

VYSOKOŠKOLSKÉ SKRIPTÁ

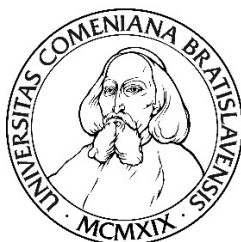
UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

Prírodovedecká fakulta

Katedra aplikovanej a environmentálnej geofyziky

Roland KARCOL

VYBRANÉ ŠPECIÁLNE FUNKCIE V APLIKOVANEJ GEOFYZIKE 1



2020

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

© RNDr. Roland Karcol, PhD.

Univerzita Komenského v Bratislave, Prírodovedecká fakulta, Geologická sekcia, Katedra aplikovanej a environmentálnej geofyziky

2020

Recenzent

prof. RNDr. Roman Pašteka, PhD.

Za odbornú stránku vysokoškolských skrípt zodpovedá autor.

Vyšlo ako elektronická publikácia.

Rozsah 78 strán, 4,28 AH, vydanie prvé.

Univerzita Komenského v Bratislave

ISBN 978-80-223-5025-9

Predkladané vysokoškolské skriptá sú určené pre študentov magisterského a doktorandského štúdia študijného odboru 42. Vedy o Zemi v študijnom programe Aplikovaná a environmentálna geofyzika na Prírodovedeckej fakulte Univerzity Komenského v Bratislave.

Obsah

Predhovor	5
1. Eulerove funkcie	6
1.1 Definícia Eulerových funkcií	6
1.2 Základné vlastnosti gama funkcie	8
1.3 Logaritmicá derivácia gama funkcie	12
2. Besselove funkcie.....	15
2.1 Besselova diferenciálna rovnica, Besselova funkcia prvého druhu	15
2.2 Besselove funkcie druhého druhu	18
2.3 Besselove funkcie imaginárneho argumentu.....	22
2.4 Iné formy Besselových funkcií	23
2.5 Besselove funkcie polocelého rádu	25
2.6 Základné vlastnosti Besselových funkcií reálneho argumentu	26
2.7 Základné vlastnosti Besselových funkcií imaginárneho argumentu	32
2.8 Integrálne vzorce pre Besselove funkcie.....	36
2.9 Určité integrály s Besselovými funkciami	40
2.10 Diferenciálne rovnice vedúce k Besselovým rovniciam	46
2.11 Asymptotické vyjadrenia pre Besselove funkcie	48
3. Aplikácia Besselových funkcií.....	50
3.1 Rovinné rozhranie v poli bodového zdroja	50
3.2 Určenie potenciálu bodového zdroja pre n horizontálnych rozhraní	56
3.3 Základná úloha karotáže.....	61
3.4 Rozdelenie potenciálu bodovej elektródy na osi dvoch koaxiálnych valcov	65
3.5 Rozdelenie striedavého prúdu v priereze vodiča – skin efekt.....	69
3.6 Odpor uzemnenia v tvare disku.....	75
Literatúra	78

Predhovor

Úvody a predhovory aj tak takmer nik nečíta. Sám autor sa k tomu musí nútiť a málokedy ho prečíta poriadne, obzvlášť vtedy, keď sa v ňom rekapituluje obsah. Tak snád' len toľko, že predkladaný text si kladie za cieľ rozšírenejší výklad učiva z letného semestra tretieho ročníka predmetu Matematické základy teórie geofyzikálnych metód 2, prevažne látky o Besselových funkciách a ich použití. Pripravovaný druhý diel bude venovaný sférickým a eliptickým funkciám. Autor bude pozorný k prípadným upozorneniam na chyby či nepresnosti v predkladanom texte.

1. Eulerove funkcie

Eulerove funkcie sú dôležité v teórii aplikovaných geofyzikálnych metód, najmä pri štúdiu Besselových funkcií. V nasledujúcich kapitolách sa teda zoznámime bližšie s týmito funkciami a ich vlastnosťami (s funkciou gama sme sa už stretli na Matematických základoch teórie geofyzikálnych metód 2 v letnom semestri tretieho ročníka).

1.1 Definícia Eulerových funkcií

Eulerovým integrálom prvého druhu budeme rozumieť funkciu:

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad (1.1.1)$$

kde x a y sú komplexné čísla a $\operatorname{Re}\{x\} > 0$, $\operatorname{Re}\{y\} > 0$. Táto funkcia sa nazýva tiež beta funkciou premenných x a y (jej symbol B je vlastne veľké grécke beta, nie latinské B).

Eulerovým integrálom druhého druhu budeme rozumieť funkciu:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \quad (1.1.2)$$

kde z je komplexné číslo a $\operatorname{Re}\{z\} > 0$. Táto funkcia sa nazýva gama funkcia premennej z . Funkcia gama môže byť analyticky predĺžená do celej komplexnej roviny. Podrobnejšou analýzou možno ukázať, že funkcia gama je meromorfná funkcia komplexnej premennej z s jednoduchými pólmi v bodoch $z = -n + \{0\} = 0; -1; -2 \dots$. Pripomeňme, že meromorfná funkcia komplexnej premennej je taká, že je holomorfná (jednoznačná, spojitá, spĺňajúca Cauchyho-Riemannove podmienky) na oblasti D s výnimkou spočítateľnej množiny bodov, v ktorých je singulárna. Funkcia gama nemá nulové body a v okolí singularít existujú len jednostranné limity rovné $\pm\infty$.

Funkcie $B(x, y)$ a $\Gamma(z)$ súvisia navzájom vzťahom:

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \quad (1.1.3)$$

Dôkaz urobíme cez pomocnú rovnicu:

$$\int_0^\infty e^{-pt} t^{z-1} dt = \frac{\Gamma(z)}{p^z}, \quad \operatorname{Re}\{p\} > 0, \operatorname{Re}\{z\} > 0. \quad (1.1.4)$$

Túto rovnicu ľahko dokážeme pomocou substitúcie $s = pt$, kde p je kladné reálne číslo a s využitím definície (1.1.2). Rozšírenie platnosti na ľubovoľné komplexné p s kladnou reálnou časťou je možné cez analytické predĺženie. Teraz zavedieme novú integračnú premennú

v definícii beta funkcie (1.1.1) substitúciou $u = \frac{t}{1-t}$ a dostaneme:

$$B(x, y) = \int_0^1 \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} du, \quad \operatorname{Re}\{x\} > 0, \operatorname{Re}\{y\} > 0. \quad (1.1.5)$$

Teraz položíme $p = 1+u$, $z = x+y$ v pomocnej rovnici (1.1.4) a dostaneme:

$$\frac{1}{(1+u)^{x+y}} = \frac{1}{\Gamma(x+y)} \int_0^\infty e^{-(1+u)t} t^{x+y-1} dt. \quad (1.1.6)$$

Po dosadení do (1.1.5) máme:

$$\begin{aligned} B(x, y) &= \int_0^\infty u^{x-1} \left(\frac{1}{\Gamma(x+y)} \int_0^\infty e^{-(1+u)t} t^{x+y-1} dt \right) du = \\ &= \frac{1}{\Gamma(x+y)} \int_0^\infty \int_0^\infty u^{x-1} e^{-t} e^{-ut} t^{x+y-1} dt du = \\ &= \frac{1}{\Gamma(x+y)} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{(ut)^{x-1} e^{-t} e^{-ut} t^{x+y-1}}{t^{x-1}} dt du = \\ &= \frac{1}{\Gamma(x+y)} \int_0^\infty (ut)^{x-1} e^{-ut} \int_0^\infty \frac{e^{-t} t^{x+y-1}}{t^{x-1}} dt du = \\ &= \frac{1}{\Gamma(x+y)} \int_0^\infty (ut)^{x-1} e^{-ut} du \int_0^\infty e^{-t} t^{y-1} dt = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

Takto sme dokázali rovnicu (1.1.3), ktorá sa nazýva aj Eulerov teorém a spája beta funkciu s funkciou gama, čím umožňuje, na základe poznatkov o Eulerových integráloch, obmedziť sa na štúdium vlastností jednej z tried týchto funkcií. Pre nás budú mať najväčší význam funkcie gama a preto sa budeme zaoberať práve ich vlastnosťami.

1.2 Základné vlastnosti gama funkcie

Vlastnosť 1

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (1.2.1)$$

Vyjadríme gama funkciu na ľavej strane rovnosti pomocou definície:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt.$$

Integráciou po častiach dostaneme:

$$\Gamma(z+1) = \left[-te^{-t} \right]_0^{\infty} + z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Pre výraz v hranatej zátvorke ľahko dostaneme:

$$\left[-te^{-t} \right]_0^{\infty} = 0,$$

a preto:

$$\Gamma(z+1) = z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z), \quad (1.2.2)$$

čím je tvrdenie (1.2.1) dokázané. Táto vlastnosť sa nazýva aj rekurentná.

Vlastnosť 2

Vyjadríme gama funkciu ako limitu súčinu. Za týmto účelom budeme uvažovať argument gama funkcie reálne kladné číslo x a $n \in \mathbb{N}$. Definujme si pomocnú funkciu:

$$f(n, x) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt \quad (1.2.3)$$

Integrujeme po častiach člen stojaci na pravej strane rovnice a dostaneme:

$$f(n, x) = \left[\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \frac{t^x}{x} \right]_0^n + \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \frac{t^x}{x} dt.$$

Člen v hranatých zátvorkách pri vrchnej i spodnej hranici, stáva sa nulovým a preto:

$$f(n, x) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \frac{t^x}{x} dt.$$

Zopakujme podobnú operáciu n -krát a dostaneme:

$$\begin{aligned}
\Gamma(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x}{x \left(1 + \frac{x}{1}\right) \left(1 + \frac{x}{2}\right) \dots \left(1 + \frac{x}{n}\right)}, \\
\Gamma(1-x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{1-x}}{(1-x) \left(1 + \frac{1-x}{1}\right) \left(1 + \frac{1-x}{2}\right) \dots \left(1 + \frac{1-x}{n}\right)} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{-x} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \cdot n}{(1-x)(2-x) \dots (n+1-x)} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{-x}}{\left(1 - \frac{x}{1}\right) \left(1 - \frac{x}{2}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{n}\right)} \cdot \frac{n}{(n+1-x)}.
\end{aligned}$$

Vynásobíme posledné dve rovnice a dostaneme:

$$\begin{aligned}
\Gamma(x) \Gamma(1-x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x \left(1 - \frac{x^2}{1}\right) \left(1 - \frac{x^2}{2^2}\right) \dots \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1-x}{n}\right)} = \\
&= \frac{1}{x \left(1 - \frac{x^2}{1}\right) \left(1 - \frac{x^2}{2^2}\right) \dots \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)},
\end{aligned}$$

pričom sme využili, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x}{n} = 0$. Porovnajme tieto vzorce so vzorcom vyjadrujúcim $\sin x$

v tvare nekonečného radu:

$$\sin x = x \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \dots$$

Porovnaním posledných výrazov vidíme, že:

$$\Gamma(x) \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin x \pi}.$$

Pripomeňme, že tento výraz je možné rozšíriť na celú komplexnú rovinu okrem bodov $z = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$

Vlastnosť 4

$$2^{z-1} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \Gamma(2z). \quad (1.2.6)$$

Predpokladajme zatiaľ, že z je reálne kladné číslo (ďalej označené ako x) a s využitím (1.1.3) máme:

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(x)}{\Gamma(x+x)} = B(x, x) = \int_0^1 [t(1-t)]^{x-1} dt = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} [t(1-t)]^{x-1} dt.$$

Zavedieme substitúciu $s = 4t(1-t)$ a dostaneme:

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(x)\Gamma(x)}{\Gamma(x+x)} &= B(x, x) = 2^{1-2x} \int_0^1 s^{x-1} (1-s)^{-\frac{1}{2}} ds \Rightarrow \\ B(x, x) &= 2^{1-2x} B\left(x, \frac{1}{2}\right) = 2^{1-2x} \frac{\Gamma(x)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)} \Rightarrow \\ B(x, x) &= 2^{1-2x} B\left(x, \frac{1}{2}\right) = 2^{1-2x} \frac{\Gamma(x)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)} \Rightarrow \\ \frac{\Gamma(x)\Gamma(x)}{\Gamma(2x)} &= 2^{1-2x} \frac{\Gamma(x)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Ostáva určiť hodnotu $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ čo zistíme priamo z definície gama funkcie s použitím Gaussovhovho integrálu a dostaneme:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \quad (1.2.7)$$

Konečne, po jednoduchšej úprave, dostaneme hľadaný výraz:

$$2^{2x-1} \Gamma(x) \Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \Gamma(2x). \quad (1.2.8)$$

Tento výraz sa dá opäť analyticky predĺžiť na celú komplexnú rovinu s výnimkou bodov

$$z = 0; -\frac{1}{2}; -1; -\frac{3}{2} \dots$$

Získané výsledky je možné ďalej použiť na dokázanie nasledujúceho výrazu:

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}(2n-1)!!}{2^n}, \quad (1.2.9)$$

kde $n \in \mathbb{N} + \{0\}$.

Vlastnosť 5

Bez (náročných) dôkazov uvedieme ešte tri asymptotické výrazy. Pre veľké hodnoty prirodzeného argumentu ($n \in \mathbb{N}$) platí *Stirlingov vzorec*:

$$n! = \Gamma(n+1) \approx \sqrt{2n\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n. \quad (1.2.10)$$

Ďalšou aproximáciou funkcie gama komplexného argumentu je napr. výraz:

$$\Gamma(z) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{z}} \left[\frac{1}{e} \left(z + \frac{1}{12z} - \frac{1}{10z^3} \right) \right]^z, \quad (1.2.11)$$

alebo, pre kladné reálne argumenty:

$$\Gamma(x) \approx \left(\frac{x}{e}\right)^x \left(1 + \frac{1}{12x^2} - \frac{1}{10}\right)^x. \quad (1.2.12)$$

1.3 Logaritmická derivácia gama funkcie

Ďalšou špeciálnou funkciou úzko spätou s gama funkciou je jej logaritmická derivácia, ktorú označujeme $\psi(z)$ a platí pre ňu:

$$\psi(z) = \frac{d}{dz} \ln(\Gamma(z)) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}. \quad (1.3.1)$$

V literatúre sa označuje aj ako digamma funkcia. Výrazy pre funkciu $\psi(z)$ môžeme získať derivovaním a úpravou výrazov pre gama funkciu ((1.2.2), (1.2.5) a (1.2.6)):

$$\psi(z+1) = \frac{1}{z} + \psi(z), \quad (1.3.2)$$

$$\psi(1-z) - \psi(z) = \pi \cdot \cot(\pi z), \quad (1.3.3)$$

$$\psi(z) + \psi\left(z + \frac{1}{2}\right) + 2 \ln 2 = 2\psi(2z). \quad (1.3.4)$$

Tieto výrazy môžeme použiť na stanovenie špeciálnych hodnôt funkcie $\psi(z)$:

$$\psi(1) = -\gamma, \quad (1.3.5)$$

kde γ sa nazýva Eulerovou konštantou a jej numericky určená hodnota je $\gamma = 0,57721566\dots$, napr. pomocou jedného z integrálnych vyjadrení:

$$\gamma = \int_0^1 \frac{1 - e^{-t} - e^{-1/t}}{t} dt. \quad (1.3.6)$$

Z výrazu (1.3.2) ďalej máme pre $z = n$:

$$\psi(n+1) = -\gamma + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}; \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.3.7)$$

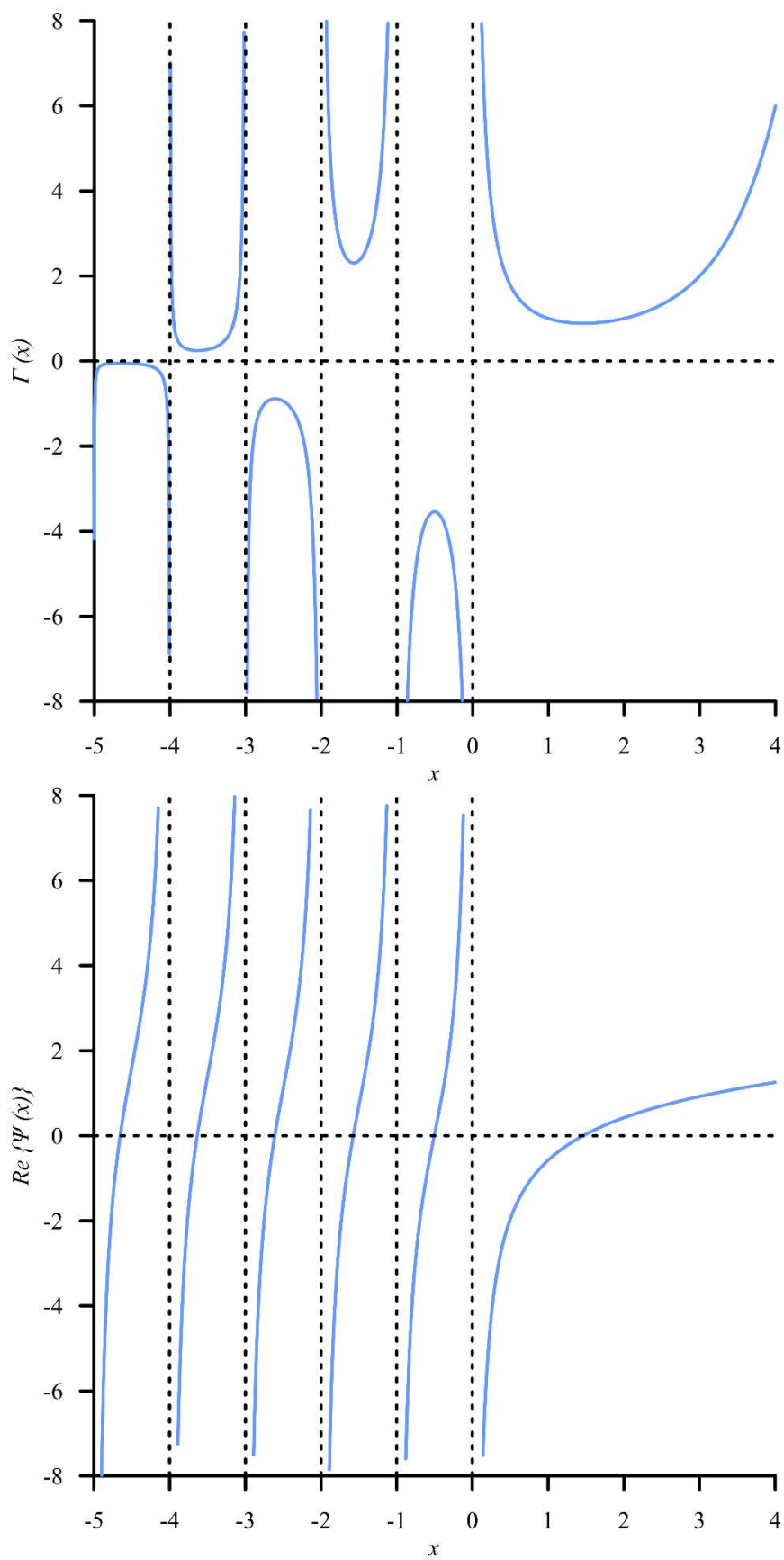
Z kombinácie výrazov (1.3.2) a (1.3.4) dostaneme:

$$\psi\left(n + \frac{1}{2}\right) = -\gamma - 2 \ln 2 + 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1}. \quad (1.3.8)$$

Integrálnych vyjadrení funkcie $\psi(z)$ je viacero, jedným z nich je napr.

$$\psi(z) = \int_0^\infty \left[e^{-x} - \frac{1}{(x+1)^z} \right] \frac{dx}{x}; \quad \operatorname{Re}\{z\} > 0. \quad (1.3.9)$$

Grafy funkcií $\Gamma(x)$ a $\psi(x)$ pre reálne argumenty sú na **Obr. 1**.



Obr. 1: Grafy **a)** gama funkcie a **b)** reálnej zložky logaritmickéj derivácie funkcie gama.

2. Besselove funkcie

Riešenie veľkého počtu úloh aplikovanej geofyziky – najmä teórie geoelektrického prieskumu si vyžaduje riešenia Besselovej diferenciálnej rovnice v rôznych jej tvaroch. Riešenia tejto rovnice sú tzv. Besselove funkcie a preto riešenie týchto úloh sa vyjadruje spomenutými funkciami. Správne chápanie riešenia a jeho zmyslu nie je možné bez znalostí základných vlastností Besselových funkcií a z toho dôvodu venujeme výkladu teórie týchto funkcií príkladom ich použitia v tomto texte dost' miesta.

2.1 Besselova diferenciálna rovnica, Besselova funkcia prvého druhu

Diferenciálnu Besselovu rovnicu zaraďujeme do lineárnych diferenciálnych rovníc druhého rádu. Táto rovnica má tvar:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0 \quad (2.1.1)$$

Parameter ν môže mať ľubovoľnú hodnotu vo všetkých prípadoch. Riešenie tejto rovnice nemôže byť vyjadrené konečnou sumou elementárnych funkcií okrem veľmi špeciálnych prípadov. Integrovanie Besselovej rovnice vo všeobecnom prípade vyvolá zavedenie osobitného druhu funkcií, poznanie vlastností ktorých možno dosiahnuť cestou ich skúmania v podobe radov. Riešenia uvedenej rovnice nazývané Besselovými funkciami teda zavedieme v tvare nekonečných radov, čo je podstatou tzv. Frobeniovej metódy.

