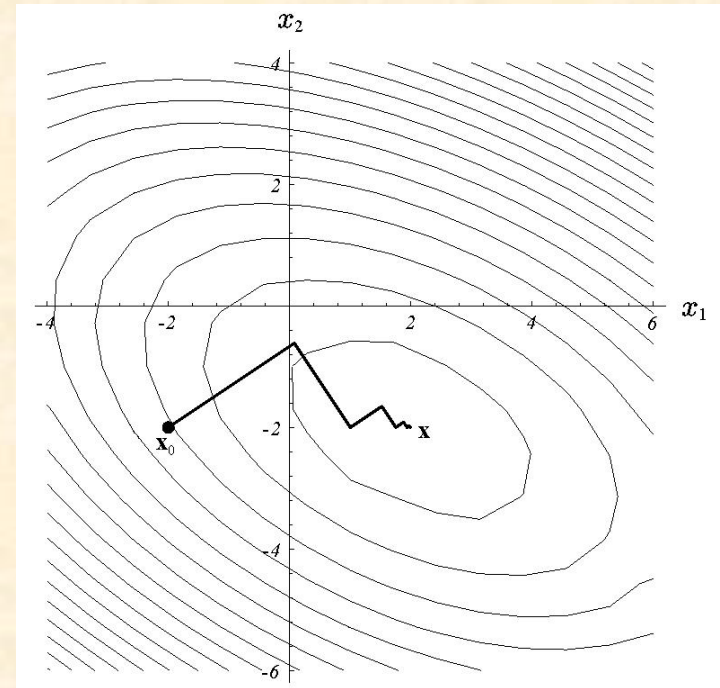
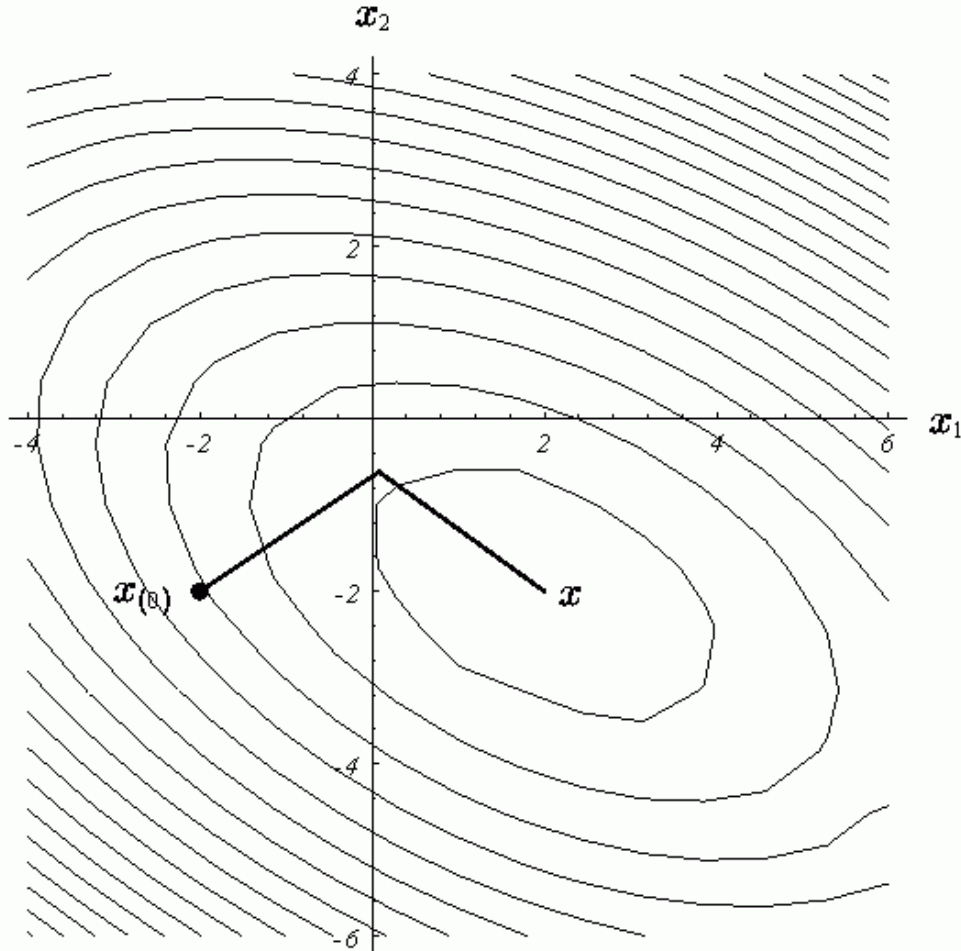
Obr. 2 Zobrazení principu největšího spádu



