Magnetometria
Priama úloha 2

– Poissonov teorém
– demagnetizačný faktor

Poissonov teorém

- vyjadruje vzťah medzi gravitačným a magnetickým potenciálom pre hustotne homogénne a homogénne zmagnetizované teleso

$$W = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\kappa\sigma}\left(\mathbf{M}\cdot\nabla U\right) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\kappa\sigma}\left(M_x\frac{\partial U}{\partial x} + M_y\frac{\partial U}{\partial y} + M_z\frac{\partial U}{\partial z}\right)$$

Tento výraz umožňuje výpočet magnetickej intenzity pomocou derivácií gravitačného potenciálu – tento súvis je čisto matematický a nemá fyzikálny význam – teda kým niekto nepríde so zjednocujúcou teóriou, ktorá spojí gravitačné a magnetické polia

Pozn.: Výraz je vhodný pre „oblé“ telesá – ohraničené plochami druhého rádu (guľa, elipsoidy...). Pri telesách ohraničených rovinami sa výraznejšie prejavuje demagnetizačný faktor

Poissonov teorém - odvodenie

Pre **gravitačný potenciál *U* hmotného bodu**, umiestneného v bode [ξ, η, ζ], s hmotnosťou *dm*, pre bod výpočtu P [*x*, *y*, *z*] máme:

$$dU = G\frac{dm}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}} = G\sigma\frac{dV}{R}$$

kde *G* je gravitačná konštanta, *dV* je element objemu, σ je funkcia hustoty a *R* je vzdialenosť dvoch bodov v karteziánskom súradnicovom systéme. Pre celé teleso s objemom *V* teda máme, pri predpoklade konštantnej hustoty:

$$U = G\sigma\iiint\limits_V \frac{1}{R}\,dV$$

Poissonov teorém - odvodenie

Pre **potenciál W_{dp} magnetického dipólu**, umiestneného v bode [ξ, η, ζ], s vektorovým dipólovým momentom $\boldsymbol{M}$, pre bod výpočtu P [x, y, z] máme:

$$W_{dp} = \frac{1}{4\pi}\frac{\mathbf{m}\cdot\mathbf{R}}{R^3} = \frac{1}{4\pi}\frac{\mathbf{m}\cdot\mathbf{e}_R}{R^2} = -\frac{1}{4\pi}\mathbf{m}\cdot\nabla_P\frac{1}{R}$$

kde **m** je magnetický dipólový moment. Pri prechode k elementárnemu objemu dV, ktorého magnetický moment bude reprezentovaný magnetizáciou **M** máme $\mathbf{m} = \mathbf{M}\, dV$. Keď si ďalej teleso predstavíme ako systém dipólov, tak jeho potenciál získame integráciou posledného výrazu cez celý objem V:

$$W_V = -\frac{1}{4\pi}\iiint_V \mathbf{M}\cdot\nabla_P\frac{1}{R}\,dV$$

Predpokladajme, že magnetizácia **M** je homogénna – zložky vektora **M** sú čísla a bod výpočtu je mimo teleso. Potom môžeme magnetizáciu a nabla operátor presunúť pred integrál:

$$W_V = -\frac{1}{4\pi}\iiint_V \mathbf{M}\cdot\nabla_P \frac{1}{R}\,dV = -\frac{1}{4\pi}\mathbf{M}\cdot\nabla_P\left[\iiint_V \frac{1}{R}\,dV\right]$$

Posledný výraz porovnáme s rovnicou pre **gravitačný potenciál**:

$$U = G\sigma\iiint_V \frac{1}{R}\,dV$$

A vidíme, že výraz v hranatej zátvorke pri výpočte **magnetického potenciálu** je vlastne **gravitačný potenciál** (až na konštanty). Môžeme teda písať:

$$W_V = -\frac{1}{4\pi}\mathbf{M}\cdot\nabla_P\left[\frac{U}{\kappa\sigma}\right] = \boxed{-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\kappa\sigma}\left(M_x\frac{\partial U}{\partial x} + M_y\frac{\partial U}{\partial y} + M_z\frac{\partial U}{\partial z}\right)}$$

Demagnetizačný faktor

- magnetické pole v samotnom magnete vyvolané magnetizáciou. Obyčajne mieri proti smeru magnetizácie **M** a teda zoslabuje magnetický moment. Vo všeobecnosti teda potrebujeme riešenie (numerické) Poissonovej rovnice pre dané teleso (teda hľadáme potenciál vo vnútri telesa). Pre homogénne zmagnetizované a „pekné“ telesá je možné ho určiť analyticky.

Guľa

- homogénne vertikálne zmagnetizovaná: **M** = [0, 0, M]
- polomer „a“
- sférický súradnicový systém

$$U_m(R,\vartheta') = \frac{Ma^2}{4\pi} \iiint_V \frac{\cos\vartheta}{|\mathbf{R}-\boldsymbol{\rho}|} dV$$

Guľa

$$U_m\left(R,\vartheta'\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}MR\cos\vartheta; & R<a\\[2ex] \dfrac{1}{3}Ma^3\dfrac{\cos\vartheta}{R^2}; & R>a\end{cases}$$

Keď uvažujeme len pole od gule samotnej (bez vonkajšieho indukujúceho mag. poľa, teda predpokladáme „veľkú kappu“), tak pre mag. pole vnútri takejto gule máme:

$$\mathbf{H}_i=-\nabla U_m^i=-N\mathbf{M}$$

$$\mathbf{B}_i=\mu_0\left(\mathbf{H}_i+\mathbf{M}\right)$$

$$U_m^i\left(R,\vartheta'\right)=\frac{1}{3}MR\cos\vartheta=\frac{1}{3}Mz\Rightarrow$$

$$-\nabla U_m^i=\frac{\partial U_m^i}{\partial z}=-\frac{1}{3}M\mathbf{k}=-\frac{1}{3}\mathbf{M}\Rightarrow \underline{\underline{N=\frac{1}{3}}}$$

$$\mathbf{B}_i=\mu_0\left(-\frac{1}{3}\mathbf{M}+\mathbf{M}\right)=\underline{\underline{\frac{2}{3}\mu_0\mathbf{M}}}$$