Predpokladajme, že funkcia $y(x)$, vyhovujúca Besselovej rovnici má tvar:

$$y(x) = x^p (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{p+j} \quad a_0 \neq 0.$$

Keď je táto funkcia riešením rovnice (2.1.1), tak po jej dosadení musí viesť k rovnosti. Dosadíme a dostaneme:

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j (p+j)(p+j-1) x^{p+j-2} + \sum_{j=0}^{\infty} a_j (p+j) x^{p+j-2} + \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{p+j} - \nu^2 \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{p+j-2} = 0. \quad (2.1.2)$$

Aby bola zachovaná rovnosť nule, je nevyhnutné položiť rovnými nule koeficienty všetkých mocnín x v ľavej časti poslednej rovnice. Najnižšou mocninou x je mocnina $p-2$, zodpovedajúca hodnote parametra $j=0$. Koeficientom tejto najnižšej mocniny x bude:

$$a_0 p(p-1) + a_0 p - \nu^2 a_0.$$

Pretože podľa podmienky $a_0 \neq 0$, tak je nevyhnutné pripustiť, aby:

$$p^2 - \nu^2 = 0,$$

odkiaľ máme:

$$p = \pm \nu.$$

Ako prvým sa budeme zaoberať možnosťou $p = +\nu$. Najprv si všimnime prípad, keď $j = 1$.

Najmenším exponentom v tomto prípade je $p - 1$ a koeficient tejto mocniny je:

$$a_1(p+1)p + a_1(p+1) - \nu^2 a_1 = a_1[(p+1)^2 - \nu^2].$$

Nakoľko $[(p+1)^2 - \nu^2]$ nie je rovné nule, tak pre rovnosť tohto koeficientu nule je nutné, aby $a_1 = 0$.

V poradí nasledujúca mocnina x je p . Koeficient s touto mocninou dostaneme ak položíme $j = 2$ vo všetkých sumách rovnice (2.1.2) okrem tretej. V tretej mocnine bude potrebné vziať člen, ktorý sme dostali pri $j = 0$. Preto hľadaný koeficient dostaneme v tvare:

$$a_2(p+2)(p+1) + a_2(p+2) + a_0 - \nu^2 a_2.$$

Aby sa však rovnal tento koeficient nule, dostaneme sa k rovnici:

$$a_2 = \frac{-a_0}{4(\nu+1)} = \frac{-a_0}{2^2(\nu+1)},$$

ktorý možno považovať za výraz umožňujúci nájsť koeficient a_2 pri známom a_0 . Môžeme získať rekurentný vzorec, keď položíme rovné nule koeficienty mocniny $(p+j-2)$. Keď nájdeme tento koeficient, dostaneme:

$$a_j(p+j)(p+j-1) + a_j(p+j) + a_{j-2} - \nu^2 a_j = \parallel \text{ak } p = \nu \parallel = a_j j(2n+j) + a_{j-2}.$$

Tento výraz položíme rovný nule a nahradíme a_i s a_{i-2} a dostaneme:

$$a_j = -\frac{a_{j-2}}{j(2\nu+j)}.$$

Z tohto vzorca môžeme súdiť, že všetky koeficienty s nepárnymi indexmi sú rovné nule, pretože keď $a_1 = 0$, tak v dôsledku toho aj a_3 a a_5 sú rovné nule. Koeficienty s párnymi indexmi môžeme zostaviť do nasledujúcej tabuľky:

$$\begin{aligned}
a_2 &= -\frac{a_0}{2^2(\nu+1)} \\
a_4 &= -\frac{a_2}{4(2\nu+4)} = \frac{a_0}{2^4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot (\nu+1)(\nu+2)} \\
a_6 &= -\frac{a_4}{6(2\nu+6)} = -\frac{a_0}{2^6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)} \\
&\dots\dots\dots \\
a_{2k} &= (-1)^k \frac{a_0}{2^{2k} \cdot k! (\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)\dots(\nu+k)}
\end{aligned}$$

Bližší pohľad na tabuľku koeficientov radu, ktorými sa vyjadruje riešenie Besselovej rovnice, ukazuje, že tento rad má premenné znamienka. Všetky koeficienty radu sa vyjadrujú koeficientom a_0 , ktorého hodnota môže byť v podstate volená ľubovoľne. Položme teda:

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}.$$

Z tejto podmienky máme

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{1}{2^{n+2k} \cdot k! (\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)\dots(\nu+k) \Gamma(\nu+1)}.$$

Vzhľadom na to, že k je celé číslo, tak časť výrazu v menovateli, s využitím rekurentnej vlastnosti gama funkcie, môžeme prepísať nasledovne:

$$(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)\dots(\nu+k) \Gamma(\nu+1) = \Gamma(\nu+k+1)$$

a možno koeficientu dať tvar:

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{1}{2^{\nu+2k} \cdot \Gamma(k+1) \Gamma(\nu+k+1)}.$$

Rad pre hľadanú funkciu $y(x)$ môže byť potom vyjadrený v tvare:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}}{\Gamma(k+1) \Gamma(\nu+k+1)}. \quad (2.1.3)$$

Funkcia $y(x)$ napísaná uvedeným radom, nazýva sa Besselovou funkciou prvého druhu, rádu ν a označuje sa symbolom $J_\nu(x)$. Takto teda máme:

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}}{\Gamma(k+1) \Gamma(\nu+k+1)} \quad (2.1.4)$$

V prípade, že ν nie je celým číslom, funkcia $\Gamma(\nu + k + 1)$, ako už poznáme z teórie gama funkcií, bude mať zmysel i pre záporné hodnoty ν . Preto, keď ν nie je celým číslom, druhým partikulárnym riešením Besselovej rovnice bude:

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(-\nu+k+1)} \quad (2.1.5)$$

a všeobecné riešenie tejto rovnice môže byť vyjadrené nasledovne:

$$y(x) = C_1 J_{\nu}(x) + C_2 J_{-\nu}(x), \quad (2.1.6)$$

kde sú C_1 a C_2 konštanty, dané podmienkami úlohy. Platnosť takéhoto zostavenia všeobecného riešenia je podmienená tým, že funkcie $J_{\nu}(x)$ a $J_{-\nu}(x)$ pri ν nerovnom celému číslu sú lineárne nezávislými. S tým je možné sa uspokojiť už aj preto, že najnižšia mocnina x v rade $J_{-\nu}(x)$ je $x^{-\nu}$, a súčasne, v rade $J_{\nu}(x)$ táto najnižšia mocnina x bude x^{ν} .

2.2 Besselove funkcie druhého druhu

Úloha sa komplikuje v tých prípadoch, keď ν je celé číslo. V tomto prípade členy v $J_{-\nu}(x)$ obsiahnuté v menovateli gama funkcie od záporných argumentov, stávajú sa nulovými a ostatné sa ukazujú číselne rovnými členom z $J_{\nu}(x)$. Skutočne, prvý nenulový člen $J_{-\nu}(x)$ bude mať tvar:

$$\frac{(-1)^{\nu} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2\nu}}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(-\nu+\nu+1)} = \frac{(-1)^{\nu} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(1)},$$

t.j. budú rovné prvému členu radu pre $J_{\nu}(x)$ násobenému (-1) . Druhý nenulový člen radu pre $J_{-\nu}(x)$:

$$\frac{(-1)^{\nu+1} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2\nu+2}}{\Gamma(\nu+2)\Gamma(-\nu+\nu+2)} = \frac{(-1)^{\nu+1} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2}}{\Gamma(\nu+2)\Gamma(2)},$$

odlišuje sa od druhého člena sumy pre $J_{\nu}(x)$:

$$-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2}}{\Gamma(\nu+2)\Gamma(2)},$$

len násobiteľom $(-1)^\nu$ a rozložením násobiteľov v menovateli. Presne podľa takéhoto postupu je vidieť, že i nasledujúce členy pre $J_\nu(x)$ a $J_{-\nu}(x)$ sa odlišujú iba násobiteľom $(-1)^\nu$. Takto sa funkcie $J_\nu(x)$ a $J_{-\nu}(x)$ pri n rovnom celému číslu, ukazujú byť lineárne závislé jedna s druhou $\left[J_{-\nu}(x) = (-1)^\nu J_\nu(x) \right]$ a preto k zostaveniu všeobecného riešenia Besselovej rovnice je treba získať novú funkciu, nenachádzajúcu sa v lineárnej závislosti s $J_\nu(x)$ – diferenciálna rovnica druhého rádu musí mať dve lineárne nezávislé riešenia.

Nájdenie takej funkcie možno dosiahnuť pripisovaním rôznych špeciálnych hodnôt konštantám C_1 a C_2 výrazu (2.1.6). Weberom bolo navrhnuté ako druhé partikulárne, lineárne nezávislé riešenie Besselovej rovnice, využiť funkciu:

$$Y_\nu = \frac{J_\nu(x) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}; \quad \nu \notin \mathbb{Z}. \quad (2.2.1)$$

Vidím, že výraz sa stáva neurčitým typu $0/0$ v prípade keď je $\nu = n \in \mathbb{Z}$ a preto je potrebné nájsť limitu pre $\nu \rightarrow n$ (pomocou L'Hospitalovho pravidla) a dostaneme:

$$Y_n = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial}{\partial n} J_n(x) - (-1)^n \frac{\partial}{\partial n} J_{-n}(x) \right]; \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2.2.2)$$

Dosadením posledného výrazu do originálnej Besselovej diferenciálnej rovnosti (2.1.1) sa dá ukázať, že jej vyhovuje a teda predstavuje lineárne nezávislé riešenie. Ďalej je však potrebné nájsť hodnoty $\frac{\partial}{\partial n} J_n(x)$ a $\frac{\partial}{\partial n} J_{-n}(x)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} J_n(x) &= \frac{\partial}{\partial n} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{k! \Gamma(n+k+1)} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{\Gamma(n+k+1)} \right] = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{k! \Gamma(n+k+1)} \left(\ln \frac{x}{2} - \frac{\Gamma'(n+k+1)}{\Gamma(n+k+1)} \right) \right]. \end{aligned}$$

Takto konečne dostaneme:

$$\frac{\partial}{\partial n} J_n(x) = J_n(x) \ln \frac{x}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{k!} \frac{\Gamma'(n+k+1)}{\Gamma^2(n+k+1)}. \quad (2.2.3)$$

Analogicky, pre $\frac{\partial}{\partial n} J_{-n}(x)$ dostaneme.

$$\frac{\partial}{\partial n} J_{-n}(x) = J_{-n}(x) \ln \frac{x}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k}}{\Gamma(-n+k+1)} \frac{\Gamma'(-n+k+1)}{\Gamma(-n+k+1)}. \quad (2.2.4)$$

Použijeme vlastnosť platnú pre $n \in \mathbb{Z}$: $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ a rozviníme sumu pravej časti na dve sumy: v prvej nebude člen $(-n+k+1)$ rovný nule a v druhej bude tento argument kladným a dostaneme:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} J_{-n}(x) &= J_{-n}(x) \ln \frac{x}{2} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k} \frac{\Gamma'(-n+k+1)}{\Gamma^2(-n+k+1)} + \\ &+ \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k} \frac{\Gamma'(-n+k+1)}{\Gamma^2(-n+k+1)}. \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Ďalej môžeme písať:

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma'(-n+k+1)}{\Gamma^2(-n+k+1)} &= -\frac{\partial}{\partial(-n+k+1)} \left[\frac{1}{\Gamma(-n+k+1)} \right] = \\ &= -\frac{\partial}{\partial(-n+k+1)} \left[\frac{\Gamma(1+n-k-1)}{\Gamma(-n+k+1)\Gamma(1+n-k-1)} \right] \end{aligned}$$

Výraz v poslednej zátvorke môže byť, v dôsledku známeho vzťahu (1.2.5):

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi},$$

zamenený výrazom

$$\frac{\sin[(-n+k+1)\pi]}{\pi} \Gamma(n-k).$$

Z toho ďalej dostaneme:

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma'(-n+k+1)}{\Gamma^2(-n+k+1)} &= -\frac{\partial}{\partial(-n+k+1)} \left[\frac{\sin[(-n+k+1)\pi]}{\pi} \Gamma(n-k) \right] = \\ &= \frac{-\pi \cos[(-n+k+1)\pi] \Gamma(n-k)}{\pi} - \frac{\sin[(-n+k+1)\pi]}{\pi} \cdot \frac{\partial(\Gamma(n-k))}{\partial(-n+k+1)} \end{aligned}$$

Pre $(-n+k+1) \in \mathbb{Z}$ je $\cos[(-n+k+1)\pi] = (-1)^{-n+k+1}$ a $\sin[(-n+k+1)\pi] = 0$ a preto:

$$\frac{\Gamma'(-n+k+1)}{\Gamma^2(-n+k+1)} = (-1)^{-n+k+1} \Gamma(n-k).$$

Preto prvá zo súm výrazu (2.2.5) prejde na:

$$(-1)^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k} \Gamma(n-k).$$

Druhú sumu zmeníme cestou zmeny parametra sumácie, pričom ho volíme tak, aby sa dosiahlo sumácie z hodnoty parametra rovného nule. K tomu stačí položiť $k = n + j$ a potom táto druhá suma bude:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+j}}{\Gamma(n+j+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2n+2j} \frac{\Gamma'(-n+n+j+1)}{\Gamma^2(-n+n+j+1)} = (-1)^n \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\Gamma(n+j+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2j} \frac{\Gamma'(j+1)}{\Gamma^2(j+1)}.$$

Takto konečne hľadané vyjadrenie výrazu $\frac{\partial}{\partial n} J_{-n}(x)$ je:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} J_{-n}(x) &= (-1)^{n+1} J_n(x) \ln \frac{x}{2} + (-1)^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k} \Gamma(n-k) + \\ &+ (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{\Gamma(n+k+1)} \frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma^2(k+1)}. \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

V poslednej sume sme písmeno j zamenili písmenom k . Nakoniec dosadíme výsledky derivovania (2.2.5) a (2.2.6) do rovnice (2.2.2) pre $Y_n(x)$ a dostaneme:

$$\begin{aligned} Y_n(x) &= \frac{2}{\pi} J_n(x) \ln \frac{x}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k} \Gamma(n-k) - \\ & - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{\Gamma(k+1) \Gamma(n+k+1)} \left[\frac{\Gamma'(n+k+1)}{\Gamma(n+k+1)} + \frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)} \right] \end{aligned}$$

Teraz použijeme vlastnosť (1.3.7) s označením (1.3.1):

$$\frac{\Gamma'(p+1)}{\Gamma(p+1)} = -\gamma + \sum_{m=1}^p \frac{1}{m}$$

a môžeme dať výrazu $Y_n(x)$ konečný vzhľad:

$$\begin{aligned} Y_n(x) &= \frac{2}{\pi} J_n(x) \ln \frac{x}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k} \\ & - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{k! (n+k)!} \left[-2\gamma + \sum_{m=1}^{n+k} \frac{1}{m} + \sum_{m=1}^k \frac{1}{m} \right]. \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

Táto funkcia, ktorá je zostavená ako čiastočné riešenie diferenciálnej rovnice Besselovej a je lineárne nezávislá s funkciou $J_n(x)$ sa nazýva Besselovou funkciou druhého druhu, rádu n ,

alebo aj Weberovou funkciou. Pri $n = 0$ je potrebné vynechať prvú konečnú sumu a špeciálne dostaneme:

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} J_0(x) \ln \frac{x}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2} \left[-\gamma + \sum_{m=1}^k \frac{1}{m} \right]. \quad (2.2.8)$$

Všeobecné riešenie Besselovej funkcie pri celej hodnote n môže byť vyjadrené pomocou funkcií $J_n(x)$ a $Y_n(x)$:

$$y(x) = C_1 J_n(x) + C_2 Y_n(x).$$

2.3 Besselove funkcie imaginárneho argumentu

V teórii karotáže sa vyskytujú Besselove funkcie osobitného druhu, ako výsledok riešenia rovnice:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0 \quad (2.3.1)$$

Rovnicu prevedieme na obyčajnú Besselovu tak, že za hodnotu x dosadíme $(-i\xi)$ (i je imaginárna jednotka). Potom:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d^2 y}{d(-i\xi)^2} = -\frac{d^2 y}{d\xi^2} \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{dy}{d(i\xi)} = -\frac{dy}{i d\xi} \end{aligned}$$

a rovnica (2.3.1) dostane vzhľad:

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dy}{d\xi} + \left(1 - \frac{\nu^2}{\xi^2}\right) y = 0.$$

Posledná rovnica pre $\nu \notin \mathbb{Z}$ má za čiastočné riešenie funkciu $J_\nu(\xi)$ a preto rovnica (2.3.1) má svoje čiastočné riešenie $J_\nu(ix)$. Takéto výrazy sa nazývajú aj modifikovanými Besselovými funkciami a značia sa symbolom $I_\nu(x)$, takže:

$$I_\nu(x) = J_\nu(ix) \quad (2.3.2)$$

Pre funkciu $I_\nu(x)$ možno získať výraz v tvare radu:

$$I_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k+1)} = i^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k+1)} = i^{-\nu} J_\nu(ix).$$

Je vidieť, že druhým partikulárnym riešením rovnice (2.3.1) by bolo $I_{-v}(x)$. Táto funkcia by však bola pre $v = n \in \mathbb{Z}$ lineárne závislou od $I_n(x)$, pretože $I_{-n}(x) = i^{-n} J_n(x) = I_n(x)$. Preto, pre $v = n \in \mathbb{Z}$, stráca funkcia $I_{-n}(x)$ zmysel existencie a preto treba nájsť iné, vhodnejšie partikulárne riešenie. Ako druhé, lineárne nezávislé riešenie sa vyberá (volí) funkcia:

$$K_n(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-n}(x) - I_n(x)}{\sin n\pi}. \quad (2.3.3)$$

Podobnými operáciami ako pri hľadaní funkcie $Y_n(x)$ by sme zistili, že:

$$K_n(x) = (-1)^{n+1} I_n(x) \cdot \ln \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k} + \frac{(-1)^n}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{k!(n+k)!} \left[-2\gamma + \sum_{m=0}^{n+k} \frac{1}{m} + \sum_{m=0}^k \frac{1}{m} \right]. \quad (2.3.4)$$

Všeobecným riešením rovnice (2.3.1) teda je:

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 I_v(x) + C_2 I_{-v}(x); & v \notin \mathbb{Z}, \text{ a} \\ y(x) &= C_1 I_n(x) + C_2 K_{-n}(x); & n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

2.4 Iné formy Besselových funkcií

V aplikácii Besselových funkcií na riešenie niektorých úloh elektrotechniky stretneme sa s Besselovými funkciami prvého druhu argumentu $\sqrt{-i} \cdot x$, kde i označuje imaginárnu jednotku. Funkcie takéhoto argumentu sú komplexné veličiny, majúce svojrázny vzhľad a dávajúce vznik osobitnej triede Besselových funkcií označovaných *ber* a *bei*, ktoré sa nazývajú aj Kelvinovými funkciami. Z funkcií tejto skupiny sa v praxi najčastejšie používajú iba funkcie nulového a prvého rádu. Aby sme získali obraz o týchto funkciách, oprieme sa o všeobecné vzorce Besselových funkcií prvého druhu a rozvineme do radov funkcie $J_0(x\sqrt{-i})$ a $J_1(x\sqrt{-i})$. Pre funkciu $J_0(x\sqrt{-i})$ dostaneme:

$$\begin{aligned}
J_0(x\sqrt{-i}) &= J_0(ix\sqrt{i}) = 1 - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2 (-1)i}{(1!)^2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4 (-1)}{(2!)^2} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6 i}{(3!)^2} + \dots = \\
&= \left[1 - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{(2!)^2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^8}{(4!)^2} - \dots \right] + i \left[\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{(1!)^2} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{(3!)^2} + \dots \right]
\end{aligned}$$

Tak isto pre funkciu $J_1(x\sqrt{-i})$ získame:

$$\begin{aligned}
J_1(x\sqrt{-i}) &= \frac{x}{2}\sqrt{-i} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^3 (-i\sqrt{-i})}{1/2!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^5 (-\sqrt{-i})}{2/3!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^7 (i\sqrt{-i})}{3/4!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^9 (\sqrt{-i})}{4/5!} - \dots \\
&= \sqrt{-i} \left[\frac{x}{2} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^5}{3/4!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^9}{4/5!} - \dots \right] + i \left[\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^3}{1/2!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^7}{3/4!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{11}}{5/6!} - \dots \right]
\end{aligned}$$

Pretože $\sqrt{-i} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$, tak posledný výraz môže byť vyjadrený v podobe:

$$\begin{aligned}
J_1(x\sqrt{-i}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{x}{2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^3}{1/2!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^5}{2/3!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^7}{3/4!} - \dots \right] + \\
&\quad \frac{i}{\sqrt{2}} \left[-\frac{x}{2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^3}{1/2!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^5}{2/3!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^7}{3/4!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^9}{4/5!} + \dots \right].
\end{aligned}$$

Reálne a imaginárne časti získaných výrazov dostali názov *ber* a *bei*:

$$ber_0 x = 1 - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{(2!)^2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^8}{(4!)^2} - \dots, \quad (2.4.1)$$

$$ber_1 x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{x}{2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^3}{1/2!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^5}{2/3!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^7}{3/4!} - \dots \right], \quad (2.4.2)$$

$$bei_0 x = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{(1!)^2} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{(3!)^2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{10}}{(5!)^2} - \dots, \quad (2.4.3)$$

$$bei_1 x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[-\frac{x}{2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^3}{1!2!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^5}{2!3!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^7}{3!4!} - \dots \right]. \quad (2.4.4)$$

V aplikácii sa stretáme tiež s deriváciami $\frac{d ber_0 x}{dx}$ a $\frac{d bei_0 x}{dx}$. Pre tieto dostaneme:

$$ber_0' x = \frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^3}{(2!)^2} + \frac{4\left(\frac{x}{2}\right)^7}{(4!)^2} - \frac{6\left(\frac{x}{2}\right)^{11}}{(6!)^2} + \dots = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^3}{1!2!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^7}{3!4!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{11}}{5!6!} + \dots, \quad (2.4.5)$$

$$bei_0' x = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)}{(1!)^2} - \frac{3\left(\frac{x}{2}\right)^5}{(3!)^2} + \frac{5\left(\frac{x}{2}\right)^9}{(5!)^2} - \dots = \frac{x}{2} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^5}{2!3!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^9}{4!5!} - \dots. \quad (2.4.6)$$

S použitím týchto vzťahov, môžeme písať:

$$J_0(x\sqrt{-i}) = ber_0 x + i bei_0 x, \quad (2.4.7)$$

$$J_1(x\sqrt{-i}) = ber_0' x + i bei_0' x = \sqrt{-i} (bei_0' x - i ber_0' x). \quad (2.4.8)$$

2.5 Besselove funkcie polocelého rádu

Budeme uvažovať o špeciálnej triede Besselových funkcií rádu $n + \frac{1}{2}$ kde $n \in \mathbb{Z}$.