optimalizačné modelovanie - gravimetria

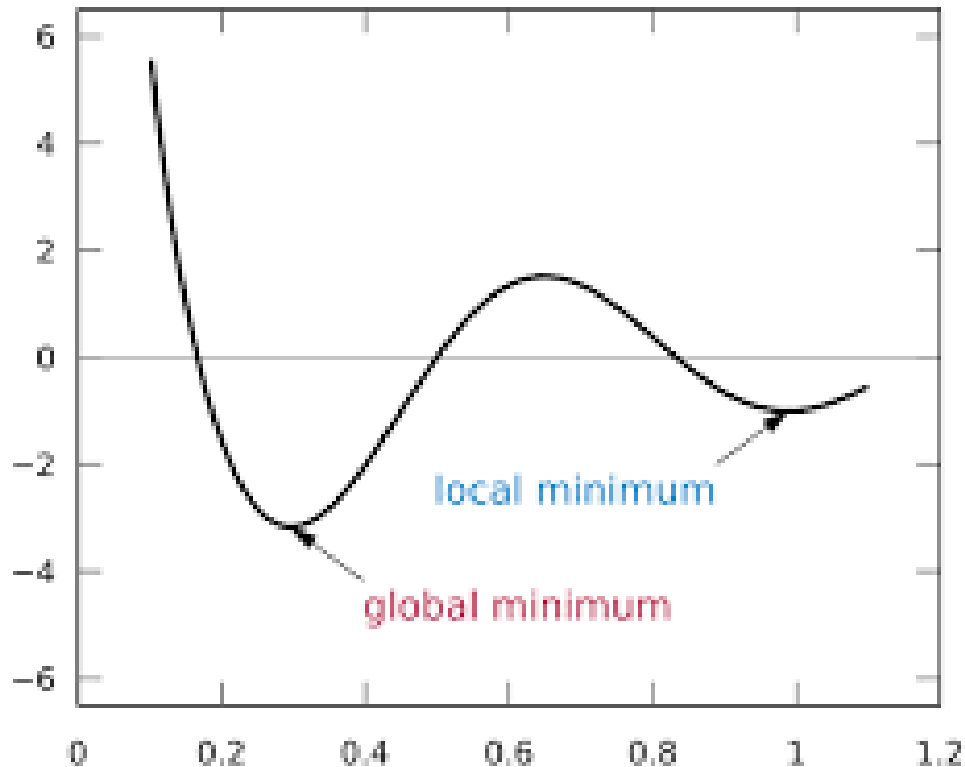
metóda najväčšieho spádu

(metóda maximálneho gradientu, steepest descent method)