V takomto prípade je možné vyjadriť Besselove funkcie pomocou elementárnych funkcií.

Demonštrovať to budeme na príklade funkcií $J_{\pm 1/2}(z)$. Položíme v rovnici (2.1.4) $\nu = \pm \frac{1}{2}$ a

s využitím výrazu (1.2.6) pre gama funkciu a rozvoja funkcie $\sin z$, dostaneme:

$$J_{1/2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}}}{\Gamma(k+1)\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)} = \left(\frac{2z}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z. \quad (2.5.1)$$

Podobne máme:

$$J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z. \quad (2.5.2)$$

Tvrdenie, že každá Besselova funkcia prvého druhu polocelého rádu môže byť vyjadrená pomocou elementárnych funkcií potom vyplýva z rekurencie (ktorú dokazujeme neskôr ako rovnicu (2.6.6)):

$$J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z} J_{\nu}(z).$$

Opakovaným používaním tejto vlastnosti dostaneme napr.:

$$J_{3/2}(z) = \frac{1}{z} J_{1/2}(z) - J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(\frac{\sin z}{z} - \cos z \right),$$

$$J_{-3/2}(z) = -\sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(\frac{\cos z}{z} + \sin z \right).$$

Tento postup je možné zovšeobecniť a dostaneme výraz:

$$J_{n+1/2}(z) = \frac{(-1)^n (2z)^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{d^n}{(dz^2)^n} \left(\frac{\sin z}{z} \right),$$

$$J_{-n-1/2}(z) = \frac{(-1)^n (2z)^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{d^n}{(dz^2)^n} \left(\frac{\cos z}{z} \right).$$
(2.5.3)

Podobným spôsobom je možné ukázať, že špeciálne:

$$Y_{1/2}(z) = -J_{-1/2}(z) = -\sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z,$$
(2.5.4)

$$I_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sinh z, \quad I_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cosh z, \quad K_{1/2}(z) = e^{-z}.$$
(2.5.5)

2.6 Základné vlastnosti Besselových funkcií reálneho argumentu

Pri riešení úloh aplikovanej geofyziky, v ktorých máme do činenia s Besselovými funkciami, budeme sa takmer vždy stretávať s funkciami celých rádov. Preto pri štúdiu vlastností Besselových funkcií sústredíme pozornosť práve na tieto funkcie

Na účely štúdia vlastností Besselových funkcií zavedieme pojem vytvárajúcej funkcie vo vzťahu k Besselovým funkciám, pričom túto funkciu určíme rovnicou:

$$u = e^{\frac{x}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right)}.$$
(2.6.1)

Predovšetkým dokážeme, že koeficienty radu rozvinutého podľa kladných a záporných mocnín t , vyjadrujúceho napísanú funkciu, sú Besselovými funkciami prvého druhu. Štúdium týchto koeficientov nám potom umožní pojednať o vlastnostiach Besselových funkcií.

Funkciu u vyjadríme v tvare:

$$u = e^{\frac{x}{2}t} e^{-\frac{x}{2}t},$$

a napíšeme Taylorov rad pre každý z členov:

$$e^{\frac{x}{2}t} = 1 + \frac{\frac{x}{2}t}{1!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2 t^2}{2!} + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^m t^m}{m!},$$

$$e^{-\frac{x}{2}t} = 1 - \frac{\frac{x}{2}t}{1!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2 t^2}{2!} - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^k t^k}{k!}.$$

Postupným vynásobením posledných dvoch rovníc dostaneme:

$$u = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{m+k} t^{m-k}}{k! m!}. \quad (2.6.2)$$

V tejto dvojitej sume veličiny m a k môžu mať ľubovoľné celé kladné hodnoty nezávisle jedna od druhej. Preto sa mocnina t môže meniť od $-\infty$ do $+\infty$.

Položme teraz:

$$n = m - k,$$

Z dvojitej sumy pre funkciu u teraz vyberieme len tie členy, pre ktoré menovateľ mocniny t je rovný n a dostaneme:

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{k! (n+k)!}.$$

V tomto koeficiente je ľahké poznať Besselovu funkciu prvého druhu, rádu n . Ako už bolo podotknuté, v dvojitej sume pre funkciu u , čísla m a k , môžu nezávisle na sebe nadobúdať ľubovoľných hodnôt a hodnota výrazu $(m-k)$, čo je mocnina premennej t (v rovnici (2.6.2)), môže sa meniť od $-\infty$ do $+\infty$. Preto rad pre funkciu u , rozvinutý podľa vzrastajúcich mocnín t , môžeme napísať v tvare:

$$u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n. \quad (2.6.3)$$

Toto vyjadrenie vytvárajúcej funkcie nám umožní poznať vlastnosti Besselových funkcií.

Vlastnosť 1

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x). \quad (2.6.4)$$

Z pôvodného vyjadrenia funkcie $u = e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}$ môžeme usúdiť, že sa táto funkcia nezmení, keď t zameníme za $-\frac{1}{t}$, a preto aj v jej vyjadrení vo forme radu podobná zámena musí viesť k identite. Prevedieme túto zámenu vo výraze (2.6.3) a dostaneme:

$$u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) (-1)^{-n} t^{-n} \quad (2.6.5)$$

Aby rovnice (2.6.3) a (2.6.5) boli rovnaké, potrebujeme rovnosť koeficientov nerovnakých mocnín t . Keď koeficientom stojacim pri t^{-n} vo výraze (2.6.5) bude funkcia $J_{-n}(x)$, tak z tohto bezprostredne vyplýva:

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x),$$

čo sme získali už v kapitole 2.2.

Vlastnosť 2

$$J_n(x) = \frac{x}{2n} [J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)] \quad (2.6.6)$$

Derivovaním výrazu (2.6.1) podľa t dostaneme:

$$\frac{du}{dt} = e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} \frac{x}{2} \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) = \frac{x}{2} \left[e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} + \frac{1}{t^2} e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} \right].$$

Zameníme výraz $u = e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}$ jeho vyjadrením podľa (2.6.3) a dostaneme:

$$\frac{du}{dt} = \frac{x}{2} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n + \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^{n-2} \right].$$

Na druhej strane, derivovaním výrazu (2.6.3) dostaneme:

$$\frac{du}{dt} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n J_n(x) t^{n-1}.$$

Pretože obidve posledné rovnice musia byť identické, nakoľko vznikli iba derivovaným rôznych vyjadrení tej istej funkcie, tak koeficienty pri rovnakých mocninách t obidvoch výrazov si musia byť rovné. Koeficientom pri t^{n-1} v prvom výraze, ako ľahko vidieť, je suma:

$$\frac{x}{2} [J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)],$$

a v druhom výraze koeficientom tej istej mocniny t bude:

$$n J_n(x).$$

Tieto koeficienty navzájom porovnáme a delíme obidve strany rovnice číslom n a dostaneme:

$$J_n(x) = \frac{x}{2n} [J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)]$$

čo bolo treba dokázať.

Dôsledok – použitím odvodeného vzorca, ľahko odstaneme:

$$J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) - J_{n-1}(x) \quad (2.6.7)$$

čo je výraz umožňujúci ľahko vyčísliť hodnotu funkcie ľubovoľného rádu, keď sú známe funkcie dvoch predchádzajúcich rádov toho istého argumentu. Položíme napr. $n=1$ a dostaneme:

$$J_2(x) = \frac{2}{x} J_1(x) - J_0(x),$$

teda k vyjadreniu $J_2(x)$ je potrebné poznať iba hodnoty $J_1(x)$ a $J_0(x)$. Z nájdenej hodnoty $J_2(x)$ vieme opätovným použitím dokázaného rekurentného vzorca získať hodnotu funkcie $J_3(x)$ atď.

Vlastnosť 3

$$J'_n(x) = \frac{1}{2} [J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)]. \quad (2.6.8)$$

Derivovaním podľa x funkcie u vo forme (2.6.1) a (2.6.3) dostaneme dva výrazy, ktoré musia byť totožné:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} \cdot \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t}\right), \\ \frac{du}{dx} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx} J_n(x) t^n. \end{aligned} \quad (2.6.9)$$

Prvú z tejto dvojice rovníc môžeme vyjadriť v tvare:

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2} t e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t} e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \frac{1}{2} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^{n+1} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^{n-1} \right]. \quad (2.6.10)$$

Vezmeme do úvahy už spomenutú totožnosť výrazov (2.6.9) a (2.6.10) a porovnáme koeficienty pri t^n v obidvoch výrazoch a to nám dá:

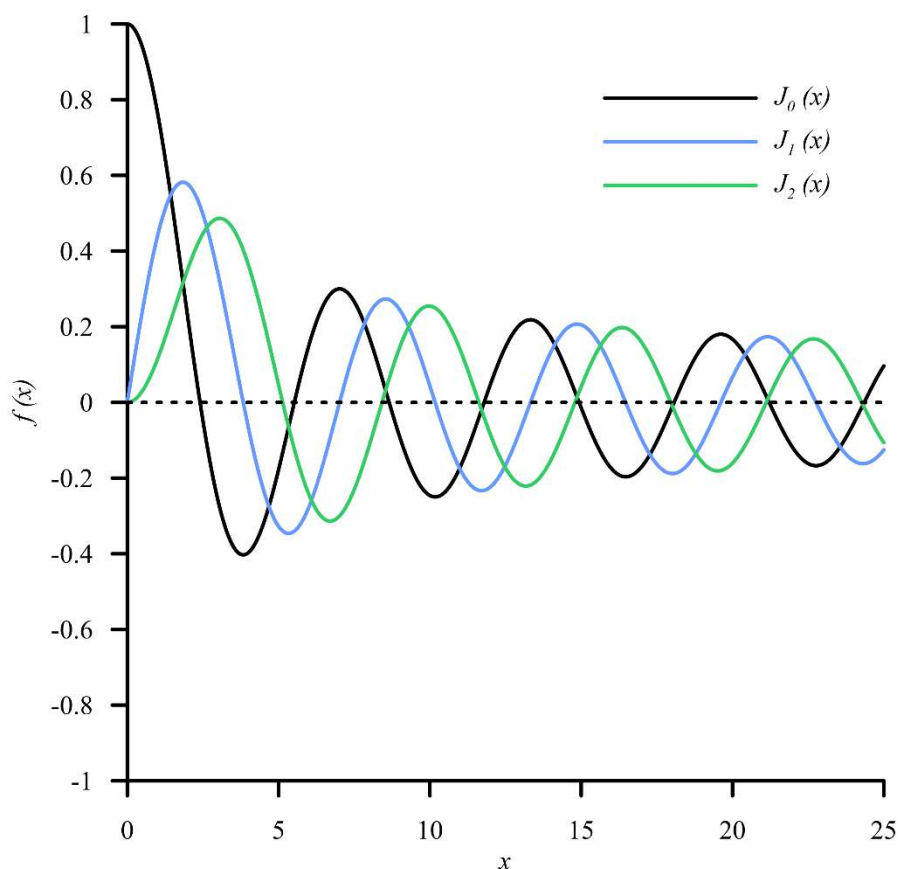
$$\frac{d}{dx} J_n(x) = \frac{1}{2} [J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)]$$

čo je vzorec umožňujúci určiť hodnoty prvej derivácie podľa argumentu, keď sú dané hodnoty funkcií predchádzajúceho i nasledujúceho rádu.

Dôsledok – položíme v poslednej rovnici $n = 0$ a zameníme $J_{-1}(x)$ za $J_1(x)$ v súlade s prvou vlastnosťou, dostaneme významný výraz pre Besselovu funkciu:

$$J'_0(x) = -J_1(x).$$

Vzorce, určujúce vlastnosti Besselových funkcií tu odvodené pre celé hodnoty n , možno zovšeobecniť i pre ostatné hodnoty tohto parametra. Grafy Besselových funkcií prvého druhu, nultého, prvého a druhého rádu sú ukázané na **Obr. 2**.



Obr. 2: Pribeh Besselových funkcií $J_0(x)$, $J_1(x)$ a $J_2(x)$.

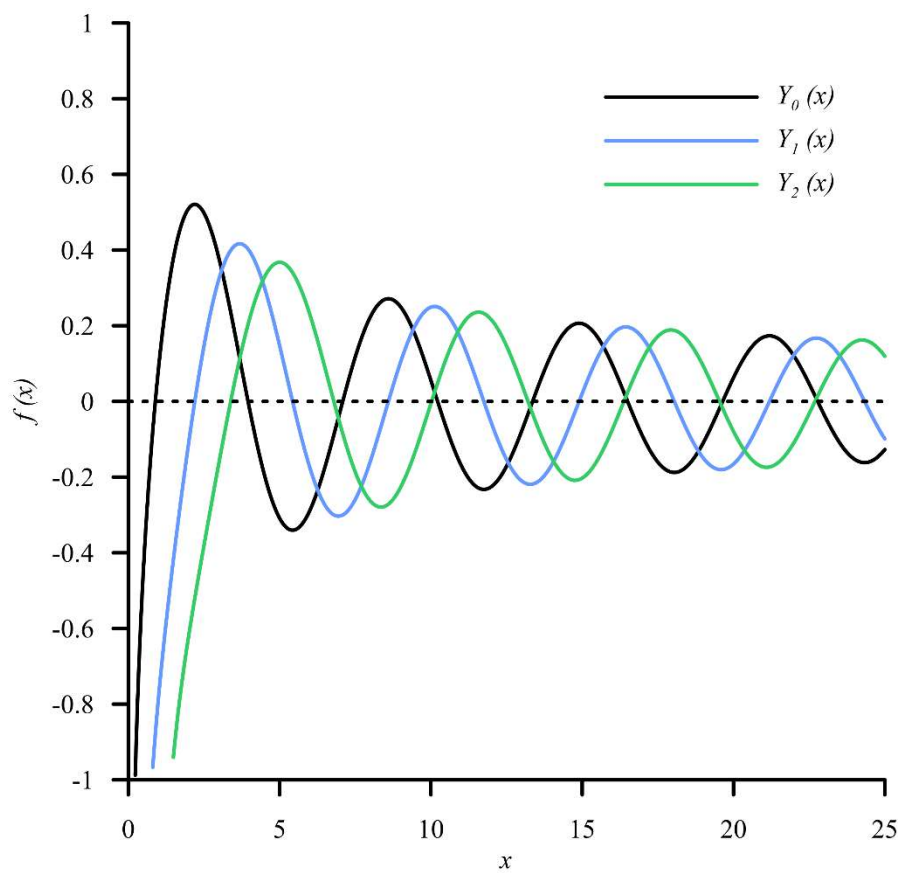
Vlastnosti funkcií $Y_n(x)$ sú v mnohom analogické vlastnostiam funkcií $J_n(x)$. Nebudeme sa tu zdržiavať ich štúdiom, nakoľko v aplikácii Besselových funkcií k riešeniu úloh aplikovanej geofyziky sa budeme s touto triedou funkcií zriedka stretávať. Obmedzíme sa preto len na niektoré vzorce:

$$Y_n(x) = \frac{x}{2n} [Y_{n-1}(x) + Y_{n+1}(x)],$$

$$\frac{d}{dx} Y_n(x) = \frac{1}{2} [Y_{n-1}(x) - Y_{n+1}(x)],$$

$$\frac{d}{dx} Y_n(x) = Y_{n-1}(x) - \frac{n}{x} Y_n(x).$$

Grafy Besselových funkcií druhého druhu, nultého, prvého a druhého rádu sú zobrazené na **Obr. 3**.



Obr. 3: Priebeh Besselových funkcií $Y_0(x)$, $Y_1(x)$ a $Y_2(x)$.

2.7 Základné vlastnosti Besselových funkcií imaginárneho argumentu

Vlastnosť 1

$$I_n(x) = I_{-n}(x), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2.7.1)$$

Z určenia funkcie $I_n(x)$:

$$I_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(n+k+1)} \quad (2.7.2)$$

vyplýva

$$I_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(-n+k+1)}. \quad (2.7.3)$$

Nakoľko funkcia $\Gamma(-n+k+1)$ sa stáva nekonečnou pri hodnote argumentu rovnému celému zápornému číslu alebo nule, tak preto sa v poslednej sume stávajú nulovými prvé členy do indexu $(n-1)$. To je podmienené tým, že pri $k \leq n-1$ argument $\Gamma(-n+k+1)$ bude celým záporným číslom alebo nulou. Preto sumu pre $I_{-n}(x)$ má zmysel začínať od hodnôt $k = n$. V takom prípade:

$$I_{-n}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(-n+k+1)}.$$

Zavedieme nový index sumácie m , zviazaný s indexom k výrazmi: $k = n + m$ a $(-n+k+1) = m+1$. Posledný výraz môžeme potom prepísať nasledovne:

$$I_{-n}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m}}{\Gamma(m+1)\Gamma(n+m+1)}.$$

V prvej časti tohto vzorca je ľahké poznať funkciu $I_n(x)$ a preto môžeme písať

$$I_n(x) = I_{-n}(x).$$

Vlastnosť 2

$$I_n(x) = \frac{x}{2n} [I_{n-1}(x) - I_{n+1}(x)]. \quad (2.7.4)$$

Podľa všeobecného vzorca pre $I_n(x)$ napíšeme:

$$\begin{aligned} I_{n-1}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k-1}}{\Gamma(k+1)\Gamma(n+k)}, \\ I_{n+1}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k+1}}{\Gamma(k+1)\Gamma(n+k+2)}. \end{aligned} \quad (2.7.5)$$

Odpočítavajúc postupne posledné rovnice jednu od druhej, dostaneme:

$$\begin{aligned} I_{n-1}(x) - I_{n+1}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k-1} \left[\frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(n+k)} - \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(n+k+2)} \right] = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k-1} \left[\frac{n+k-k}{\Gamma(k+1)\Gamma(n+k+1)} \right] \end{aligned}$$

s použitím dokázanej vlastnosti gama funkcie $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$. Takto môžeme prepísať výrazy pre hľadaný rozdiel v tvare:

$$I_{n-1}(x) - I_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k-1} \left[\frac{n}{\Gamma(k+1)\Gamma(n+k+1)} \right].$$

Vynásobením obidvoch strán $\frac{x}{2n}$ dostaneme:

$$\frac{x}{2n} [I_{n-1}(x) - I_{n+1}(x)] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(n+k+1)} = I_n(x),$$

čo dokazuje platnosť vyššie uvedeného predpokladu.

Vlastnosť 3

$$I'_n(x) = 2[I_{n-1}(x) + I_{n+1}(x)]. \quad (2.7.6)$$

Keď spočítame rovnice (2.7.5) a vezmeme členy s rovnakými mocninami $\left(\frac{x}{2}\right)$, dostaneme analogicky:

$$I_{n-1}(x) + I_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k-1} \left[\frac{n+2k}{\Gamma(k+1)\Gamma(n+k+1)} \right].$$

Ďalej, derivovaním rovnice (2.7.2) máme:

$$I'_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n+2k}{2} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k-1}}{\Gamma(k+1)\Gamma(n+k+1)}.$$

Lahko vidieť, že pravá časť poslednej rovnice sa odlišuje od pravej časti rovnice predchádzajúcej len povahou člena $\frac{1}{2}$, preto:

$$I'_n(x) = 2[I_{n-1}(x) + I_{n+1}(x)],$$

čo bolo potrebné dokázať.

Dôsledky odvodeného vzorca dostaneme, keď položíme $n=0$ a s využitím (2.7.1)

$$I_{-n}(x) = I_n(x):$$

$$I'_0(x) = I_1(x).$$

Treba podotknúť, že pri dôkazoch podmienok nebolo potrebné, aby n bolo celým číslom.

Analogické vlastnosti je možné dokázať aj pre funkciu $K_n(x)$. Vyjdeme z definície funkcie $K_n(x)$:

$$K_n(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-n}(x) - I_n(x)}{\sin n\pi},$$

a môžeme písať:

$$\begin{aligned} K_n(x) &= \frac{\pi}{2} \frac{-\frac{x}{2n} [I_{-(n+1)}(x) - I_{(n-1)}(x)] - \frac{x}{2n} [I_{n-1}(x) - I_{n+1}(x)]}{\sin n\pi} = \\ &= -\frac{x}{2n} \left[\frac{\pi}{2} \frac{I_{-(n+1)}(x) - I_{n+1}(x)}{\sin n\pi} - \frac{\pi}{2} \frac{I_{-(n-1)}(x) - I_{n-1}(x)}{\sin n\pi} \right]. \end{aligned}$$

Pretože okrem toho:

$$\sin(n+1)\pi = \sin n\pi \cos \pi + \sin \pi \cos n\pi = -\sin n\pi,$$

$$\sin(n-1)\pi = \sin n\pi \cos \pi - \sin \pi \cos n\pi = -\sin n\pi,$$

tak posledná rovnica môže byť prepísaná nasledovne.

$$\begin{aligned} K_n(x) &= -\frac{x}{2n} \left[-\frac{\pi}{2} \frac{I_{-(n+1)}(x) - I_{n+1}(x)}{\sin(n+1)\pi} + \frac{\pi}{2} \frac{I_{-(n-1)}(x) - I_{n-1}(x)}{\sin(n-1)\pi} \right] = \\ &= -\frac{x}{2n} [K_{n-1}(x) + K_{n+1}(x)]. \end{aligned}$$

Analogicky možno dokázať, že:

$$K'_n(x) = -\frac{1}{2} [K_{n-1}(x) + K_{n+1}(x)].$$

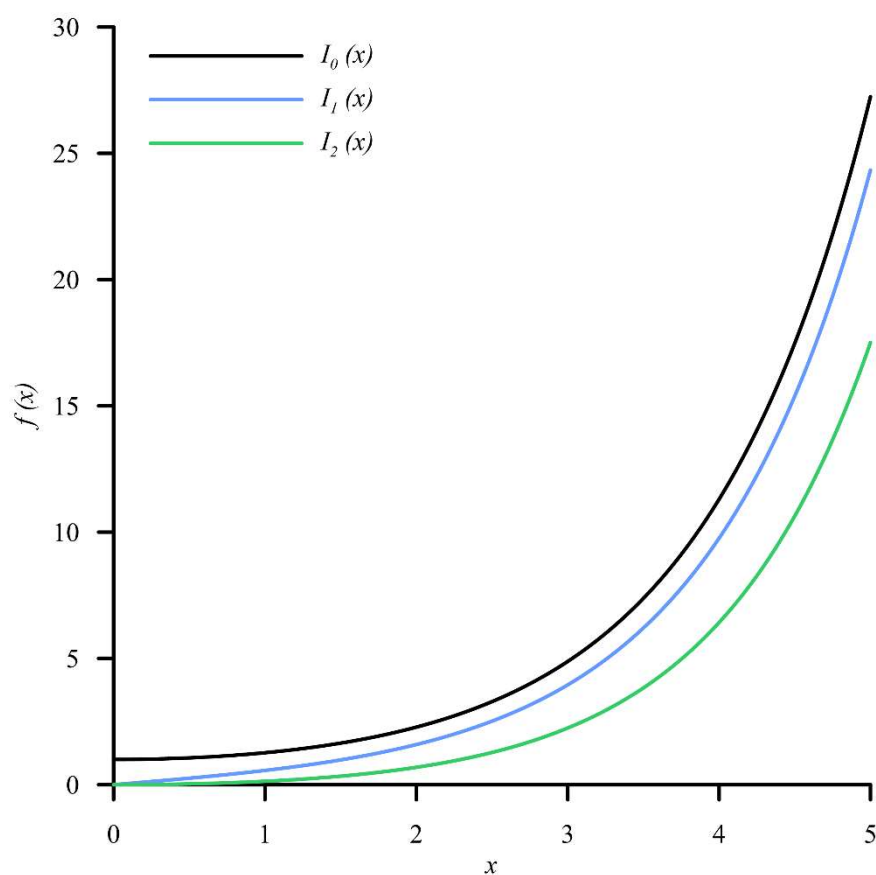
Dosadíme $n = 0$ a dostaneme:

$$K'_0(x) = -\frac{1}{2}[K_{-1}(x) + K_1(x)].$$

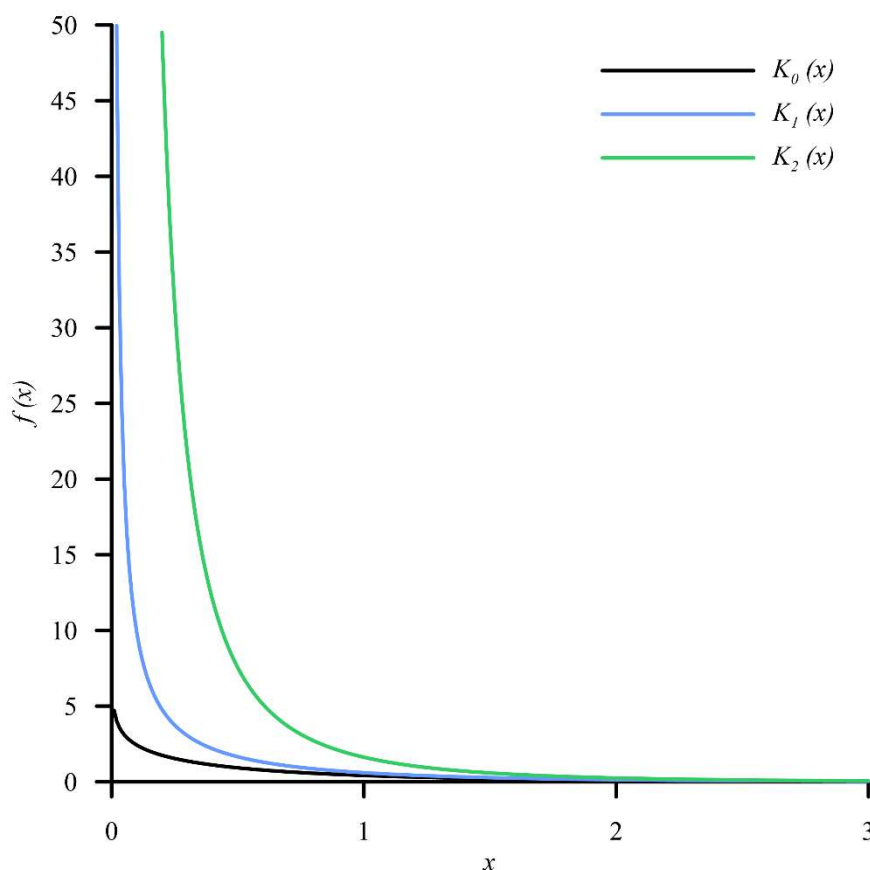
Pretože $K_{-1}(x) = K_1(x)$ o čom sa môžeme presvedčiť z definície funkcie $K_n(x)$, tak konečne:

$$K'_0(x) = -K_1(x).$$

Grafy týchto typov Besselových funkcií (nultého, prvého a druhého rádu) sú zobrazené na **Obr. 4** a **Obr. 5**.



Obr. 4: Priebeh Besselových funkcií $I_0(x)$, $I_1(x)$ a $I_2(x)$.



Obr. 5: Priebeh Besselových funkcií $K_0(x)$, $K_1(x)$ a $K_2(x)$.

2.8 Integrálne vzorce pre Besselove funkcie

Vo výraze určujúcom vytvárajúcu funkciu:

$$u = e^{\frac{x}{2}t} e^{-\frac{x}{2} \frac{1}{t}},$$

položíme $t = e^{i\varphi}$. V takom prípade, s prihliadnutím, že funkcia u môže byť vyjadrená radom (2.6.3), budeme oprávnení napísať:

$$u = e^{\frac{x}{2}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) e^{in\varphi}.$$

S využitím Eulerovho vzorca pre $\sin \varphi$, môžeme túto rovnicu vyjadriť:

$$u = e^{ix \sin \varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) e^{in\varphi}.$$

Obe strany poslednej rovnice vynásobíme výrazom $e^{-ik\varphi} d\varphi$ a integrujeme v hraniciach 0 až 2π :

$$\int_0^{2\pi} e^{i(x \sin \varphi - k\varphi)} d\varphi = \int_0^{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) e^{i(n-k)\varphi} d\varphi.$$

Pravú stranu rovnice integrujeme *per partes* a vzhľadom na vlastnosti:

$$\int_0^{2\pi} e^{i(n-k)\varphi} d\varphi = \begin{cases} 0 & k \neq n \\ 2\pi & k = n \end{cases}$$

dostaneme:

$$\int_0^{2\pi} e^{i(x \sin \varphi - n\varphi)} d\varphi = 2\pi J_n(x),$$

z čoho:

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(x \sin \varphi - n\varphi)} d\varphi. \quad (2.8.1)$$

Keď budeme číslo x považovať za reálne a integrovanú funkciu opäť rozložíme pomocou Eulerovho vzorca, môžeme porovnať reálnu zložku tohto rozkladu s ľavou časťou rovnice (2.8.1) a dostaneme:

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(x \sin \varphi - n\varphi) d\varphi, \quad (2.8.2)$$

alebo

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin \varphi - n\varphi) d\varphi. \quad (2.8.3)$$

V poslednom výraze položíme $n = 0$ a dostaneme:

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin \varphi) d\varphi,$$

čo môžeme ďalej prepísať nasledovne:

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin \varphi) d\varphi \quad (2.8.4)$$

Zavedieme novú premennú vzťahom $\sin \varphi = v$ z čoho $d\varphi = \frac{dv}{\cos \varphi}$ a dostaneme pre ďalšie

kroky dôležitý vzorec:

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos(vx)}{\sqrt{1-v^2}} dv. \quad (2.8.5)$$

Vzorec analogického tvaru môžeme dostať pre funkciu $I_0(x)$. Pri dôkaze sa vrátíme k výrazu (2.8.4):

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin \varphi) d\varphi.$$

Vďaka párnosti funkcie kosínus, posledný výraz môže byť vyjadrený nasledovne:

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin \varphi) d\varphi.$$

K pravej časti pripočítame nulu v tvare integrálu z vhodnej nepárnej funkcie na symetrickom intervale:

$$\begin{aligned} J_0(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin \varphi) d\varphi - i \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x \sin \varphi) d\varphi = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\cos(x \sin \varphi) - i \sin(x \sin \varphi)] d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-ix \sin \varphi} d\varphi. \end{aligned}$$

V poslednej rovnici zameníme x za ix a potom, pretože $J_0(ix) = I_0(x)$, dostaneme:

$$I_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{x \sin \varphi} d\varphi.$$

Nakoniec urobíme substitúciu $\sin \varphi = v$, pričom $d\varphi = \frac{dv}{\cos \varphi} = \frac{dv}{\sqrt{1-v^2}}$, a dostaneme konečný výraz:

$$I_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{e^{xv}}{\sqrt{1-v^2}} dv. \quad (2.8.6)$$

Podobný výraz pre funkciu $K_0(x)$ môže byť získaný zložitejším spôsobom v tvare:

$$K_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_1^\infty \frac{e^{-xv}}{\sqrt{v^2-1}} dv. \quad (2.8.7)$$

Ešte uvedieme bez odvodu integrálny výraz pre funkciu $Y_0(x)$:

$$Y_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_1^\infty \frac{\cos xv}{\sqrt{v^2-1}} dv. \quad (2.8.8)$$

V teórii Besselových funkcií má veľký význam ešte jedno ich integrálne vyjadrenie (pre Besselove funkcie prvého druhu). Budeme opäť vychádzať z vytvárajúcej funkcie (2.6.3):

$$u = e^{\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n.$$

Dosadíme $t = ie^{-ig}$ a potom posledný výraz prejde do tvaru:

$$e^{\frac{ix}{2}(e^{-i\vartheta} + e^{i\vartheta})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) i^n e^{-in\vartheta}.$$

Obidve strany rovnice vynásobíme $e^{-in\vartheta} d\vartheta$ a integrujeme podľa ϑ od 0 do 2π . V pravej časti po integrácii zmiznú všetky členy okrem jedného, nakoľko:

$$\int_0^{2\pi} e^{-i(n-m)\vartheta} d\vartheta = \begin{cases} 0 & \text{ak } n \neq m \\ 2\pi & \text{ak } n = m \end{cases}.$$

Preto dostaneme:

$$i^n J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \cos \vartheta} e^{in\vartheta} d\vartheta.$$

Časť integrovanej funkcie môžeme vyjadriť goniometrickými funkciami:

$$\begin{aligned} i^n J_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \cos \vartheta} (\cos n\vartheta + i \sin n\vartheta) d\vartheta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \cos \vartheta} \cos n\vartheta d\vartheta + \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \cos \vartheta} \sin n\vartheta d\vartheta. \end{aligned} \quad (2.8.9)$$

Teraz ukážme, že druhý integrál v pravej časti rovnice je rovný nule:

$$\frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \cos \vartheta} \sin n\vartheta d\vartheta = \frac{i}{2\pi} \left[\int_0^{\pi} e^{ix \cos \vartheta} \sin n\vartheta d\vartheta + \int_{\pi}^{2\pi} e^{ix \cos \vartheta} \sin n\vartheta d\vartheta \right].$$

V druhom integráli zavedieme novú premennú φ vzťahom $\varphi = 2\pi - \vartheta$, z čoho $\cos \vartheta = \cos \varphi$ a $\sin(n\vartheta) = -\sin(n\varphi)$, $d\vartheta = -d\varphi$ a nakoniec dostaneme:

$$\int_0^{2\pi} e^{ix \cos \vartheta} \sin n\vartheta d\vartheta = \int_{\pi}^0 e^{ix \cos \varphi} \sin n\varphi d\varphi = - \int_0^{\pi} e^{ix \cos \varphi} \sin n\varphi d\varphi.$$

Zmenou označenia integračnej premennej $\varphi = \vartheta$ môžeme posledný integrál napísať v tvare:

$$- \int_0^{\pi} e^{ix \cos \vartheta} \sin n\vartheta d\vartheta.$$

Takto môžeme považovať naše tvrdenie o rovnosti druhého integrálu v rovnici (2.8.9) nule za dokázané. Preto bude platiť rovnica:

$$i^n J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \cos \vartheta} \cos n\vartheta d\vartheta. \quad (2.8.10)$$

2.9 Určité integrály s Besselovými funkciami

V aplikácii Besselových funkcií k riešeniu niektorých úloh aplikovanej geofyziky sa často vyskytujú určité integrály výrazov, obsahujúcich tieto funkcie. K najdôležitejším integrálom tohto typu sa radí aj Weberov – Lipschitzov integrál. Tento integrál sa uvádza v dvoch tvaroch:

$$\int_0^{\infty} e^{-zx} J_0(rx) dx = \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}}, \quad (2.9.1)$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(zx) K_0(rx) dx = \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}}. \quad (2.9.2)$$

Pri dokazovaní prvého vzorca si pomôžeme integrálnym vyjadrením pre funkciu $J_0(rx)$, ktorá, ako už vieme, má tvar:

$$J_0(rx) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(rx \sin \varphi) d\varphi.$$

Dosadíme tento výraz do ľavej časti dokazovaného vzorca a dostaneme:

$$\int_0^{\infty} e^{-zx} J_0(rx) dx = \int_0^{\infty} e^{-zx} \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(rx \sin \varphi) d\varphi \right) dx,$$

alebo, po zamenení poradia integrovania:

$$\int_0^{\infty} e^{-zx} J_0(rx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\infty} e^{-zx} \cos(rx \sin \varphi) dx.$$

Riešime integrál podľa x , a s použitím Eulerovho vzorca dostaneme:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-zx} J_0(rx) dx &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\infty} e^{-zx} \frac{e^{irx \sin \varphi} + e^{-irx \sin \varphi}}{2} dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\infty} e^{-zx} (e^{irx \sin \varphi} + e^{-irx \sin \varphi}) dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} d\varphi \left[\frac{e^{(-z+ir \sin \varphi)x}}{-z+ir \sin \varphi} + \frac{e^{(-z-ir \sin \varphi)x}}{-z-ir \sin \varphi} \right]_0^{\infty} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} d\varphi \left[\frac{1}{z-ir \sin \varphi} + \frac{1}{z+ir \sin \varphi} \right] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{2z d\varphi}{z^2 + r^2 \sin^2 \varphi} = \frac{z}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{z^2 + r^2 \sin^2 \varphi}. \end{aligned}$$

Posledný integrál môže byť riešený nasledovným spôsobom:

$$\frac{z}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{z^2 + r^2 \sin^2 \varphi} = \frac{2z}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{z^2 + r^2 \sin^2 \varphi},$$

nakolko integrovaná funkcia je párna. Dosadíme $tg \varphi = t$, pričom

$$d\varphi = \cos \varphi dt = \frac{dt}{1+tg^2 \varphi} = \frac{dt}{1+t^2}, \quad \sin^2 \varphi = \frac{tg^2 \varphi}{1+tg^2 \varphi} = \frac{t^2}{1+t^2} \text{ a dostaneme:}$$

$$\begin{aligned} \frac{z}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\varphi}{z^2 + r^2 \sin^2 \varphi} &= \frac{2z}{\pi} \int_0^\infty \frac{dt}{z^2 + (r^2 + z^2)t^2} = \frac{2z}{\pi} \left[\frac{1}{z\sqrt{z^2 + r^2}} \arctg t \cdot \sqrt{\frac{z^2 + r^2}{z^2}} \right]_0^\infty = \\ &= \frac{2z}{\pi} \frac{1}{z\sqrt{z^2 + r^2}} \frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{z^2 + r^2}} \end{aligned}$$

čím je dôkaz ukončený.

Druhý z uvedených vzorcov ((2.9.2)) možno vyvodit' analogickým spôsobom. Do ľavej časti dosadíme $K_0(rx)$ v integrálnom tvare (2.8.7):

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty K_0(rx) \cos(zx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos(zx) dx \int_1^\infty \frac{e^{-rxv}}{\sqrt{v^2 - 1}} dv,$$

a zameníme poradie integrovania

$$\frac{2}{\pi} \int_1^\infty \frac{dv}{\sqrt{v^2 - 1}} \int_0^\infty e^{-rxv} \cos(zx) dx.$$

Použijeme rovnaký spôsob integrácie, aký sme použili pri odvodení predchádzajúceho vzorca:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty K_0(rx) \cos(zx) dx = \frac{r}{\pi} \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{v^2 - 1}} \left(\frac{1}{rv - iz} + \frac{1}{rv + iz} \right) dv = \frac{r}{\pi} \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{v^2 - 1}} \frac{1}{r^2 v^2 + z^2} dv.$$

Posledný integrál typu $\int \frac{dt}{(at+b)\sqrt{t-1}}$ riešime s dosadením $\sqrt{t-1} = y$, pričom

$$dt = 2ydy, at + b = a(t-1) + a + b = ay^2 + (a+b) \text{ a integrál dostane tvar:}$$

$$\int \frac{2ydy}{[(a+b) + ay^2]y} = 2 \int \frac{dy}{a+b+ay^2} = \frac{2}{\sqrt{a}\sqrt{a+b}} \arctg \sqrt{\frac{a}{a+b}} y.$$

Vrátime sa k pôvodnej premennej a dosadíme hranice:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty K_0(rx) \cos(zx) dx = \frac{r}{\pi} \left(\frac{2}{r\sqrt{r^2 + z^2}} \arctg \frac{r}{\sqrt{r^2 + z^2}} \sqrt{v^2 - 1} \right)_0^\infty = \frac{r}{\pi} \frac{2}{r\sqrt{r^2 + z^2}} \frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}}$$

čo bolo potrebné dokázať.