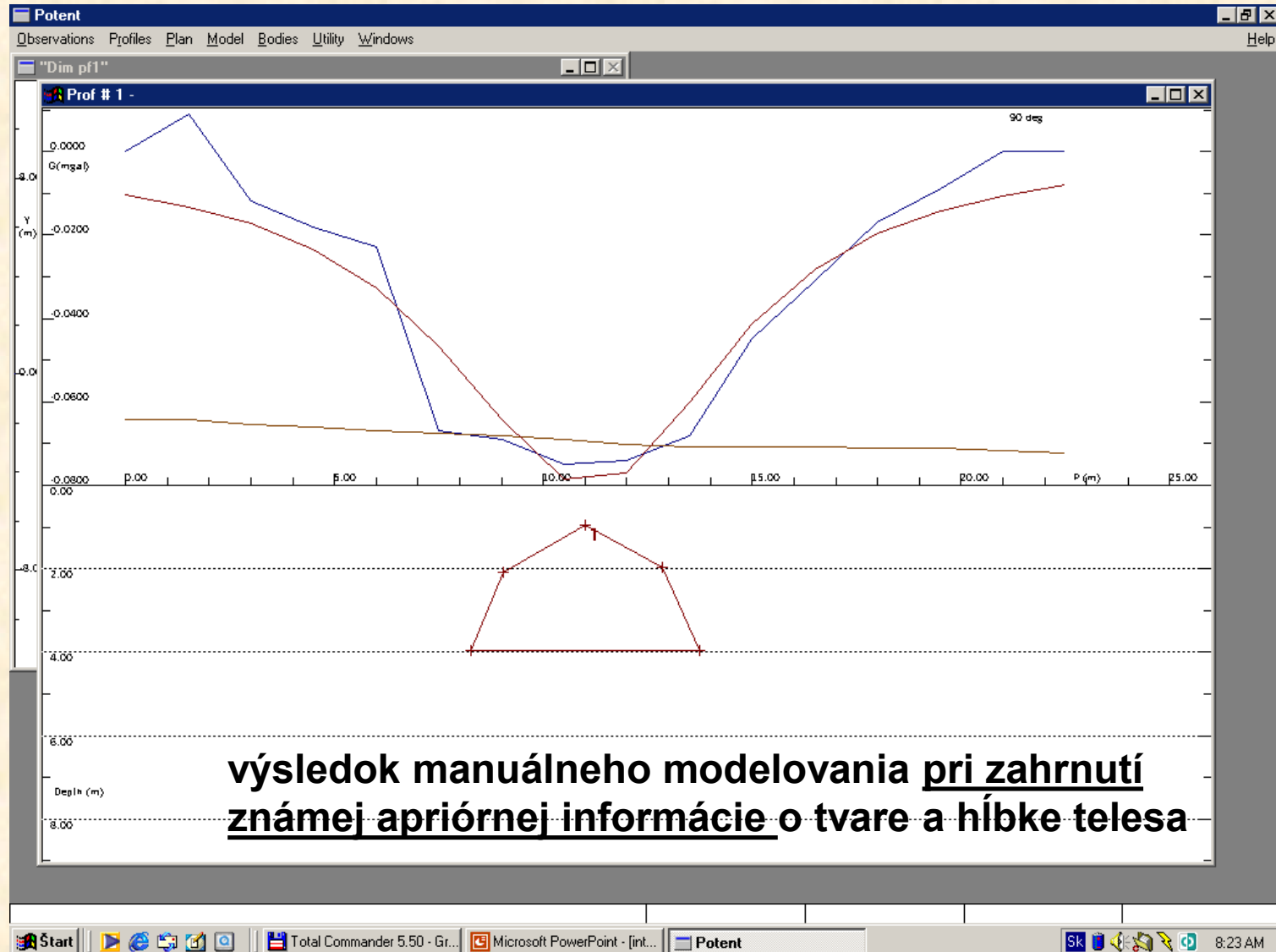
optimalizačné modelovanie - gravimetria

Levenberg-Marquardtov algoritmus
(vylepšená metóda najmenších štvorcov)

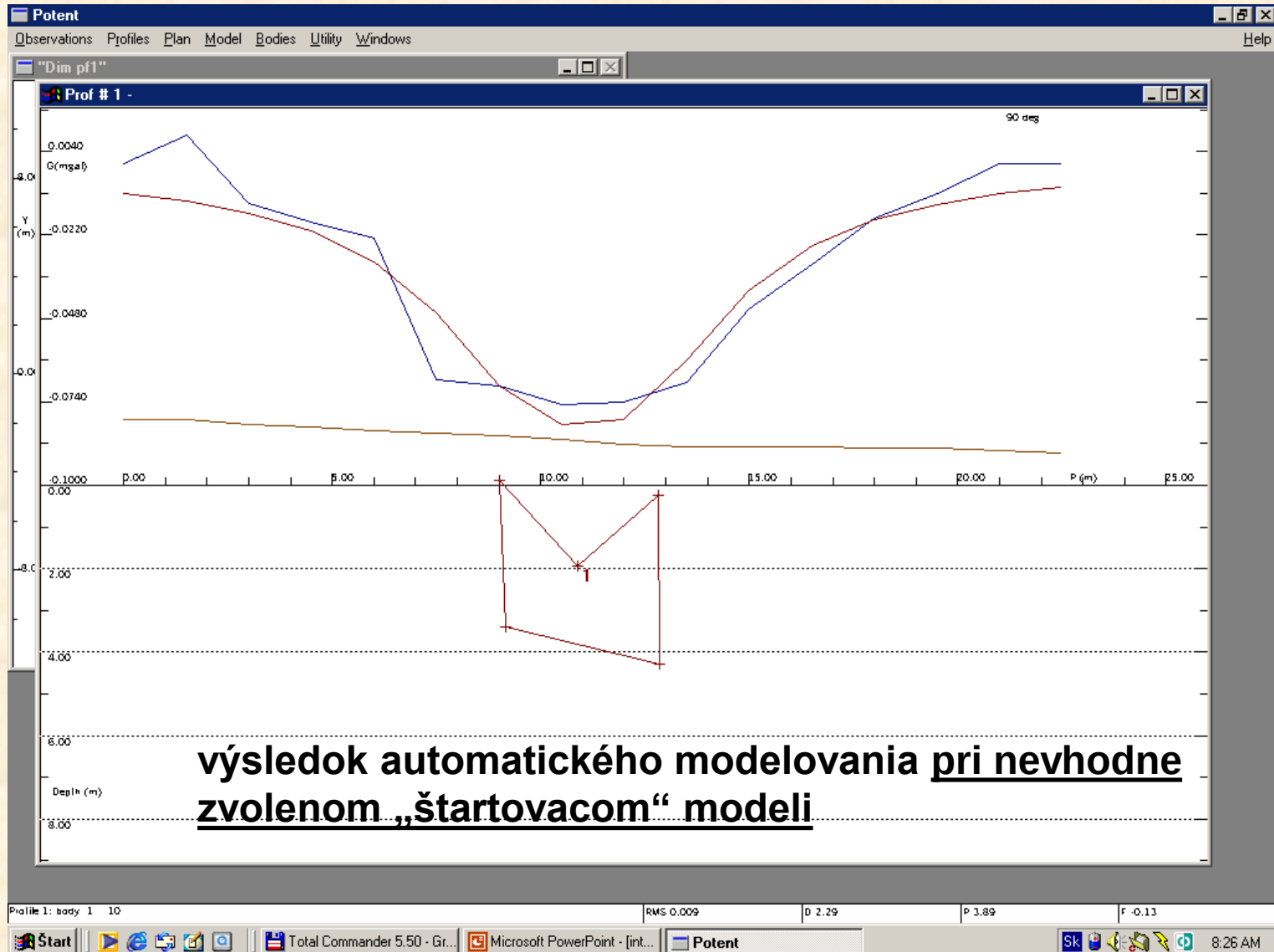


Je lepšia oproti metóde najväčšieho spádu, nakoľko reaguje na globálne minimum riešeného funkcionálu

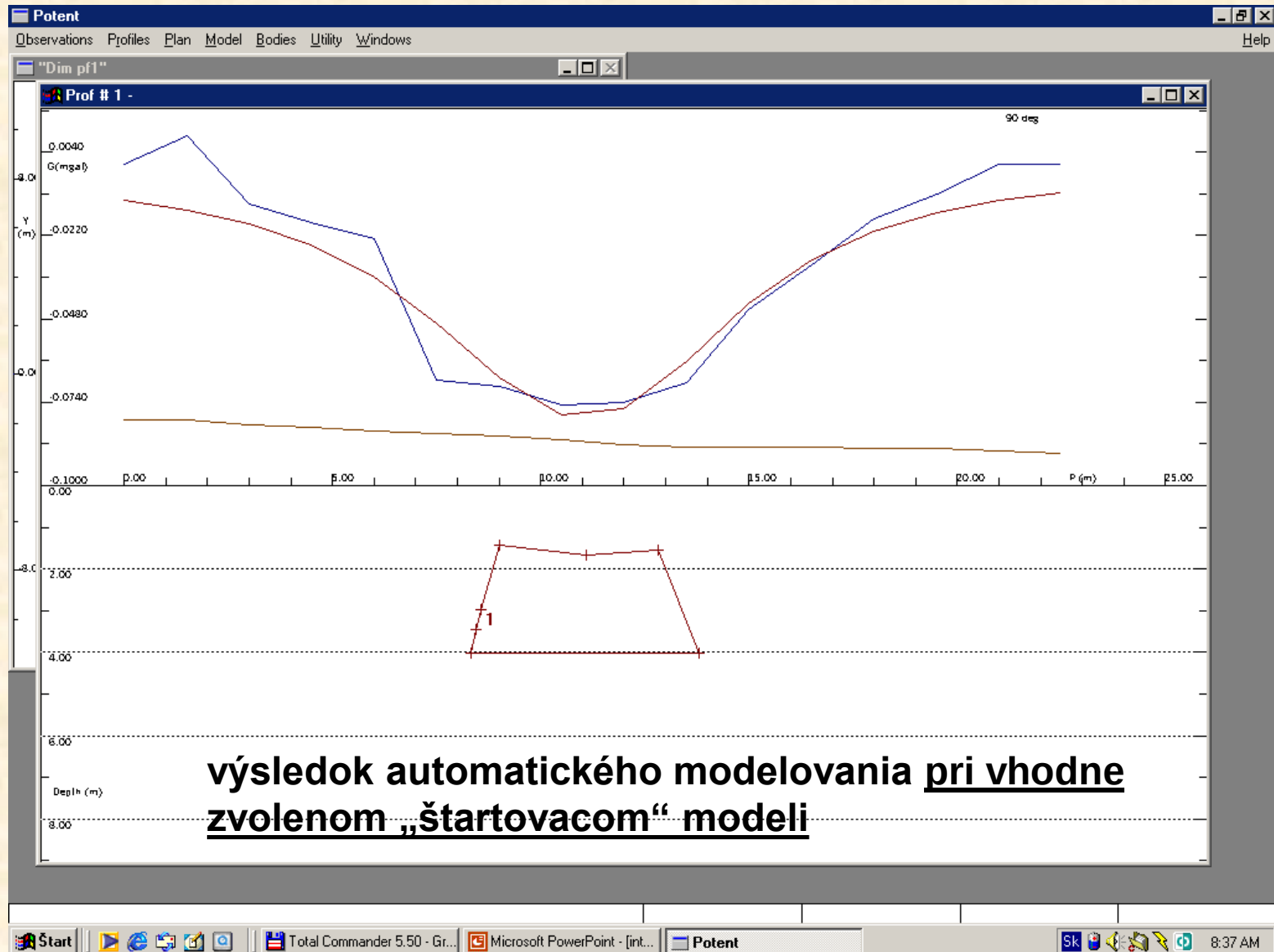
Levenberg-Marquardtov algoritmus (v rámci programu Potent)