Keď vo vzorci (2.9.1) dosadíme $z = ai$, tak ho bude možné vyjadriť vo dvoch tvaroch:

$$\int_0^\infty e^{-iax} J_0(rx) dx = \frac{1}{\sqrt{r^2 - a^2}}, \quad (2.9.3)$$

pri $r > a$ alebo

$$\int_0^{\infty} e^{-iax} J_0(rx) dx = -\frac{i}{\sqrt{a^2 - r^2}} \quad (2.9.4)$$

keď $r < a$. S použitím Moivrovho vzorca, môžeme posledný výraz prepísať:

$$\int_0^{\infty} J_0(rx) (\cos ax - i \sin ax) dx = \frac{1}{\sqrt{r^2 - a^2}}, \quad r > a,$$

alebo

$$\int_0^{\infty} J_0(rx) (\cos ax - i \sin ax) dx = -\frac{i}{\sqrt{a^2 - r^2}}, \quad r < a,$$

z čoho sa bezprostredne odvodlia tzv. Weberove nespojité integrály:

$$\int_0^{\infty} J_0(rx) \cos ax dx = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{r^2 - a^2}}, & \text{ak } r > a \\ 0, & \text{ak } r < a \end{cases}, \quad (2.9.5)$$

$$\int_0^{\infty} J_0(rx) \sin ax dx = \begin{cases} 0, & \text{ak } r > a \\ \frac{1}{\sqrt{a^2 - r^2}}, & \text{ak } r < a \end{cases}. \quad (2.9.6)$$

Nakoniec derivovanie výrazu (2.9.1) podľa z a podľa r nám dá ešte dva dôležité výrazy pre aplikáciu:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x e^{-zx} J_0(rx) dx &= \frac{z}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ \int_0^{\infty} x e^{-zx} J_1(rx) dx &= \frac{r}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned} \quad (2.9.7)$$

V niektorých použitíach Besselových funkcií k riešeniu aplikovanej geofyziky sa stretneme s integrálom:

$$L = \int_0^{\infty} e^{-zx} J_1(rx) dx, \quad (2.9.8)$$

alebo po zámene poradia integrovania,

$$L = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\infty} e^{-zx} \cos(rx \sin \varphi - \varphi) dx.$$

Funkciu $\cos(rx \sin \varphi - \varphi)$ prepíšeme podľa Eulerovho vzorca:

$$L = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\varphi \int_0^\infty e^{-zx} \frac{e^{irx \sin \varphi} + e^{-irx \sin \varphi}}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi d\varphi \left[e^{-i\varphi} \int_0^\infty e^{-(z-ir \sin \varphi)x} dx + e^{i\varphi} \int_0^\infty e^{-(z+ir \sin \varphi)x} dx \right].$$

Riešime integrál v hranatých zátvorkách:

$$L = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi d\varphi \left[e^{-i\varphi} \left(\frac{e^{-(z-ir \sin \varphi)x}}{-(z-ir \sin \varphi)} \right)_0^\infty + e^{i\varphi} \left(\frac{e^{-(z+ir \sin \varphi)x}}{-(z+ir \sin \varphi)} \right)_0^\infty \right],$$

alebo, po dosadení hraníc:

$$L = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left(\frac{e^{-i\varphi}}{z-ir \sin \varphi} + \frac{e^{i\varphi}}{z+ir \sin \varphi} \right) d\varphi.$$

Keď teraz výraz v okrúhlych zátvorkách uvedieme na spoločného menovateľa, dostaneme:

$$L = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left(\frac{(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})z - ir \sin \varphi (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})}{z^2 + r^2 \sin^2 \varphi} \right) d\varphi,$$

alebo, po použití Eulerovho vzorca:

$$L = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{z \cos \varphi + r \sin^2 \varphi}{z^2 + r^2 \sin^2 \varphi} \right) d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{z \cos \varphi}{z^2 + r^2 \sin^2 \varphi} d\varphi + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{r \sin^2 \varphi}{z^2 + r^2 \sin^2 \varphi} d\varphi. \quad (2.9.9)$$

Prvý z integrálov v pravej časti rovnice môže byť napísaný nasledovne:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{z \cos \varphi}{z^2 + r^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = \frac{z}{\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \varphi}{z^2 + r^2 \sin^2 \varphi} d\varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{\cos \varphi}{z^2 + r^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \right].$$

Keď v druhom z integrálov dosadíme za premennú φ premennú Ψ , tak, že spolu súvisia vzťahom $\psi = \pi - \varphi$, pričom $d\varphi = -d\psi$ a $\cos \varphi = \cos(\pi - \psi) = -\cos \psi$ a $\sin \varphi = \sin(\pi - \psi) = \sin \psi$, dostaneme:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{\cos \varphi}{z^2 + r^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos \varphi}{z^2 + r^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \psi}{z^2 + r^2 \sin^2 \psi} d\psi.$$

Pretože v odvodenom integráli možno zamieňať označenie premennej podľa ktorej integrujeme, dostaneme:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{z \cos \varphi}{z^2 + r^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = \frac{z}{\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \varphi}{z^2 + r^2 \sin^2 \varphi} d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \varphi}{z^2 + r^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \right] = 0. \quad (2.9.10)$$

Druhý integrál rovnice (2.9.9) sa môže získať dosadením $tg\varphi = z$, pričom

$$d\varphi = \cos^2 \varphi dt, \cos^2 \varphi = \frac{1}{1+t^2}, \sin^2 \varphi = \frac{t^2}{1+t^2} \text{ a dostaneme:}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{r \sin^2 \varphi}{z^2 + r^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r \sin^2 \varphi}{z^2 + r^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = \frac{2r}{\pi} \int_0^\infty \frac{t^2}{(1+t^2)[z^2 + (z^2 + r^2)t^2]} dt.$$

Metódou neurčitých koeficientov môžeme posledný integrál vyjadriť takto:

$$\frac{2r}{\pi} \int_0^\infty \frac{t^2}{(1+t^2)[z^2 + (z^2 + r^2)t^2]} dt = \frac{2r}{\pi} \left[\frac{1}{r^2} \int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2)} - \frac{z^2}{r^2} \int_0^\infty \frac{dt}{z^2 + (z^2 + r^2)t^2} \right].$$

Prvý z integrálov pravej časti sa je tabuľkový a hodnotu druhého sme už našli pri odvodení

Weberových – Lipschitzových vzorcov $\left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{z\sqrt{z^2 + r^2}} \right)$. Preto:

$$\frac{2r}{\pi} \int_0^\infty \frac{t^2}{(1+t^2)[z^2 + (z^2 + r^2)t^2]} dt = \frac{2}{\pi r} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \frac{\pi}{2} \right] = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right). \quad (2.9.11)$$

Po dosadení hodnôt integrálov (2.9.10) a (2.9.11) do vzorca (2.9.9) konečne dostaneme:

$$\int_0^\infty e^{-zx} J_1(rx) dx = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right). \quad (2.9.12)$$

Integrovaním Weberovho – Lipschitzovho vzorca podľa z od 0 do z , dostaneme pre ľavú časť:

$$\int_0^z \int_0^\infty e^{-zx} J_0(rx) dx dz = \int_0^\infty J_0(rx) dx \int_0^z e^{-zx} dz = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-zx}}{x} J_0(rx) dx,$$

a pre pravú:

$$\int_0^z \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} dz = \ln \frac{z + \sqrt{r^2 + z^2}}{r}.$$

Preto môžeme napísať rovnicu:

$$\int_0^\infty \frac{1 - e^{-zx}}{x} J_0(rx) dx = \ln \frac{z + \sqrt{r^2 + z^2}}{r}.$$

Dosadíme v nej $z = ia$ a dostaneme:

$$\int_0^\infty \frac{1 - e^{-iax}}{x} J_0(rx) dx = \begin{cases} \ln \frac{ia + \sqrt{r^2 - a^2}}{r}, & \text{pre } a < r \\ \ln \frac{ia + \sqrt{a^2 - r^2}}{r}, & \text{pre } a > r \end{cases}$$

Keď integrál v ľavej časti posledných rovníc vyjadríme v tvare:

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos ax + i \sin ax}{x} J_0(rx) dx$$

a prepíšeme ich pravé časti použitím vzťahov $\ln(x+iy) = \ln\sqrt{x^2+y^2} + i \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ a

$\ln ix = \ln x + i \frac{\pi}{2}$ dostaneme:

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos ax + i \sin ax}{x} J_0(rx) dx = \begin{cases} 1 + i \operatorname{arctg} \frac{a}{\sqrt{r^2 - a^2}} = 1 + i \operatorname{arcsin} \frac{a}{r}, & \text{pre } a < r \\ \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - r^2}}{r} + i \frac{\pi}{2}, & \text{pre } a > r. \end{cases}$$

Porovnaním reálnych a imaginárnych častí týchto rovníc medzi sebou pridáme ku vzťahom:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos ax}{x} J_0(rx) dx &= \begin{cases} 1, & \text{pre } a < r \\ \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - r^2}}{r}, & \text{pre } a > r \end{cases} \\ \int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} J_0(rx) dx &= \begin{cases} \operatorname{arcsin} \frac{a}{r}, & \text{pre } a < r \\ \frac{\pi}{2}, & \text{pre } a > r. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.9.13)$$

V týchto vzorcoch predpokladajme, že a a r sú kladné.

Analogicky, integrovaním podľa x od z do ∞ obidvoch častí rovnice:

$$\int_0^{\infty} e^{-zx} J_1(rx) dx = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + r^2}} \right),$$

dostaneme:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-zx}}{x} J_1(rx) dx = \frac{1}{r} \left[z - \sqrt{z^2 + r^2} \right]_z^{\infty}.$$

Pri dosadení hornej hranice v pravej časti dosiahneme neurčitosti, ktorú keď riešime nájdeme, že hodnota rozdielu v hranatej zátvorke pri tejto hranici rovná nule. V takomto prípade:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-zx}}{x} J_1(rx) dx = \frac{\sqrt{z^2 + r^2} - z}{r}.$$

Keď dosadíme $z = ia$, kde a je kladné číslo, dostaneme:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-iax}}{x} J_1(rx) dx = \begin{cases} \frac{\sqrt{r^2 - a^2} - ia}{r}, & \text{pri } a < r \\ i \frac{\sqrt{a^2 - r^2} - a}{r}, & \text{pri } a > r. \end{cases} \quad (2.9.14)$$

Po dosadení za e^{-iax} veličiny $\cos ax$ a $\sin ax$, dosiahneme podobne, ako sme spravili v predchádzajúcom prípade:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{x} J_1(rx) dx &= \begin{cases} \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r}, & \text{pre } a < r \\ 0, & \text{pre } a > r \end{cases} \\ \int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} J_1(rx) dx &= \begin{cases} \frac{a}{r}, & \text{pre } a < r \\ \frac{\sqrt{a^2 - r^2} - a}{r}, & \text{pre } a > r \end{cases}. \end{aligned} \quad (2.9.15)$$

Nakoniec ešte získame niekoľko špeciálnych výrazov určitých integrálov s Besselovými funkciami, keď dosadíme $z = 0$ do Weberovho – Lipschitzovho vzorca a vzorca (2.9.1). Prvý vzorec v tomto prípade bude:

$$\int_0^{\infty} J_0(rx) dx = \frac{1}{r}, \quad (2.9.16)$$

alebo pri $r = 1$

$$\int_0^{\infty} J_0(x) dx = 1, \quad (2.9.17)$$

Analogicky zo vzorca (2.9.12) dostaneme:

$$\int_0^{\infty} J_1(rx) dx = \frac{1}{r} \quad \text{a} \quad \int_0^{\infty} J_1(x) dx = 1.$$

2.10 Diferenciálne rovnice vedúce k Besselovým rovniciam

V predošlom texte sme sa stretli s jedným tvarom diferenciálnej rovnice, zhodným s Besselovou rovnicou, ktorú sme potrebovali k definovaniu funkcií $I(x)$ a $K(x)$. Tu sa budeme zaoberať radom ďalších rovníc, vedúcich k Besselovým rovniciam v ich základnom tvare.

V Besselovej rovnici

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0,$$

ktorej partikulárnym riešením je funkcia $J_n(x)$, zavedieme novú funkciu vzťahom $y = \frac{z}{\sqrt{x}}$.

V takom prípade je

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{z}{2x\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{dz}{dx}$$

a

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{3}{4} \frac{z}{x^2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} \frac{dz}{dx} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} \frac{dz}{dx} + \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{d^2z}{dx^2} = \\ &= \frac{3}{4} \frac{z}{x^2\sqrt{x}} - \frac{1}{x\sqrt{x}} \frac{dz}{dx} + \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{d^2z}{dx^2}. \end{aligned}$$

Keď dosadíme tieto vyjadrenia prvej a druhej derivácie do pôvodnej rovnice dostaneme:

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \frac{d^2z}{dx^2} - \frac{1}{x\sqrt{x}} \frac{dz}{dx} + \frac{3}{4} \frac{z}{x^2\sqrt{x}} + \frac{1}{x\sqrt{x}} \frac{dz}{dx} - \frac{z}{2x^2\sqrt{x}} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) \frac{z}{\sqrt{x}} = 0.$$

Po zlúčení podobných členov a vykrátení $\frac{1}{\sqrt{x}}$ prejde posledná rovnica na tvar:

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \left(1 + \frac{1-4n^2}{4x^2}\right)z = 0.$$

Táto rovnica má svoje partikulárne riešenie:

$$z = \sqrt{x} \cdot J_n(x).$$

Špeciálne je teda možné ukázať, že partikulárnym riešením rovnice

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \left(1 + \frac{1}{4x^2}\right)z = 0$$

je

$$z = \sqrt{x} \cdot J_0(x).$$

Z veľkého počtu rovníc, vedúcich k Besselovej rovnici, ukážeme ešte nasledovné:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1-2p}{x} \frac{dy}{dx} + \left\{m^2t^2x^{2t-2} + \frac{p^2-n^2t^2}{x^2}\right\}y = 0$$

má partikulárne riešenie:

$$y = x^p J_n(mx^t).$$

Rovnica

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1-2f(x)}{x} \frac{dy}{dx} + \left\{[f(x)]^2 + \frac{df(x)}{dx} + 1 - \frac{f(x)}{x} - \frac{n^2}{x^2}\right\}y = 0$$

má svoje partikulárne riešenie:

$$y = e^{-\int f(x)dx} J_n(x),$$

kde $f(x)$ je ľubovoľná funkcia.

Priradením rôznych hodnôt parametrom p , m a t vo funkcii $f(x)$, môžeme vytvoriť veľké množstvo rovníc, ktorých riešeniami sú Besselove funkcie.

2.11 Asymptotické vyjadrenia pre Besselove funkcie

Pri použití Besselových funkcií k riešeniu niektorých úloh praxe máme často do činenia s ich vyjadrením pre veľké hodnoty argumentu. Výpočet týchto častých hodnôt všeobecnými vzorcami je menej praktické, nakoľko si to vyžaduje sumáciu veľkého počtu členov radu a preto nahradíme pomaly konvergujúce rady pre Besselove funkcie takými funkciami, ktoré by podávali dostatočne presné hodnoty Besselových funkcií s nižším výpočtovým časom.

Vhodné je pre Besselove funkcie zaviesť asymptotické vzorce. Nebudeme sa zdržiavať odvodzovaním týchto vzorcov, nakoľko to nie je predmetom našich záujmov a je pomerne zložité. Dáme tu len návod k asymptotickým výrazom najčastejšie sa vyskytujúcich Besselových funkcií. Spôsoby odvodu asymptotických vzorcov sa zvyčajne nachádzajú v monografiách venujúcich sa Besselovým funkciám.

Pre veľké hodnoty argumentu sú dôležité nasledovné približné rovnice:

$$J_0(x) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right), \quad (2.11.1)$$

$$J_0(x) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[P_0(x) \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + Q_0(x) \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \right], \quad (2.11.2)$$

kde

$$P_0(x) = 1 - \frac{3}{2!(8x)^2} + \frac{105}{4!(8x)^4} - \dots$$

$$Q_0(x) = -\frac{1}{1!8x} + \frac{15}{3!(8x)^3} - \dots$$

Pre ďalšie rády a druhy máme:

$$J_1(x) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[P_1(x) \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + Q_1(x) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right], \quad (2.11.3)$$

kde

$$P_1(x) = 1 + \frac{15}{2!(8x)^2} - \frac{14175}{4!(8x)^4} + \dots$$

$$Q_1(x) = \frac{3}{1!8x} - \frac{315}{3!(8x)^3} + \dots$$

a

$$Y_0(x) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[-P_0(x) \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + Q_0(x) \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \right], \quad (2.11.4)$$

$$Y_1(x) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[-P_1(x) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + Q_1(x) \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right], \quad (2.11.5)$$

kde $P_0(x), Q_0(x), P_1(x), Q_1(x)$ majú tie isté hodnoty, ako vo vzorcoch pre $J_0(x)$ a $J_1(x)$.

Ďalej

$$I_0(x) \cong \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} p_0(x), \quad (2.11.6)$$

$$K_0(x) \cong \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \cdot e^{-x} z_0(x) \quad (2.11.7)$$

kde

$$p_0(x) = 1 + \frac{1}{1!8x} + \frac{3}{2!(8x)^2} + \dots$$

$$z_0(x) = 1 - \frac{1}{1!8x} + \frac{3}{2!(8x)^2} - \dots$$

a

$$I_1(x) \cong \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} p_1(x), \quad (2.11.8)$$

$$K_1(x) \cong \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \cdot e^{-x} z_1(x) \quad (2.11.9)$$

kde

$$p_1(x) = 1 - \frac{3}{1!8x} + \frac{15}{2!(8x)^2} - \dots$$

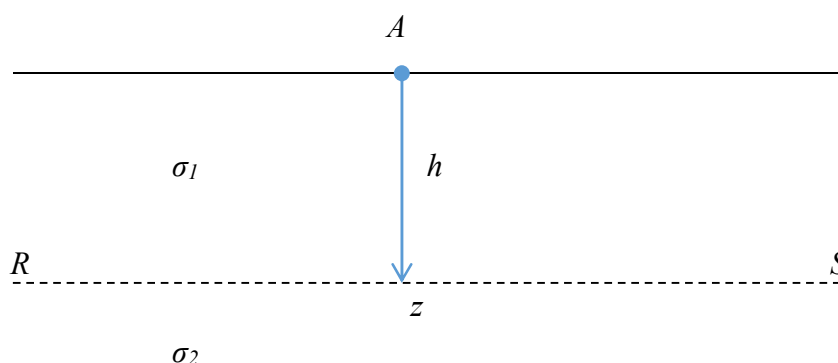
$$z_1(x) = 1 + \frac{3}{1!8x} + \frac{15}{2!(8x)^2} + \dots$$

3. Aplikácia Besselových funkcií

3.1 Rovinné rozhranie v poli bodového zdroja

Jedna z hlavných úloh teórie geoelektrického prieskumu je úloha o rozdelení potenciálu, vyvolaného bodovým zdrojom prúdu, umiesteným vo vodivom priestore, rozdelenom rovinným rozhraním na dve časti s rôznou elektrickou vodivosťou. Túto úlohu, často riešenú metódou zrkadlenia, budeme riešiť s využitím Besselových funkcií.

Našu úlohu sformulujeme nasledovne: RS je rovinné rozhranie, oddeľujúce prostredie so mernou elektrickou vodivosťou σ_1 od prostredia s mernou elektrickou vodivosťou σ_2 (**Obr. 6**). V kolmej vzdialenosti h od rozhrania je bodový zdroj prúdu I . Treba nájsť vzorec pre rozdelenie potenciálu v obidvoch prostrediach, vyvolaného týmto zdrojom.



Obr. 6: Schéma rovinného rozhrania

Z teórie geoelektrického prieskumu vieme, že potenciál v celom priestore, s vylúčením bodu A , musí vyhovovať Laplaceovej rovnici. Preto, s označením potenciálových funkcií v prvom a druhom prostredí ako φ_1 a φ_2 , môžeme napísať:

$$\Delta\varphi_1 = 0 \text{ a } \Delta\varphi_2 = 0.$$

Vzhľadom na symetriu riešenej úlohy je jasné, že hľadané funkcie φ_1 a φ_2 budú závislé na dvojici cylindrických premenných: vzdialenosti r os osi symetrie a vzdialenosti z od roviny prechádzajúcej počiatkom systému a rovnobežnou s rozhraním. Preto funkcie φ_1 a φ_2 môžeme v obecnom prípade napísať takto: $\varphi_1(r, z)$ a $\varphi_2(r, z)$. Treba podotknúť, že za os z bola zvolená priamka, kolmá na rovinu RS prechádzajúca bodom A . Kladný smer považujeme v smere od bodu A k rovine RS .

Laplaceova rovnica v cylindrických súradniciach, ako je známe, má tvar:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Keď φ_1 a φ_2 vyhovujú Laplaceovej rovnici, tak po ich dosadení za u do predošlej rovnice, musíme dostať rovnice dve:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} &= 0 \end{aligned}$$

Posledné členy $\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2}$ a $\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2}$ sú vynechané, pretože, v dôsledku uvedenej vlastnosti symetrie, sú identicky rovné nule. Po týchto všeobecných úvahách ohľadne funkcií φ_1 a φ_2 prejdeme k ich detailnejšiemu analyzovaniu.