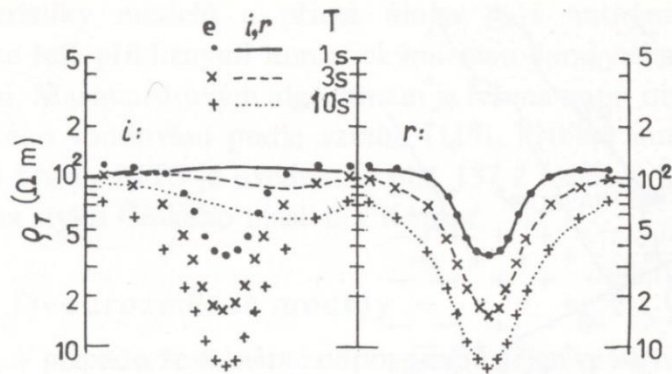
Levenberg-Marquardtov algoritmus (v rámci programu Potent)



Levenberg-Marquardtov algoritmus (v rámci programu Potent)



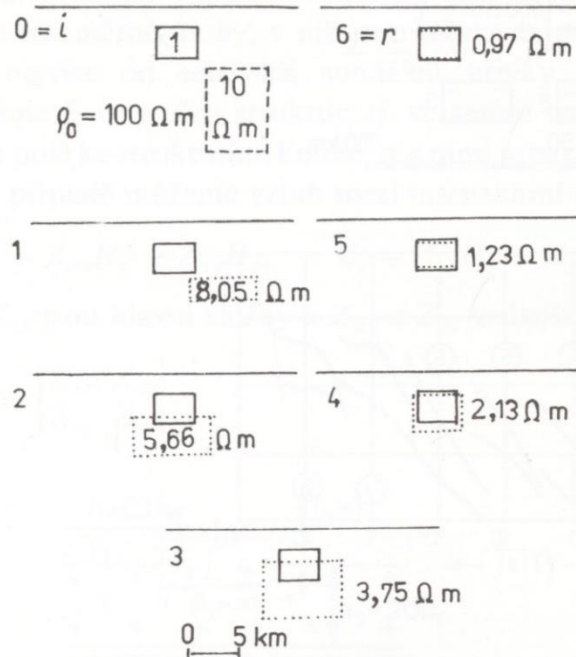
optimalizačné modelovanie - gravimetria



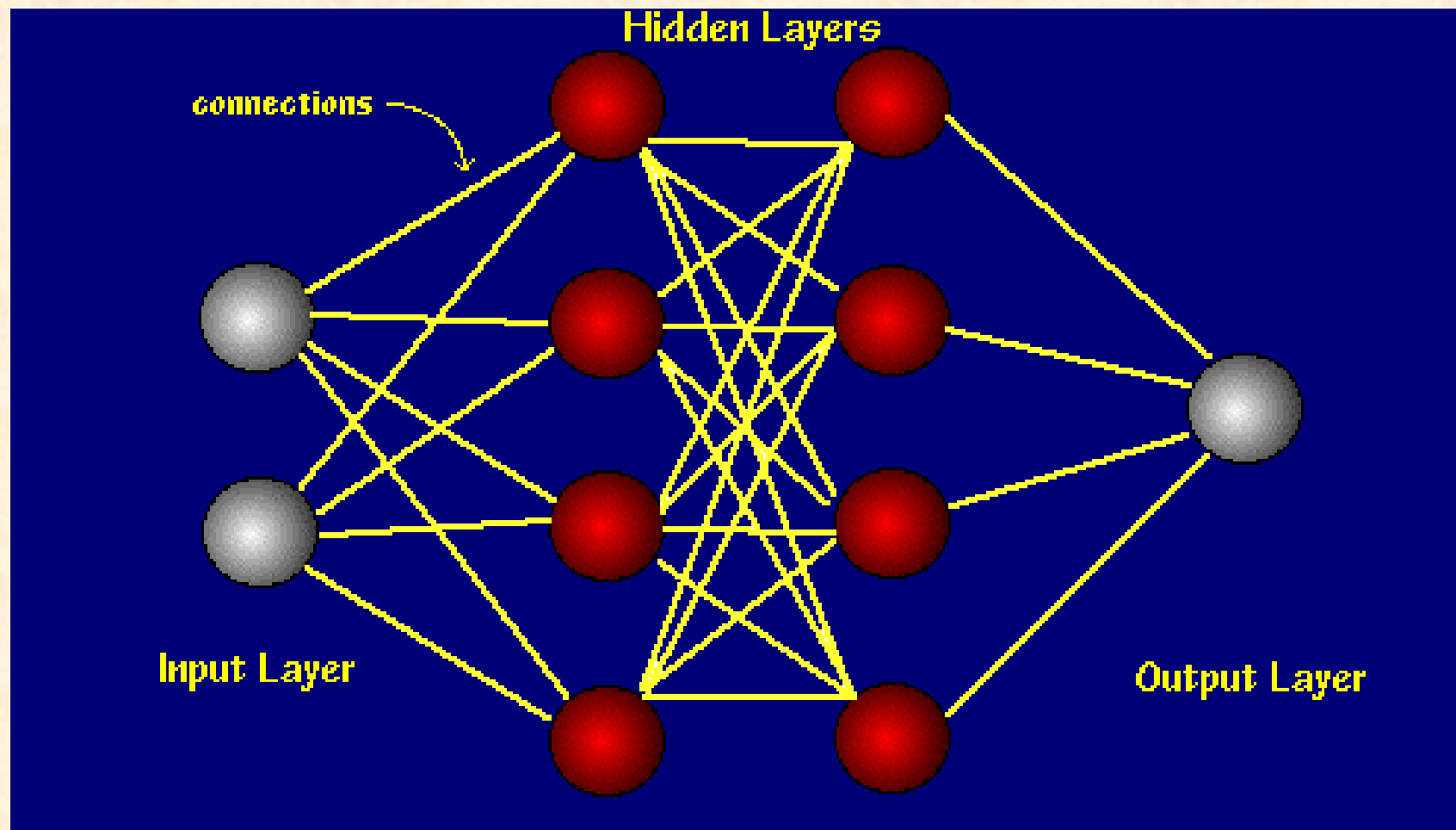
Obr. 140. Iterační
dvourozměrná interpretace
magnetotelurických dat
Marquardtovým algoritmem
(Pek 1983)

e – „praktická data“,
 i – výchozí odhad,
 r – konečný model
po 6 iteracích

Levenberg-Marquardtov
algoritmus
(příklad z geoelektriky)

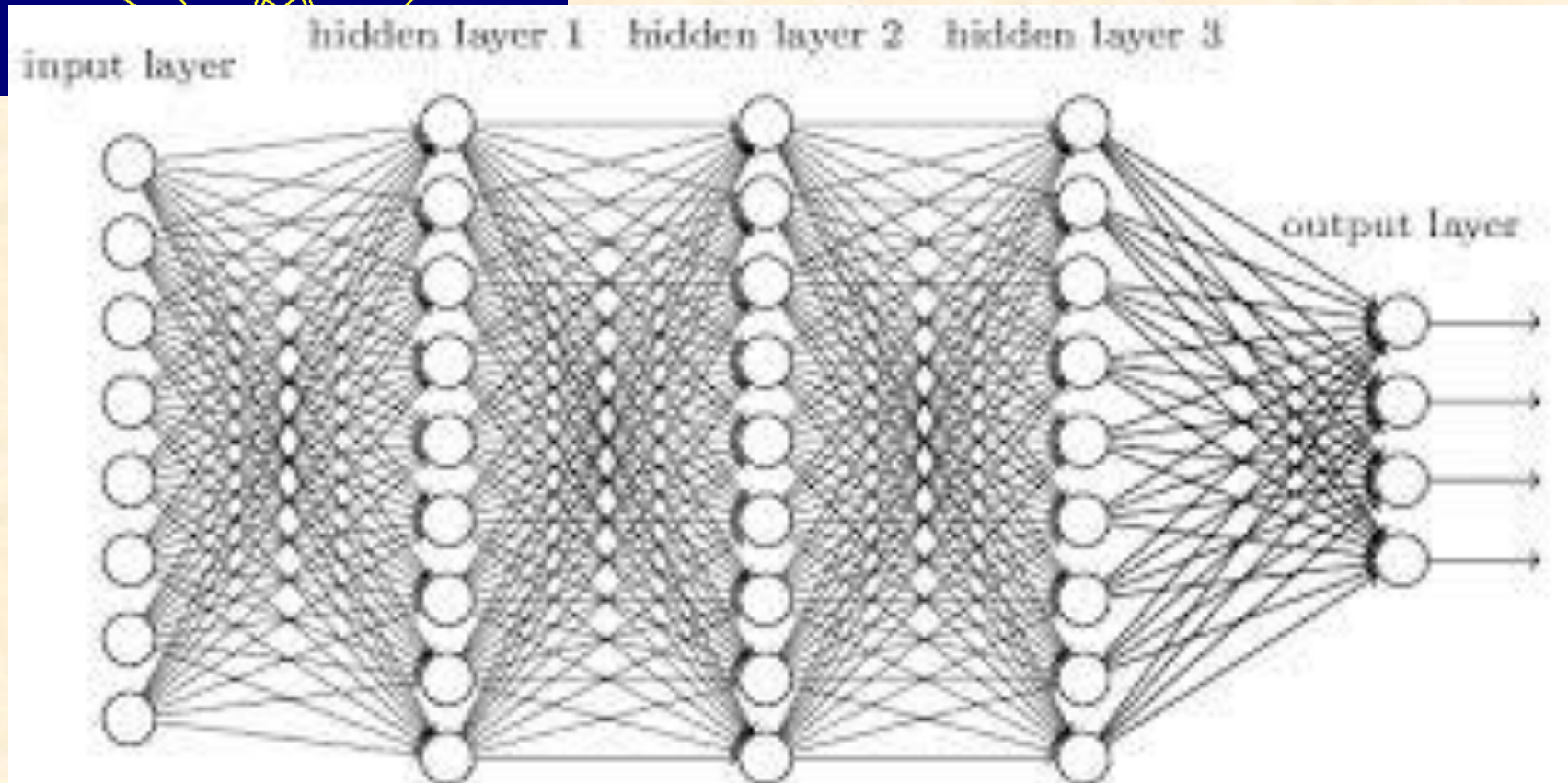
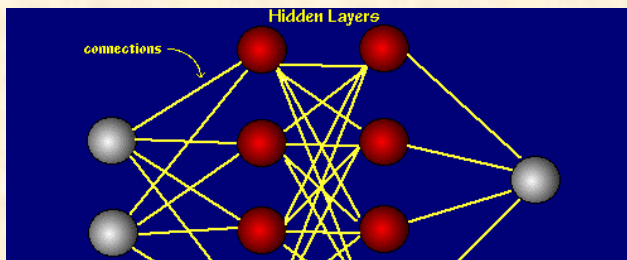