Funkcie φ_1 a φ_2 musia mať nasledujúce vlastnosti, aby vyhovovali všetkým podmienkam potenciálových funkcií:

1. Funkcie φ_1 a φ_2 sa musia blížiť k nule so zväčšovaním vzdialenosti od počiatku súradnicového systému
2. Funkcia φ_2 musí mať konečnú hodnotu vo všetkých bodoch prostredia s vodivosťou σ_2 , funkcia φ_1 musí byť konečnou vo všetkých bodoch prostredia s vodivosťou σ_1 , okrem bodu A , kde sa musí stávať nekonečnou typu $\frac{1}{R}$, kde R je vzdialenosť bodu od počiatku súradnicového systému.
3. Na rozhraní RS funkcie φ_1 a φ_2 musia mať tieto vlastnosti:

$$\begin{aligned} \varphi_1(r, z)_{z=h} &= \varphi_2(r, z)_{z=h}, \\ \sigma_1 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right)_{z=h} &= \sigma_2 \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right)_{z=h}. \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

Na riešenie Laplaceovej rovnice použijeme Fourierovu metódu separácie premenných, teda hľadané riešenia pre funkcie φ_1 a φ_2 budeme uvažovať v tvaroch:

$$\begin{aligned} \varphi_1(r, z) &= u_1(r) v_1(z), \\ \varphi_2(r, z) &= u_2(r) v_2(z). \end{aligned}$$

Dosadením týchto tvarov funkcií do Laplaceovej rovnice, dostaneme:

$$v(z) \frac{\partial^2 u(r)}{\partial r^2} + \frac{v(z)}{r} \frac{\partial u(r)}{\partial r} + u(r) \frac{\partial^2 v(z)}{\partial z^2} = 0.$$

Vynechali sme indexy (1) a (2), pretože pre každú z hľadaných funkcií dostaneme rovnaké rovnice a teda ich uvádzame vo všeobecnom tvare. Vydelíme poslednú rovnicu výrazom $u \cdot v$ a dostaneme:

$$\frac{1}{u(r)} \frac{\partial^2 u(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{ru(r)} \frac{\partial u(r)}{\partial r} + \frac{1}{v(z)} \frac{\partial^2 v(z)}{\partial z^2} = 0.$$

Vidíme, že získaná rovnica vyjadruje rovnosť nule dvoch, na sebe nezávislých funkcií, z ktorých prvá závisí len na premennej r :

$$\frac{1}{u(r)} \frac{\partial^2 u(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{ru(r)} \frac{\partial u(r)}{\partial r},$$

a druhá len na premennej z :

$$\frac{1}{v(z)} \frac{\partial^2 v(z)}{\partial z^2}.$$

Takáto rovnosť je možná len vtedy, keď každá z častí je rovná tej istej veličine, nezávislej od r a z , líšiacej sa len znamienkom. Túto skutočnosť môžeme zapísať takto:

$$\frac{1}{u(r)} \frac{\partial^2 u(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{ru(r)} \frac{\partial u(r)}{\partial r} = -m^2, \quad (3.1.2)$$

$$\frac{1}{v(z)} \frac{\partial^2 v(z)}{\partial z^2} = m^2. \quad (3.1.3)$$

Po jednoduchej úprave a s vynechaním argumentov kvôli prehľadnosti, dostaneme:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + m^2 u = 0, \quad (3.1.4)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = m^2 v. \quad (3.1.5)$$

V prvej z napísaných rovníc spoznáваме Besselovu rovnicu, ktorej riešením je Besselova funkcia prvého druhu, rádu nula a argumentu $m \cdot r$, t.j. môžeme partikulárne riešenia rovnice (3.1.4) vziať funkcie:

$$J_0(mr) \text{ a } Y_0(mr).$$

Druhá rovnica sa rieši pomocou exponenciálnych funkcií:

$$e^{mz} \text{ a } e^{-mz}.$$

Preto pri zostavení všeobecných riešení Laplaceovej rovnice teda spolu uvažujeme funkcie:

$$J_0(mr)e^{mz}, J_0(mr)e^{-mz}, Y_0(mr)e^{mz}, Y_0(mr)e^{-mz}.$$

Vzhľadom na vyššie spomenuté vlastnosti hľadaných riešení, musíme vylúčiť členy obsahujúce funkciu $Y_0(mr)$, nakoľko v opačnom prípade by pozdĺž osi z neplatila podmienka konečnosti potenciálov. V dôsledku tejto úvahy skúmané funkcie $\varphi_1(r, z)$ a $\varphi_2(r, z)$ môžu obsahovať len funkcie:

$$J_0(mr)e^{mz} \text{ a } J_0(mr)e^{-mz}.$$

Všeobecné riešenie získame ako lineárnu kombináciu partikulárnych riešení. Vzhľadom na to, že číslo m volíme ľubovoľne, tak použijeme integrálne vyjadrenia:

$$\int_0^{\infty} A(m) J_0(mr) e^{mz} dm,$$

$$\int_0^{\infty} B(m) J_0(mr) e^{-mz} dm.$$

Pretože funkcia $\varphi_1(r, z)$ sa musí stávať nekonečnou typu $\frac{1}{R}$ v počiatku súradnicového systému a nakoľko pre prvé prostredie $z < h$, t.j. z nenadobúda nekonečných kladných hodnôt, môžeme pre túto funkciu napísať výraz:

$$\varphi_1(r, z) = \mathcal{L} \int_0^{\infty} J_0(mr) e^{-mz} dm + \int_0^{\infty} A(m) J_0(mr) e^{mz} dm, \quad (3.1.6)$$

kde $\mathcal{L}$ je konštanta, podliehajúca určeniu z podmienok úlohy a prvý integrál podľa (2.9.1) (Weberov – Lipschitzov integrál) má hodnotu rovnú $\frac{1}{R}$.

Pre funkciu $\varphi_2(r, z)$, v dôsledku skutočnosti, že člen obsahujúci e^{mz} pri hodnotách $z \rightarrow \infty$ rastie bez obmedzenia a súčasne s tým sa $\varphi_2(r, z)$ musí blížiť k nule so vzrastajúcim z , musíme napísať rovnicu:

$$\varphi_2(r, z) = \int_0^{\infty} B(m) J_0(mr) e^{-mz} dm. \quad (3.1.7)$$

Na konečné určenie funkcií $\varphi_1(r, z)$ a $\varphi_2(r, z)$, je potrebné už len nájsť výrazy pre veličiny $A(m)$ a $B(m)$. Tieto získame z podmienok platiacich na rozhraní (3.1.1). Preto položíme vo výrazoch (3.1.6) a (3.1.7) $z = h$ a musíme dostať rovnaké hodnoty pravých častí oboch výrazov:

$$\mathcal{L} \int_0^{\infty} J_0(mr) e^{-mh} dm + \int_0^{\infty} A(m) J_0(mr) e^{mh} dm = \int_0^{\infty} B(m) J_0(mr) e^{-mh} dm.$$

Túto rovnicu možno napísať v tvare:

$$\int_0^{\infty} [\mathcal{L}e^{-mh} + A(m)e^{mh} - B(m)e^{-mh}] J_0(mr) dm = 0.$$

Nakoľko toto musí byť splnené pre každé r , tak z toho bezprostredne vyplýva podmienka:

$$\mathcal{L}e^{-mh} + A(m)e^{mh} - B(m)e^{-mh} = 0 \quad (3.1.8)$$

ktorú je možné považovať za rovnicu na určenie $A(m)$ a $B(m)$. Druhú rovnicu dostaneme z druhej hraničnej podmienky. Derivujeme výrazy (3.1.6) a (3.1.7) podľa z a dostaneme:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} &= -\mathcal{L} \int_0^{\infty} m J_0(mr) e^{-mz} dm + \int_0^{\infty} mA(m) J_0(mr) e^{mz} dm \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} &= \int_0^{\infty} m B(m) J_0(mr) e^{-mz} dm \end{aligned}$$

Preto podmienka

$$\sigma_1 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right)_{z=h} = \sigma_2 \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right)_{z=h}$$

dáva:

$$-\mathcal{L}\sigma_1 \int_0^{\infty} m J_0(mr) e^{-mh} dm + \sigma_1 \int_0^{\infty} mA(m) J_0(mr) e^{mh} dm = \sigma_2 \int_0^{\infty} m B(m) J_0(mr) e^{-mh} dm,$$

alebo

$$\int_0^{\infty} [\mathcal{L}\sigma_1 e^{-mh} - \sigma_1 A(m)e^{mh} - \sigma_2 B(m)e^{-mh}] m J_0(mr) dm = 0.$$

Pretože i táto rovnica musí vyhovovať pre každú hodnotu r , tak dostaneme:

$$\mathcal{L}\sigma_1 e^{-mh} - \sigma_1 A(m)e^{mh} - \sigma_2 B(m)e^{-mh} = 0 \quad (3.1.9)$$

Riešime rovnice (3.1.8) a (3.1.9) vzhľadom na $A(m)$ a $B(m)$ a dostaneme:

$$\begin{aligned} A(m) &= \mathcal{L} \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} e^{-2mh} \\ B(m) &= \mathcal{L} \frac{2\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} = \mathcal{L} \left(1 + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \right) \end{aligned}$$

Označíme pomer $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$ písmenom k a posledné dva výrazy vyjadríme jednoduchšie:

$$\begin{aligned} A(m) &= \mathcal{L} k e^{-2mh}, \\ B(m) &= \mathcal{L} (1 + k). \end{aligned}$$

Po dosadení získaných hodnôt $A(m)$ a $B(m)$ do výrazov pre potenciály $\varphi_1(r, z)$ a $\varphi_2(r, z)$ dostaneme:

$$\begin{aligned}\varphi_1(r, z) &= \mathcal{L} \int_0^\infty J_0(mr) e^{-mz} dm + k \mathcal{L} \int_0^\infty J_0(mr) e^{-2mh} e^{mz} dm, \\ \varphi_2(r, z) &= \mathcal{L} (1+k) \int_0^\infty J_0(mr) e^{-mz} dm.\end{aligned}$$

Upravíme prvý z výrazov:

$$\varphi_1(r, z) = \mathcal{L} \int_0^\infty J_0(mr) e^{-mz} dm + k \mathcal{L} \int_0^\infty J_0(mr) e^{-m(2h-z)} dm$$

a s použitím Weberovho – Lipschitzovho integrálu môžeme tento výraz prepísať do formy:

$$\varphi_1(r, z) = \frac{\mathcal{L}}{R} + \frac{k \cdot \mathcal{L}}{\sqrt{r^2 + (2h-z)^2}}, \quad (3.1.10)$$

kde $R = \sqrt{r^2 + z^2}$. Výraz pre $\varphi_2(r, z)$ môže byť analogicky upravený na tvar:

$$\varphi_2(r, z) = \mathcal{L} \frac{1+k}{R}. \quad (3.1.11)$$

Pre malé hodnoty R ($r \rightarrow 0, z \rightarrow 0$) vzorec (3.1.10) musí dávať hodnoty potenciálu blízke hodnotám poľa, neovplyvneného existenciou rozhrania, t.j.:

$$\left[\varphi_1(r, z) \right]_{r=0}^{z=0} = \frac{\mathcal{L}}{4\pi\sigma_1 R}$$

a veličinu $\mathcal{L}$ môžeme potom určiť rovnicou:

$$\mathcal{L} = \frac{I}{4\pi\sigma_1} = \frac{I\rho_1}{4\pi}$$

V poslednom výraze bola zavedená veličina merného elektrického odporu ρ_1 pomerom:

$$\rho_1 = \frac{1}{\sigma_1}.$$

Použijeme nájdenu hodnotu pre $\mathcal{L}$ a môžeme upraviť rovnice (3.1.10) a (3.1.11) na konečný tvar:

$$\varphi_1(r, z) = \frac{I\rho_1}{4\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} + \frac{k}{\sqrt{r^2 + (2h-z)^2}} \right), \quad (3.1.12)$$

$$\varphi_2(r, z) = \frac{I\rho_1}{4\pi} \frac{1+k}{\sqrt{r^2 + z^2}}. \quad (3.1.13)$$

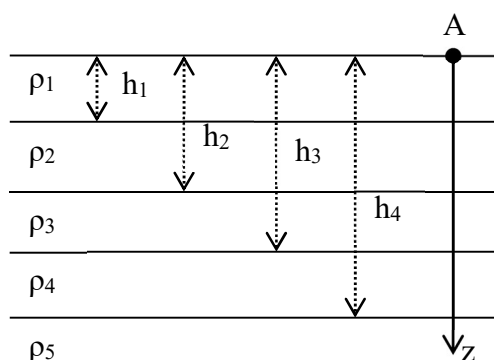
Výsledok možno sformulovať nasledovne:

1. Potenciál bodovej elektródy v prvom prostredí sa skladá z potenciálu tejto elektródy v homogénnom nekonečnom prostredí a z potenciálu zdroja, umiesteného v obraze skutočného zdroja vzniknutého zrkadlením na rozhraní, dávajúceho prúd skutočného zdroja, násobený veličinou k .
2. Potenciál v druhom prostredí môže byť vypočítaný podľa vzorca potenciálu v nekonečnom priestore, ale s prúdom zdroja násobeným $(1 + k)$.

Tento výsledok dostaneme obyčajne kratším, no menej analytickým a viac intuitívnym spôsobom zrkadlenia zobrazení. Úlohu sme rozobrali preto osobitne podrobne, pretože použitá metóda riešenia sa javí dostatočne typickou a to nám ďalej ušetrí miesto pre málo dôležité detaily riešenia.

3.2 Určenie potenciálu bodového zdroja pre n horizontálnych rozhraní

V teórii vertikálneho elektrického sondovania je dôležitá úloha o rozdelení potenciálu vyvolaného bodovým zdrojom umiestneným na rozhraní zem-vzduch, za existencie rôznych, rôznym špecifickým elektrickým odporom sa vyznačujúcich prostredí, oddelených od seba rovinnými rozhraniami. Túto úlohu sa pokúsime riešiť. Naformulujeme ju nasledovne: na povrchu je bodová elektróda, sýtená prúdom I , pod povrchom v hĺbkach $h_1, h_2, \dots, h_n$ sú rovinné rozhrania, rovnobežné s povrchom oddelujúce od seba prostredia so mernými elektrickými odporom $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots, \rho_n$ (**Obr. 7**). Úlohou je nájsť potenciál v ľubovoľnom bode na povrchu.



Obr. 7: Schéma systému rovnobežných horizontálnych rozhraní

Rozdelenie potenciálu v tejto úlohe bude podobné predchádzajúcej úlohe, ovplyvnené osovou symetriou, s osou prechádzajúcou elektródou kolmo na rozhrania. Preto, zavedením cylindrických súradníc s počiatkom v elektróde a s osou identickou s osou symetrie, získame

potenciálové funkcie $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n$ pre každú z vrstiev ako riešenia Laplaceovej rovnice, napísanej v známom tvare:

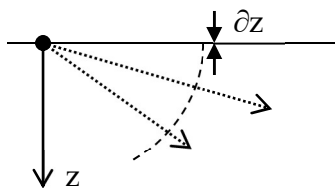
$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (3.2.1)$$

t.j. za predpokladu, že všetky hľadané funkcie závisia len od dvoch súradníc – r je vzdialenosť skúmaného bodu od osi a z je vzdialenosť bodu od roviny prechádzajúcej počiatkom systému a rovnobežnou s rozhraním.

Skôr než pristúpime k riešeniu tejto rovnice, určíme tie vlastnosti, ktorým musia vyhovovať hľadané potenciálové rovnice. Potenciálová funkcia $\varphi_1(r, z)$ pre prvú vrstvu mocnosti h_1 , obmedzenú zhora povrchom polpriestoru a zdola prvým rozhraním, je charakteristická tým, že na povrchu, t.j. pri $z = 0$ a pri $\rho_1 \neq 0$, je derivácia

$$\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right)_{z=0} = 0. \quad (3.2.2)$$

Fyzikálny zmysel tejto rovnice je v potvrdení existencie prúdov vstupujúcich alebo vystupujúcich zo zeme, v ľubovoľne zvolených bodoch zemského povrchu (**Obr. 8**).



Obr. 8: Schéma k rovnici (3.2.2)

Pretože v počiatku súradnicového systému je elektróda, ktorou vchádza do zeme prúd, tak funkcia $\varphi_1(r, z)$ musí mať tvar:

$$\varphi_1(r, z) = \frac{I \rho_1}{2\pi} \cdot \frac{1}{R} + \varphi'_1(r, z), \quad (3.2.3)$$

kde $R = \sqrt{r^2 + z^2}$ a funkcia $\varphi'_1(r, z)$, ako i prvý člen pravej strany, vyhovujúci Laplaceovej rovnici, musia byť konečnými vo všetkých bodoch prvej vrstvy.

Na rozhraní, určenom rovnicou $z = h_1$, musia platiť nasledujúce vzťahy:

$$\begin{aligned} \left[\varphi'_1(r, z) \right]_{z=h_1} &= \left[\varphi_2(r, z) \right]_{z=h_1}, \\ \left[\sigma_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right]_{z=h_1} &= \left[\sigma_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right]_{z=h_1}, \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

kde $\varphi_2(r, z)$ je potenciálová funkcia pre druhú vrstvu. všeobecne, na rozhraní medzi i -tou vrstvou a $i + 1$ -tou vrstvou, musia platiť rovnice:

$$\begin{aligned} \left[\varphi'_i(r, z) \right]_{z=h_i} &= \left[\varphi'_{i+1}(r, z) \right]_{z=h_i}, \\ \left[\sigma_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \right]_{z=h_i} &= \left[\sigma_{i+1} \frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial z} \right]_{z=h_i}. \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Všetky funkcie $\varphi'_1(r, z)$, $\varphi_2(r, z)$, $\varphi_3(r, z)$, ..., $\varphi_n(r, z)$ musia byť všade konečné a nulové pre nekonečne vzdialené body.

Na riešení rovnice (3.2.1) použijeme opäť Fourierovu metódu, ktorú sme použili k riešeniu predchádzajúcej úlohy a teda môžeme tvrdiť, že výrazy pre potenciálové funkcie sa musia skladať z dvoch členov tvaru:

$$\int_0^\infty A(m) J_0(mr) e^{-mz} dm \text{ a } \int_0^\infty B(m) J_0(mr) e^{mz} dm,$$

kde koeficienty A a B závisia len na m a môžu byť rôzne v rôznych funkciách $\varphi_i(r, z)$. Preto, pre hľadané potenciálové funkcie musíme napísať:

$$\begin{aligned} \varphi_1(r, z) &= \frac{I\rho_1}{2\pi} \cdot \frac{1}{R} + \int_0^\infty A_1 J_0(mr) e^{-mz} dm + \int_0^\infty B_1 J_0(mr) e^{mz} dm, \\ \varphi_2(r, z) &= \int_0^\infty A_2 J_0(mr) e^{-mz} dm + \int_0^\infty B_2 J_0(mr) e^{mz} dm, \\ &\vdots \\ \varphi_{n-1}(r, z) &= \int_0^\infty A_{n-1} J_0(mr) e^{-mz} dm + \int_0^\infty B_{n-1} J_0(mr) e^{mz} dm, \\ \varphi_n(r, z) &= \int_0^\infty A_n J_0(mr) e^{-mz} dm. \end{aligned}$$

Vo výraze $\varphi_n(r, z)$ existuje len člen, obsahujúci e^{mz} nakoľko v opačnom prípade pri $z \rightarrow \infty$ (pre poslednú vrstvu je to možné) potenciálová funkcia $\varphi_n(r, z)$ sa tiež blíži k nekonečnu, súčasne, ako podľa podmienky nami vyššie sformulovanej, pre nekonečne vzdialené body potenciálové funkcie musia mať nulovú hodnotu. Pretože funkcia $\varphi_1(r, z)$, ako bolo uvedené, musí mať tú vlastnosť, že $\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right)_{z=0} = 0$, tak pre ňu máme:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \frac{I\rho_1}{2\pi} \cdot \frac{z}{R^3} + \int_0^\infty (-m) A_1 J_0(mr) e^{-mz} dm + \int_0^\infty m B_1 J_0(mr) e^{mz} dm$$

a po dosadení $z = 0$ môžeme písať:

$$\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right)_{z=0} = \int_0^{\infty} m J_0(mr) (A_1 - B_1) dm = 0.$$

Pretože táto rovnosť musí platiť pre všetky hodnoty r , tak z toho bezprostredne vyplýva:

$$A_1 = B_1.$$

S použitím Weberovho – Lipschitzovho integrálu a získanú rovnosť medzi A_1 a B_1 môžeme výrazy pre $\varphi_1(r, z)$ prepísať v tvare:

$$\varphi_1(r, z) = \int_0^{\infty} \left(\frac{I\rho_1}{2\pi} + B_1 \right) J_0(mr) e^{-mz} dm + \int_0^{\infty} B_1 J_0(mr) e^{mz} dm. \quad (3.2.6)$$

Takto pri určovaní funkcií $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ je potrebné nájsť $2n-2$ neznámych A_i, B_i . Rozoberieme teda podmienky na $(n-1)$ rozhraniach medzi vrstvami 1 a 2, 2 a 3, ..., $(n-1)$ a n . Pretože na každom rozhraní platia dve podmienky: spojitosť potenciálov a normálovej zložky prúdu, tak na určenie $2n-2$ vyššie spomenutých neznámych, postačí nám $2(n-1)$ rovníc.