Poznámka ku tzv. neurónovým sieťam (nederivačná metóda):



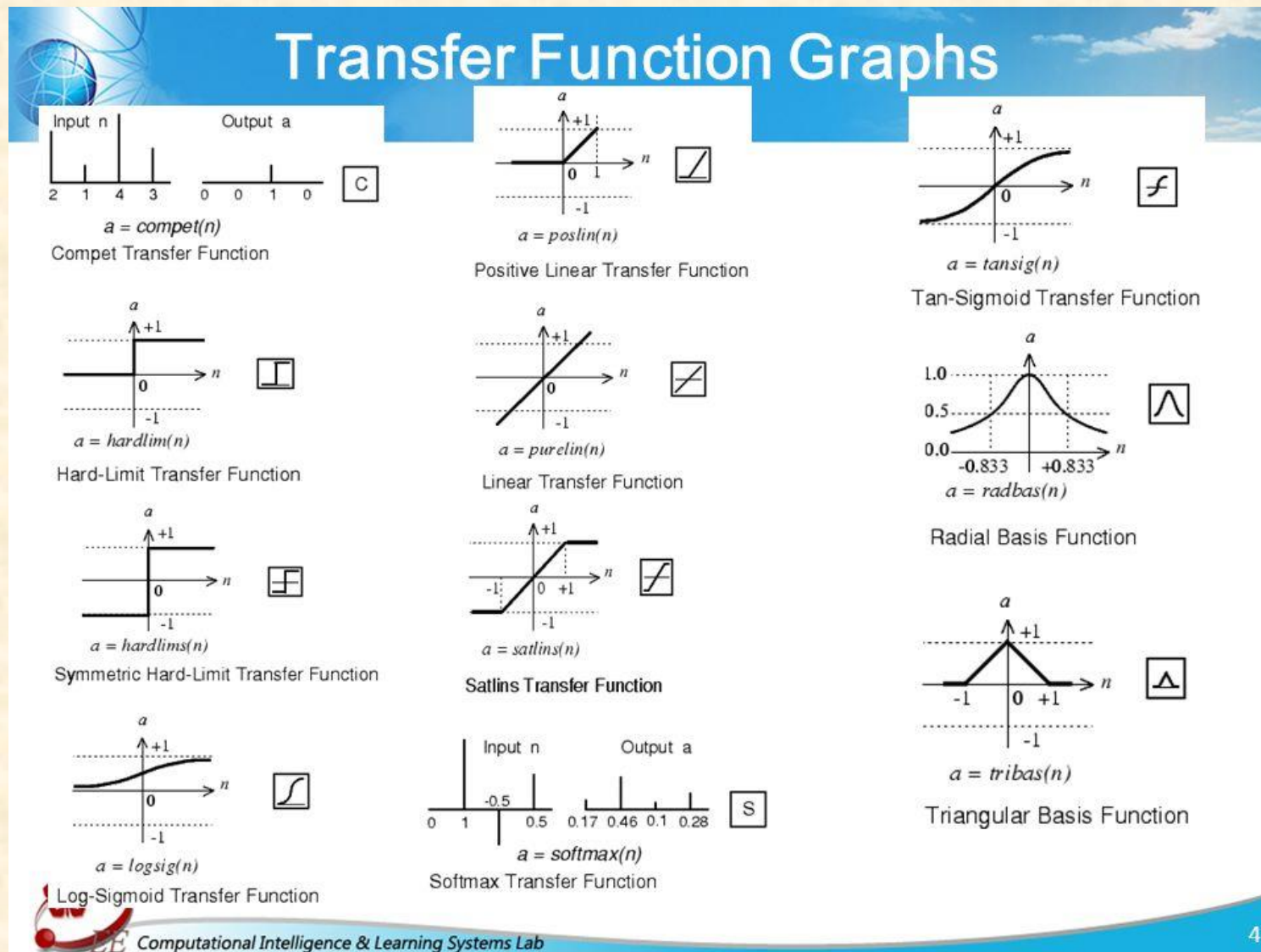
Vzťah vstup - výstup je daný natrénovanými parametrami vzťahov v rámci vnútornej vrstvy algoritmu