Napišeme dve také rovnice pre rozhranie medzi $(i-1)$ a i -tou vrstvou, určenou rovnicou $z = h_{i-1}$ a po úpravách dostaneme:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} A_{i-1} J_0(mr) e^{-mh_{i-1}} dm + \int_0^{\infty} B_{i-1} J_0(mr) e^{mh_{i-1}} dm &= \int_0^{\infty} A_i J_0(mr) e^{-mh_{i-1}} dm + \int_0^{\infty} B_i J_0(mr) e^{mh_{i-1}} dm \\ \frac{m}{\rho_{i-1}} \left[\int_0^{\infty} (B_{i-1} e^{mh_{i-1}} - A_{i-1} e^{-mh_{i-1}}) J_0(mr) dm \right] &= \frac{m}{\rho_i} \left[\int_0^{\infty} (B_i e^{mh_{i-1}} - A_i e^{-mh_{i-1}}) J_0(mr) dm \right] \end{aligned}$$

V dôsledku tejto skutočnosti, pretože tieto rovnice musia platiť pre každé r , môžeme ich napísať v tvare:

$$\begin{aligned} A_{i-1} e^{-mh_{i-1}} + B_{i-1} e^{mh_{i-1}} &= A_i e^{-mh_{i-1}} + B_i e^{mh_{i-1}}, \\ \frac{1}{\rho_{i-1}} A_{i-1} e^{-mh_{i-1}} - \frac{1}{\rho_{i-1}} B_{i-1} e^{mh_{i-1}} &= \frac{1}{\rho_i} A_i e^{-mh_{i-1}} - \frac{1}{\rho_i} B_i e^{mh_{i-1}}. \end{aligned}$$

Takto sústava rovníc, z ktorej budeme musieť nájsť funkcie A a B , dostane tvar:

$$\begin{aligned} B_1 (e^{-mh_1} + e^{mh_1}) - A_2 e^{-mh_1} - B_2 e^{mh_1} &= -\frac{I\rho_1}{2\pi} e^{-mh_1}, \\ \frac{1}{\rho_1} B_1 (e^{-mh_1} - e^{mh_1}) - \frac{1}{\rho_2} A_2 e^{-mh_1} + \frac{1}{\rho_2} B_2 e^{mh_1} &= \frac{I\rho_1}{2\pi} e^{-mh_1}, \\ A_2 e^{-mh_2} + B_2 e^{-mh_2} - A_3 e^{-mh_2} - B_3 e^{-mh_2} &= 0, \\ \frac{1}{\rho_2} A_2 e^{-mh_2} - \frac{1}{\rho_2} B_2 e^{-mh_2} - \frac{1}{\rho_3} A_3 e^{-mh_2} + \frac{1}{\rho_3} B_3 e^{mh_2} &= 0, \\ \dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$A_{n-1}e^{-mh_{n-1}} + B_{n-1}e^{-mh_{n-1}} - A_n e^{-mh_{n-1}} = 0,$$

$$\frac{1}{\rho_{n-1}} A_{n-1}e^{-mh_{n-1}} - \frac{1}{\rho_{n-1}} B_{n-1}e^{-mh_{n-1}} - \frac{1}{\rho_n} A_n e^{-mh_{n-1}} = 0.$$

Riešenie tejto sústavy umožní napísať výrazy pre všetky funkcie $\varphi(r, z)$ a čiastočne pre funkciu $\varphi_1(r, z)$. Položíme preto v poslednej rovnici $z=0$ a nájdeme vzorec dávajúci rozdelenie potenciálu bodového zdroja na rozhraní zem – vzduch, pri vrstevnatom zložení vodivého prostredia.

Ako príklad prevedieme riešenie dvojvrstvomého prostredia, t.j. takého prostredia, ktoré má pod povrchom v hĺbke h rozhranie oddeľujúce vrstvu s mernou vodivosťou σ_1 od podložia s mernou vodivosťou σ_2 . V tom prípade, $n=2$ a sústava rovníc, potrebná k nájdeniu A a B dostane jednoduchší vzhľad:

$$B_1(e^{-mh} + e^{mh}) - A_2 e^{-mh} = -\frac{I\rho_1}{2\pi} e^{-mh},$$

$$\frac{1}{\rho_1} B_1(e^{-mh} - e^{mh}) - \frac{1}{\rho_2} A_2 e^{-mh} = -\frac{1}{\rho_1} \cdot \frac{I\rho_1}{2\pi} e^{-mh}.$$

Riešením tejto sústavy rovníc dostaneme:

$$B_1 = \frac{I\rho_1}{2\pi} \cdot \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)e^{-mh}}{(\sigma_1 + \sigma_2)e^{mh} - (\sigma_1 - \sigma_2)e^{-mh}}.$$

Vykrátením čitateľa i menovateľa poslednej rovnice $(\sigma_1 + \sigma_2)e^{mh}$ a označením $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} = k$,

môžeme výraz pre B_1 vyjadriť v jednoduchšom tvare:

$$B_1 = \frac{I\rho_1}{2\pi} \cdot \frac{ke^{-2mh}}{1 - ke^{-2mh}}. \quad (3.2.7)$$

Dosadením tejto hodnoty do rovnice (3.2.6) dáme jej tvar:

$$\varphi_1(r, z) = \frac{I\rho_1}{2\pi} \int_0^\infty J_0(mr) e^{-mz} dm + \frac{I\rho_1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{ke^{-2mh}}{1 - ke^{-2mh}} (e^{-mz} + e^{mz}) J_0(mr) dm.$$

Zlomok $\frac{1}{1 - ke^{-2mh}}$ rozvieme do radu a prvý integrál nahradíme hodnotou $\frac{1}{R}$:

$$\varphi_1(r, z) = \frac{I\rho_1}{2\pi} \left\{ \frac{1}{R} + \int_0^\infty ke^{-2mh} J_0(mr) (1 + ke^{-2mh} + k^2 e^{-4mh} + \dots) (e^{-mz} + e^{mz}) dm \right\}$$

Integrál sumy vyjadríme ako sumu integrálov a poslednú rovnicu môžeme napísať:

$$\varphi_1(r, z) = \frac{I\rho_1}{2\pi} \left\{ \frac{1}{R} + k \int_0^\infty e^{-m(2h+z)} J_0(mr) dm + k^2 \int_0^\infty e^{-m(4h+z)} J_0(mr) dm + \dots \right. \\ \left. + k \int_0^\infty e^{-m(2h-z)} J_0(mr) dm + k^2 \int_0^\infty e^{-m(4h-z)} J_0(mr) dm + \dots \right\}$$

Dosadíme za R hodnotu $\sqrt{r^2 + z^2}$ a pomocou Weberovho – Lipschitzovho integrálu dostaneme:

$$\varphi_1(r, z) = \frac{I\rho_1}{2\pi} \left\{ \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} + \frac{k}{\sqrt{r^2 + (2h+z)^2}} + \frac{k^2}{\sqrt{r^2 + (4h+z)^2}} + \dots \right. \\ \left. + \frac{k}{\sqrt{r^2 + (2h-z)^2}} + \frac{k^2}{\sqrt{r^2 + (4h-z)^2}} + \dots \right\}$$

Nakoľko podľa zadania úlohy potrebujeme nájsť rozdelenie potenciálu na povrchu, položíme v poslednej rovnici $z = 0$. Toto nám dá:

$$\varphi_1(r, z) = \frac{I\rho_1}{2\pi} \left\{ \frac{1}{r} + \frac{k}{\sqrt{r^2 + (2h)^2}} + \frac{k^2}{\sqrt{r^2 + (4h)^2}} + \dots \right. \\ \left. + \frac{k}{\sqrt{r^2 + (2h)^2}} + \frac{k^2}{\sqrt{r^2 + (4h)^2}} + \dots \right\},$$

alebo v skrátrenom tvare:

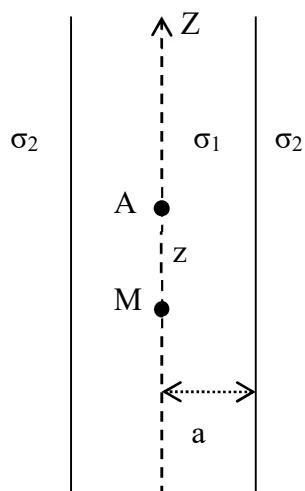
$$\varphi_1(r, z) = \frac{I\rho_1}{2\pi} \left\{ \frac{1}{r} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^n}{\sqrt{r^2 + (2nh)^2}} \right\}. \quad (3.2.8)$$

Tento vzorec je základným k výpočtu zdanlivých merných odporov v metóde vertikálneho elektrického sondovania.

3.3 Základná úloha karotáže

Pri karotáži vrtných sond, základným elementom merania je potenciál vnútri stĺpca vrtu, vyvolaný prúdom, vychádzajúcim z elektródy, ktorá sa nachádza na jednej priamke s meracou elektródou. Žiadané je riešenie úlohy o mernej elektrickej vodivosti prostredia, obkolesujúceho vrtnú sondu. Aby bolo toto riešenie možné, je nutné poznať závislosť medzi meraným potenciálom a prvkami, určujúcimi vodivé prostredie, ako aj priemerom vrtnej sondy a merným odporom vrtného prostredia i vrtného roztoku. Tieto závislosti môžeme zistiť teoreticky zostavením nasledujúcej úlohy: na osi nekonečne dlhého valca polomeru a , mernej elektrickej vodivosti σ_1 , umiestneného v nekonečnom vodivom prostredí o mernej vodivosti σ_2 ,

nachádza sa elektróda A , sýtená prúdom I . Hľadáme potenciál v bode M , nachádzajúcom sa tiež na osi valca, vo vzdialenosti z od sýtiacej elektródy (**Obr. 9**).



Obr. 9: Schéma k základnej úlohe karotáže

Zo zadania úlohy vyplýva, že rozdelenie potenciálu bude dané osovou symetriou s osou identickou s osou valca. Preto opäť, po zavedení cylindrického súradnicového systému, s počiatkom v bode A a osou v ose symetrie, potenciálne funkcie φ_1 vnútri valca a φ_2 mimo valca, budú závisieť len na dvoch súradniciach: vzdialenosti r od osi valca a vzdialenosti z po osi od počiatku súradníc. Obidve funkcie $\varphi_1(r, z)$ a $\varphi_2(r, z)$ musíme získať ako riešenia Laplaceovej rovnice v nám známej forme:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (3.3.1)$$

Vlastnosti hľadaných funkcií $\varphi_1(r, z)$ a $\varphi_2(r, z)$ musia byť nasledujúce:

1. funkcia $\varphi_1(r, z)$ musí mať tvar

$$\varphi_1(r, z) = \frac{I \rho_1}{4\pi} \cdot \frac{1}{R} + \varphi'_1(r, z),$$

kde $R = \sqrt{r^2 + z^2}$ a funkcia $\varphi'_1(r, z)$ musí byť všade konečnou a stávať sa nulovou pre nekonečne vzdialené body, t.j. pri $z \rightarrow \infty$,

2. funkcia $\varphi_2(r, z)$ pre prostredie s vodivosťou σ_2 musí byť tiež konečnou vo všetkých bodoch tohto prostredia a blíži sa k nule pri neobmedzenom raste r alebo z ,

3. na rozhraní valcovej oblasti musia platiť rovnice:

$$\begin{aligned}\left[\varphi_1(r, z)\right]_{r=a} &= \left[\varphi_2(r, z)\right]_{r=a}, \\ \left[\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r}\right]_{r=a} &= \left[\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial r}\right]_{r=a}.\end{aligned}$$

Na riešenie rovnice (3.3.1) opäť použijeme Fourierovu metódu separácie premenných a dostaneme:

$$\varphi_1(r, z) = u(r) \cdot v(z).$$

Dosadíme do (3.3.1) a dostaneme:

$$\frac{1}{u} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{ur} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{v} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0$$

Takto sa pôvodná diferenciálna funkcia rozpadá na dve obyčajné diferenciálne rovnice:

$$\begin{aligned}\frac{1}{u} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{ur} \frac{\partial u}{\partial r} &= m^2 \\ \frac{1}{v} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} &= -m^2\end{aligned}$$

Napíšme tieto rovnice v tvare:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - m^2 u &= 0 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} &= -m^2 v\end{aligned}$$

a vidíme, že prvá z nich má partikulárne riešenia:

$$I_0(m, r) \text{ a } K_0(m, r)$$

a druhá:

$$\sin mz \text{ a } \cos mz.$$

Vo všeobecnom riešení sa teda budú vyskytovať ich lineárne kombinácie:

$$\begin{aligned}I_0(m, r) \sin mz, \quad I_0(m, r) \cos mz \\ K_0(m, r) \sin mz, \quad K_0(m, r) \cos mz\end{aligned}$$

Preto že potenciálne funkcie $\varphi_1(r, z)$ a $\varphi_2(r, z)$ musia byť párne vzhľadom k premennej z , t.j. mať rovnaké hodnoty v bodoch, rozložených v rovnakej vzdialenosti nad alebo pod elektródou A , pri zostavení týchto riešení musíme ponechať iba tie, obsahujúce $\cos mz$. Pre všeobecný tvar hľadaných funkcií $\varphi_1(r, z)$ a $\varphi_2(r, z)$ zatiaľ teda máme:

$$\varphi(r, z) = \int_0^\infty A(m) I_0(mr) \cos mz \, dm + \int_0^\infty B(m) K_0(mr) \cos mz \, dm.$$

Vzhľadom na požadované vlastnosti hľadaných riešení môžeme tvrdiť, že výraz φ'_1 môže obsahovať prvý z napísaných integrálov, nakoľko $K_0(m, r)$ pri $r \rightarrow 0$ rastie bez obmedzenia a pri povahe druhého integrálu by podmienka konečnosti nebola splnená. Musí teda existovať integrál, obsahujúci $I_0(m, r)$ bez obmedzenia rastúci s rastúcim r . Druhá rovnica môže platiť pre vonkajší priestor. Z uvedených záverov môžeme napísať:

$$\varphi_1(r, z) = \frac{I\rho_1}{4\pi} \frac{1}{R} + \int_0^\infty A I_0(mr) \cos mz \, dm$$

$$\varphi_2(r, z) = \int_0^\infty B K_0(mr) \cos mz \, dm$$

K určení funkcií A a B použijeme podmienky pre rozhranie valcovej oblasti. Podmienka spojitosti potenciálov nám dáva (s využitím Weberovho – Lipschitzovho integrálu):

$$\frac{I\rho_1}{4\pi} \frac{2}{\pi} \int_0^\infty K_0(ma) \cos mz \, dm + \int_0^\infty A I_0(ma) \cos mz \, dm = \int_0^\infty B K_0(ma) \cos mz \, dm.$$

Pretože sa táto rovnica musí splniť pri všetkých hodnotách z , sme oprávnený položiť:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} &= \frac{I\rho_1}{4\pi} \frac{2}{\pi} \int_0^\infty m K'_0(mr) \cos mz \, dm + \int_0^\infty m A I'_0(mr) \cos mz \, dm = \\ &= -\frac{I\rho_1}{4\pi} \frac{2}{\pi} \int_0^\infty m K_1(mr) \cos mz \, dm + \int_0^\infty m A I_1(mr) \cos mz \, dm, \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} &= \int_0^\infty m B K'_0(mr) \cos mz \, dm = -\int_0^\infty m B K_1(mr) \cos mz \, dm, \end{aligned}$$

kde sme využili, že: $K'_0(x) = -K_1(x)$ a $I'_0(x) = -I_1(x)$.

Pre druhú hraničnú podmienku píšeme:

$$\frac{1}{\rho_1} \left[-\frac{I\rho_1}{4\pi} \frac{2}{\pi} \int_0^\infty m K_1(ma) \cos mz \, dm + \int_0^\infty m A I_1(ma) \cos mz \, dm \right] = -\frac{1}{\rho_2} \int_0^\infty m B K_1(ma) \cos mz \, dm.$$

Pretože aj táto podmienka musí byť splnená pri všetkých hodnotách z , dostaneme:

$$-\frac{1}{\rho_1} \frac{I\rho_1}{4\pi} \frac{2}{\pi} K_1(ma) + \frac{1}{\rho_1} A I_1(ma) + \frac{1}{\rho_2} B K_1(ma) = 0 \quad (3.3.2)$$

Elimináciou B dostaneme:

$$\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right) \frac{I\rho_1}{4\pi} \frac{2}{\pi} K_0(ma) K_1(ma) + \frac{1}{\rho_2} A I_0(ma) K_1(ma) + \frac{1}{\rho_1} A I_1(ma) K_0(ma) = 0.$$

Ďalej použijeme výraz:

$$I_1(ma)K_0(ma) + I_0(ma)K_1(ma) = \frac{1}{ma}$$

a môžeme poslednú rovnicu prepísať na tvar:

$$A \left[\frac{1}{\rho_2} \frac{1}{ma} - \frac{1}{\rho_2} K_0(ma) I_1(ma) \right] + \frac{1}{\rho_1} K_0(ma) I_1(ma) = \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) \frac{I \rho_1}{4\pi} \frac{2}{\pi} K_1(ma) K_0(ma).$$

Z toho získame:

$$A = \frac{I \rho_1}{4\pi} \frac{2}{\pi} \frac{\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) K_1(ma) K_0(ma)}{\frac{1}{ma \rho_2} + \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) I_1(ma) K_0(ma)}.$$

Vynásobíme posledný výraz jednotkou v tvare $\frac{\rho_2}{\rho_2}$ a označíme pomer $\frac{\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}}{\frac{1}{\rho_2}}$ písmenom p a

dostaneme:

$$A = \frac{I \rho_1}{4\pi} \frac{2}{\pi} \frac{pma K_1(ma) K_0(ma)}{1 + pma I_1(ma) K_0(ma)}.$$

Takto potenciál vnútri valcovej oblasti dostáva tvar:

$$\varphi_1(r, z) = \frac{I \rho_1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} + \frac{I \rho_1}{4\pi} \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{pma K_1(ma) K_0(ma)}{1 + pma I_1(ma) K_0(ma)} I_0(mr) \cos mz \, dm. \quad (3.3.3)$$

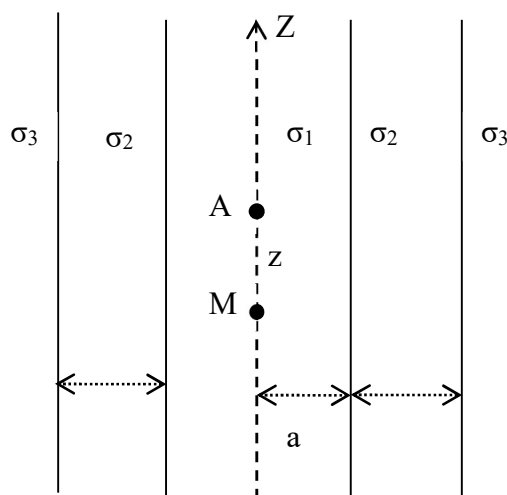
Nakoniec položíme $r = 0$ dostaneme vzorec k vyčísleniu potenciálu daného elektródou A v bodoch osi valca:

$$\varphi_1 = \frac{I \rho_1}{4\pi} \left[\frac{1}{z} + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{pma K_1(ma) K_0(ma)}{1 + pma I_1(ma) K_0(ma)} \cos mz \, dm \right]. \quad (3.3.4)$$

3.4 Rozdelenie potenciálu bodovej elektródy na osi dvoch koaxiálnych valcov

V teórii bočnej karotáže má veľký význam rozdelenie potenciálu od bodovej elektródy nachodiacej sa na obecnej osi dvoch koaxiálnych vodivých valcov, umiestnených vo vodivom prostredí (**Obr. 10**). V teórii karotáže je úloha ekvivalentná dvojvrstvovej úlohe vertikálneho elektrického sondovania. Formulácia tejto úlohy je teda v mnohom podobná s už vyriešenou úlohou. Na osi nekonečne dlhého valca sa nachádza elektróda (prostredie s mernou vodivosťou σ_1) sýtená prúdom I . Tento valec je obalený koaxiálnym valcovým obalom mernej elektrickej vodivosti σ_2 . Vonkajší priestor je vyplnený prostredím s mernou vodivosťou σ_3 . Polomer

vnútorného valca je a , polomer vonkajšieho je b . Je potrebné nájsť vzorec rozdelenia potenciálu pozdĺž osi valca.