Poznámka ku tzv. neurónovým sieťam (nederivačná metóda):



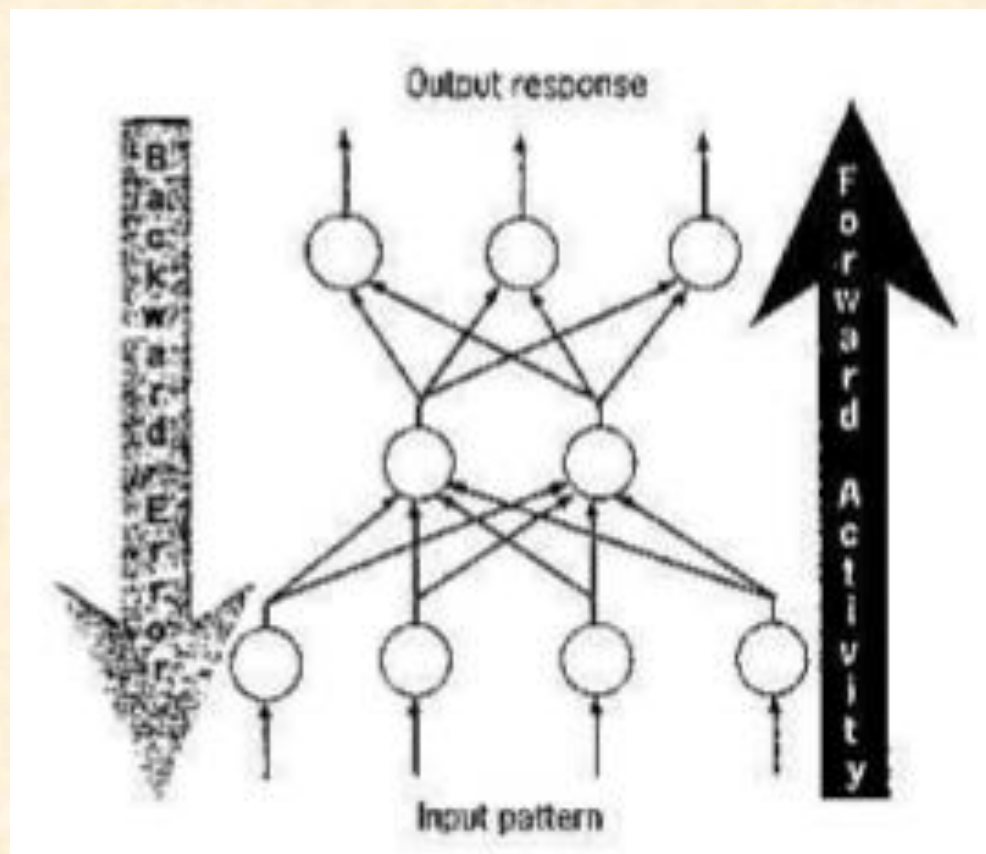
vnútorných vrstiev môže byť aj viacej...

Poznámka ku tzv. neurónovým sieťam (nederivačná metóda):



rôzne typy prenosových funkcií
(každá z nich má svoje parametre/koefficienty)

Poznámka ku tzv. neurónovým sieťam (nederivačná metóda):



Parametre prenosových funkcií je potrebné nastaviť tak, aby pre dané vstupy boli získané očakávané výstupy (pre modelové resp. tréningové údaje).

Existuje množstvo tréningových metód – najznámejšia je asi

tzv. back-propagation method

(z výstupu sa smerom dozadu menia koeficienty prenosových funkcií tak, aby výsledok „sedel“ so vstupnými údajmi)