Obr. 10: Schéma k úlohe o koaxiálnom valci

Tak, ako v minulej úlohe, v rozdelení potenciálu je dôležitá osová symetria, preto opäť zavádzame valcové súradnice a označíme hľadané potenciálové funkcie φ_1 , φ_2 a φ_3 pre vnútorný valec, valcový obal a vonkajšie prostredia ako riešenia rovnice:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (3.4.1)$$

Po operáciách, podobných tým, ktoré sme použili pri riešení úlohy s jedným valcovým povrchom, môžeme ihneď napísať výrazy pre potenciály vo vnútornej a vonkajšej oblasti v tvare:

$$\varphi_1(r, z) = \frac{I \rho_1}{4\pi} \cdot \frac{1}{R} + \int_0^\infty A_1 I_0(mr) \cos mz \, dm$$

$$\varphi_3(r, z) = \int_0^\infty B_3 K_0(mr) \cos mz \, dm$$

Čo sa týka výrazu pre funkciu $\varphi_2(r, z)$, pretože pre valcový obal platia nerovnosti $b > r > a$, musíme tu vziať riešenie vo všeobecnej podobe:

$$\varphi_2(r, z) = \int_0^\infty A_2 I_0(mr) \cos mz \, dm + \int_0^\infty B_2 K_0(mr) \cos mz \, dm$$

Pri hľadaní hodnôt A_1 , A_2 , B_2 a B_3 použijeme štyri okrajové podmienky na dvoch valcových rozhraniach. Podmienka spojitosti potenciálu nám dá dve rovnice:

$$\begin{aligned}
& \frac{I\rho_1}{4\pi} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^\infty K_0(ma) \cos mz \, dm + \int_0^\infty A_1 I_0(ma) \cos mz \, dm = \\
& = \int_0^\infty A_2 I_0(ma) \cos mz \, dm + \int_0^\infty B_2 K_0(ma) \cos mz \, dm, \\
& \int_0^\infty A_2 I_0(mb) \cos mz \, dm + \int_0^\infty B_2 K_0(mb) \cos mz \, dm = \int_0^\infty B_3 K_0(mb) \cos mz \, dm
\end{aligned}$$

V dôsledku nutnosti splnenia týchto rovníc pri všetkých hodnotách z , môžeme ich zameniť nasledujúcimi:

$$\begin{aligned}
\frac{I\rho_1}{4\pi} \cdot \frac{2}{\pi} K_0(ma) + A_1 I_0(ma) &= A_2 I_0(ma) + B_2 K_0(ma), \\
A_2 I_0(mb) + B_2 K_0(mb) &= B_3 K_0(mb).
\end{aligned} \tag{3.4.2}$$

Ďalšie rovnice dostaneme z podmienky spojitosti normálovej zložky prúdu k valcovým rozhraniam. Pre prvé rozhranie ($r = a$) dostaneme:

$$\begin{aligned}
& -\sigma_1 \frac{I\rho_1}{4\pi} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^\infty m K_1(ma) \cos mz \, dm + \sigma_1 \int_0^\infty m A_1 I_1(ma) \cos mz \, dm = \\
& = \sigma_2 \int_0^\infty m A_2 I_{10}(ma) \cos mz \, dm - \sigma_2 \int_0^\infty m B_2 K_1(ma) \cos mz \, dm
\end{aligned}$$

Pre druhé rozhranie ($r = a$) dostaneme:

$$\sigma_2 \int_0^\infty m A_2 I_1(mb) \cos mz \, dm - \sigma_2 \int_0^\infty m B_2 K_1(mb) \cos mz \, dm = -\sigma_3 \int_0^\infty m B_3 K_1(mb) \cos mz \, dm$$

Tieto rovnice vedú k dvom jednoduchším:

$$\begin{aligned}
-\sigma_1 \frac{I\rho_1}{4\pi} \cdot \frac{2}{\pi} K_1(ma) + \sigma_1 A_1 I_0(ma) &= \sigma_2 A_2 I_1(ma) - \sigma_2 B_2 K_1(ma), \\
\sigma_2 A_2 I_1(mb) - \sigma_2 B_2 K_1(mb) &= -\sigma_3 B_3 K_1(mb).
\end{aligned} \tag{3.4.3}$$

Vylúčime B_3 z druhých rovníc sústav (3.4.2) a (3.4.3) a dostaneme:

$$A_2 [\sigma_3 K_1(mb) I_0(mb) + \sigma_2 K_0(mb) I_1(mb)] - B_2 (\sigma_2 - \sigma_3) K_0(mb) K_1(mb) = 0$$

Použijeme výraz:

$$K_1(mb) I_0(mb) + K_0(mb) I_1(mb) = \frac{1}{mb}$$

a môžeme poslednú rovnicu prepísať na:

$$A_2 \left[\frac{\sigma_3}{mb} + (\sigma_2 - \sigma_3) K_0(mb) I_1(mb) \right] - B_2 (\sigma_2 - \sigma_3) K_0(mb) K_1(mb) = 0$$

Po vynásobení tohto výrazu $\frac{mb}{\sigma_3}$ s označením $\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_2} = p_{23}$ dostaneme:

$$A_2 \left[1 + mbp_{23} K_0(mb) I_1(mb) \right] - B_2 mbp_{23} K_0(mb) K_1(mb) = 0$$

Riešime túto rovnicu vzhľadom na A_2 :

$$A_2 = \frac{mbp_{23} K_0(mb) K_1(mb)}{1 + mbp_{23} K_0(mb) I_1(mb)} B_2$$

Za účelom zjednodušenia ďalších operácií, označíme koeficient pri B_2 symbolom P :

$$A_2 = PB_2$$

Po dosadení hodnoty A_2 do sústavy rovníc (3.4.2) a (3.4.3) dostaneme:

$$\begin{aligned} \frac{I\rho_1}{4\pi} \cdot \frac{2}{\pi} K_0(ma) + A_1 I_0(ma) &= PB_2 I_0(ma) + B_2 K_0(ma) = B_2 \left[PI_0(ma) + K_0(ma) \right] \\ -\sigma_1 \frac{I\rho_1}{4\pi} \cdot \frac{2}{\pi} K_1(ma) + \sigma_1 A_1 I_0(ma) &= \sigma_2 PB_2 I_1(ma) - \sigma_2 B_2 K_1(ma) = \sigma_2 B_2 \left[PI_1(ma) - K_1(ma) \right] \end{aligned}$$

Vylúčime z týchto rovníc B_2 a prejdeme k rovnici:

$$\begin{aligned} \frac{I\rho_1}{4\pi} \cdot \frac{2}{\pi} \left[\sigma_2 PK_0(ma) I_1(ma) - \sigma_2 K_0(ma) K_1(ma) + \sigma_1 PK_1(ma) I_0(ma) + \sigma_1 K_1(ma) K_0(ma) \right] &= \\ = A_1 \left[\sigma_1 PI_1(ma) I_0(ma) + \sigma_1 I_1(ma) K_0(ma) - \sigma_2 PI_0(ma) + \sigma_2 I_0(ma) K_1(ma) \right] \end{aligned}$$

S pomocou výrazu:

$$K_0(ma) I_1(ma) + K_1(ma) I_0(ma) = \frac{1}{ma}$$

môžeme poslednú rovnicu upraviť:

$$\begin{aligned} \frac{I\rho_1}{4\pi} \cdot \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sigma_2}{ma} P - \sigma_2 PK_1(ma) I_0(ma) + (\sigma_1 - \sigma_2) K_1(ma) K_0(ma) + \sigma_1 PK_1(ma) I_0(ma) \right] &= \\ = A_1 \left[(\sigma_1 - \sigma_2) PI_0(ma) I_1(ma) + \sigma_1 I_1(ma) K_0(ma) + \frac{\sigma_2}{ma} - \sigma_2 I_1(ma) K_0(ma) \right] \end{aligned}$$

alebo:

$$\begin{aligned} \frac{I\rho_1}{4\pi} \cdot \frac{2}{\pi} \left[(\sigma_1 - \sigma_2) K_1(ma) K_0(ma) + (\sigma_1 - \sigma_2) PK_1(ma) I_0(ma) + \frac{\sigma_2}{ma} P \right] &= \\ = A_1 \left[(\sigma_1 - \sigma_2) I_1(ma) K_0(ma) + (\sigma_1 - \sigma_2) PI_0(ma) I_1(ma) + \frac{\sigma_2}{ma} \right] \end{aligned}$$

Vydelíme poslednú rovnicu $\frac{\sigma_2}{ma}$ a označíme pomer $\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2} = p_{12}$ a môžeme túto rovnicu

prepísať v tvare:

$$\begin{aligned} & \frac{I\rho_1}{4\pi} \cdot \frac{2}{\pi} \left[map_{12} K_1(ma) K_0(ma) + map_{12} P K_1(ma) I_0(ma) + P \right] = \\ & = A_1 \left[map_{12} I_1(ma) K_0(ma) + map_{12} P I_0(ma) I_1(ma) + 1 \right] \end{aligned}$$

Vyjadríme A_1 :

$$A_1 = \frac{I\rho_1}{4\pi} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{P + map_{12} K_1(ma) [K_0(ma) + P I_0(ma)]}{1 + map_{12} I_1(ma) [K_0(ma) + P I_0(ma)]}$$

Nájdenú hodnotu A_1 dosadíme do výrazu pre $\varphi_1(r, z)$ a dostaneme:

$$\varphi_1(r, z) = \frac{I\rho_1}{4\pi} \left[\frac{1}{R} + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{P + map_{12} K_1(ma) [K_0(ma) + P I_0(ma)]}{1 + map_{12} I_1(ma) [K_0(ma) + P I_0(ma)]} I_0(mr) \cos mz \, dm \right]$$

Tu položíme $r = 0$ a získame vzorec, dávajúci rozdelenie potenciálu pozdĺž osi z :

$$\varphi_1(r, z) = \frac{I\rho_1}{4\pi} \left[\frac{1}{z} + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{P + map_{12} K_1(ma) [K_0(ma) + P I_0(ma)]}{1 + map_{12} I_1(ma) [K_0(ma) + P I_0(ma)]} \cos mz \, dm \right]. \quad (3.4.4)$$

Od ďalších operácií už upustíme, pretože ich podstatou sú len odvodzovania nájdeného výrazu na tvar vhodnejšie k vyčísleniu. Keď tu položíme $\sigma_3 = \sigma_2$, tak p_{23} a tým i P budú rovné nule a vzorec pre potenciál bodov na osi symetrie dostane už známy tvar:

$$\varphi_1(r, z) = \frac{I\rho_1}{4\pi} \left[\frac{1}{z} + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{map_{12} K_1(ma) K_0(ma)}{1 + map_{12} I_1(ma) K_0(ma)} \cos mz \, dm \right]$$

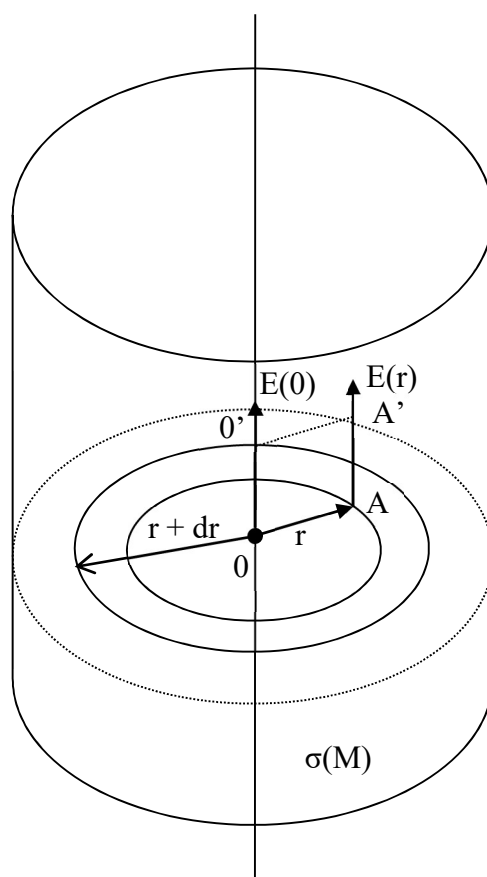
Keď položíme $\sigma_1 = \sigma_2$ tak $p_{12} = 0$ a dostaneme:

$$\varphi_1(r, z) = \frac{I\rho_1}{4\pi} \left[\frac{1}{z} + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{mbp_{23} K_1(mb) K_0(mb)}{1 + map_{23} I_1(ma) K_0(ma)} \cos mz \, dm \right]$$

čo zodpovedá jednej valcovej oblasti s polomerom b obkolesenej oblasťou vodivosti σ_3 .

3.5 Rozdelenie striedavého prúdu v priereze vodiča – skin efekt

Ako ďalší príklad použitia Besselových funkcií uvidíme úlohu o rozdelení striedavého prúdu v priereze valcového vodiča, o ktorom predpokladáme, že je nekonečne dlhý (**Obr. 11**). Keď v takomto vodiči tečie jednosmerný prúd, tak vektor prúdu má tú istú hodnotu v celom priereze. Toto nie je možné tvrdiť v prípade prúdu, meniaceho sa s časom. Tak s predpokladom, že pozdĺž nekonečne dlhého okrúhleho valca vodivosti σ a magnetickej permeability μ , tečie premenný elektrický prúd, ktorého sila sa určí reálnou časťou výrazu $I = I_0 e^{i\omega t}$, kde i je komplexná jednotka. V dôsledku kruhovej symetrie, môžeme považovať magnetické siločiaru za kružnice so stredmi na osi valca, ktorú tiež použijeme ako os valcových súradníc.



Obr. 11: Schéma k skin efektu

Podľa Ampérovho zákona práca magnetickej sily H , pri obehu po siločiare polomeru r , bude rovná prúdu, násobeného 4π :

$$2\pi r H(r) = 4\pi \int_0^r 2\pi r i(r) dr,$$

kde $i(r)$ je prúd, považovaný za funkciu vzdialenosti od osi valca. Derivovaním napísanej rovnice podľa r dostaneme:

$$\frac{\partial H(r)}{\partial r} = 4\pi r i(r). \quad (3.5.1)$$

Zostrojíme rovnobežník, ktorého jedna strana leží na osi z , druhá je rovnobežná s r . Dĺžku strany na osi z volíme jednotkovej veľkosti, kolmica k nej nech je r . Elektromotorická sila v bodoch obvodu tohto rovnobežníka pôsobí pozdĺž jeho strán rovnobežných s osou z a preto práca elektromotorických síl pri obehu po obvodě bude daná rozdielom: $E(r) - E(0)$, kde $E(r)$ je hodnota elektromotorickej sily na strane rovnobežnej s osou z a nachádzajúcej sa vo

vzdialenosti r od tejto osi, $E(0)$ je hodnota elektromotorickej sily na strane totožnej s osou z .

Podľa zákona indukcie máme.:

$$E(r) - E(0) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^r B(r) dr.$$

Derivovaním tejto rovnice podľa r dostaneme:

$$\frac{\partial E(r)}{\partial r} = \frac{\partial B(r)}{\partial t} = \mu \frac{\partial H(r)}{\partial t}.$$

S použitím výrazu $i(r) = \sigma E$, môžeme túto rovnicu vyjadriť:

$$\frac{\partial i(r)}{\partial r} = \sigma \mu \frac{\partial H(r)}{\partial t}. \quad (3.5.2)$$

Pretože uvažujeme proces odohrávajúci sa v čase podľa zákonov harmonického kmitania, t.j. počítame, že číselné hodnoty prúdu z magnetického napätia sa určia vzťahmi (v tejto úlohe ďalej označujeme komplexnú jednotku písmenom j):

$$i(r) = ie^{j\omega t} \text{ a } H(r) = He^{j\omega t}$$

tak rovnicu (3.5.2) zameníme nasledovne:

$$\frac{\partial i(r)}{\partial r} = j\omega \sigma \mu H(r). \quad (3.5.3)$$

Vylúčime veličinu H z rovníc (3.5.1) a (3.5.3) a dostaneme diferenciálnu rovnicu pre prúd:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r}{j\omega \sigma \mu} \frac{\partial i(r)}{\partial r} \right) = 4\pi r i(r),$$

alebo

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial i(r)}{\partial r} \right) = 4\pi j\omega \sigma \mu r i(r),$$

ktorú ľahko upravíme na tvar:

$$\frac{\partial^2 i(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial i(r)}{\partial r} - 4\pi j\omega \sigma \mu i(r) = 0.$$

Keď tu označíme $4\pi\omega\sigma\mu = \alpha^2$, tak rovnica dostane tvar:

$$\frac{\partial^2 i(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial i(r)}{\partial r} + (\alpha\sqrt{-j})^2 i(r) = 0.$$

Parciálnym riešením tejto rovnice, ako už vieme, sú funkcie:

$$J_0(\alpha r \sqrt{-j}) \text{ a } Y_0(\alpha r \sqrt{-j}).$$

Funkcia $Y_0(\alpha r \sqrt{-j})$ má logaritmickú singularitu pri $r = 0$ a tak nevyhovuje podmienkam našej úlohy, pretože pre prúd na osi valca by riešenie nemalo zmysel. Preto sme oprávnení písať:

$$i(r) = C J_0(\alpha r \sqrt{-j}),$$

kde C je konštanta, veľkosť ktorej sa určí podmienkami úlohy.

Pre napätie magnetického poľa v dôsledku rovnice (3.5.3) dostaneme:

$$H = \frac{1}{j\omega\sigma\mu} \frac{\partial i(r)}{\partial r} = \frac{C\alpha\sqrt{-j}}{j\omega\sigma\mu} J_0'(\alpha r \sqrt{-j}) = \frac{4C\pi\sqrt{j}}{\alpha} J_1(\alpha r \sqrt{-j}).$$

Na vonkajšej kružnici prierezu valca, t.j. vo vzdialenosti R od jeho osi, magnetické napätie v súlade s poslednou rovnicou má hodnotu:

$$H_R = \frac{4C\pi\sqrt{j}}{\alpha} J_1(\alpha R \sqrt{-j}).$$

Preto práca pri obehú po tejto vonkajšej kružnici je rovná:

$$2\pi R H_R = 2\pi R \frac{4C\pi\sqrt{j}}{\alpha} J_1(\alpha R \sqrt{-j}).$$

Z druhej strany, podľa Ampérovho zákona, je táto práca rovná $4\pi I$, kde I je celý prúd, tečúci valcom. Preto:

$$2\pi R \frac{4C\pi\sqrt{j}}{\alpha} J_1(\alpha R \sqrt{-j}) = 4\pi I.$$

Z tohto určíme C ako:

$$C = \frac{I\alpha}{2\pi R J_1(\alpha R \sqrt{-j})} \cdot \frac{1}{\sqrt{j}}$$

Preto vzorec pre amplitúdu sily dostane tvar:

$$i(r) = \frac{I}{\pi R^2} \cdot \frac{\alpha R \sqrt{-j} \cdot J_0(\alpha R \sqrt{-j})}{2 J_1(\alpha R \sqrt{-j})}. \quad (3.5.4)$$

Keď do napísaného výrazu dosadíme funkcie ber_0 a bei_0 , dostaneme:

$$i(r) = \frac{I}{\pi R^2} \cdot \frac{\alpha R \sqrt{-j}}{2} \cdot \frac{ber_0(\alpha r) + j bei_0(\alpha r)}{\sqrt{-j} [bei_0(\alpha R) - j ber_0(\alpha R)]},$$

alebo, ak sa zbavíme imaginárnej jednotky v menovateli:

$$i(r) = \frac{I}{\pi R^2} \cdot \frac{\alpha R}{2} \cdot \frac{(ber_0(\alpha r) + jbei_0(\alpha r)) \cdot (bei'_0(\alpha R) + jber'_0(\alpha R))}{(bei'_0(\alpha R))^2 + (ber'_0(\alpha R))^2} =$$

$$= \frac{I}{\pi R^2} \cdot \frac{\alpha R}{2} \cdot \left[\frac{ber_0(\alpha r)bei'_0(\alpha R) - bei_0(\alpha r)ber'_0(\alpha R)}{(bei'_0(\alpha R))^2 + (ber'_0(\alpha R))^2} + \right.$$

$$\left. \frac{j(bei_0(\alpha r)bei'_0(\alpha R) + ber_0(\alpha r)ber'_0(\alpha R))}{(bei'_0(\alpha R))^2 + (ber'_0(\alpha R))^2} \right]$$

Vyčíslime modul a po jednoduchých operáciách bude:

$$|i(r)| = i_m = \frac{I}{\pi R^2} \cdot \frac{\alpha R}{2} \cdot \sqrt{\frac{(ber_0(\alpha r))^2 + (bei_0(\alpha r))^2}{(ber'_0(\alpha R))^2 + (bei'_0(\alpha R))^2}}. \quad (3.5.5)$$

Zmena fázového uhla sa určí výrazom:

$$\operatorname{tg}(\Delta\varphi) = \frac{bei_0(\alpha r)bei'_0(\alpha R) + ber_0(\alpha r)ber'_0(\alpha R)}{ber_0(\alpha r)bei'_0(\alpha R) - bei_0(\alpha r)ber'_0(\alpha R)}.$$

Tieto výrazy nám dajú riešenie postavenej úlohy a tým možno analýzu úlohy považovať za skončenú. My však ako príklad vyčíslenia Besselovými funkciami, prevedieme menší výpočet rozdelenia prúdu v kruhovom valcovom vodiči pre dve rôzne frekvencie zmien prúdu s časom.

Vezmime prípad: $\omega_1 = 314$ (50 periód za sekundu) a $\omega_1 = 314 \cdot 10^4$ ($5 \cdot 10^5$ periód za sekundu).

Materiál valca nech je daný hodnotami: $\sigma = 57 \cdot 10^{-5}$, $\mu = 1$. V takomto prípade pre α nájdeme:

$$\alpha_1 = \sqrt{4\pi\omega_1\sigma\mu} = \sqrt{4\pi \cdot 314 \cdot 57 \cdot 10^{-5} \cdot 1} \cong 0,444$$

$$\alpha_2 = \sqrt{4\pi\omega_2\sigma\mu} = \sqrt{4\pi \cdot 314 \cdot 10^4 \cdot 57 \cdot 10^{-5} \cdot 1} \cong 44,44$$

pomer amplitúdy i_m prúdu vo vnútri valca k amplitúde na jeho povrchu sa určí, ako vidieť zo vzorca (3.5.5), výrazom:

$$\frac{i_m}{i_{mR}} = \sqrt{\frac{(ber_0(\alpha r))^2 + (bei_0(\alpha r))^2}{(ber_0(\alpha R))^2 + (bei_0(\alpha R))^2}}.$$

Dosadíme $R = 1$ a vyčíslime pomer $\frac{i_m}{i_{mR}}$ pre $r = 0$ (na osi valca) a $r = 0,5$. Pre funkcie ber_0

a bei_0 , dostaneme:

$$\begin{aligned}
ber_0 0 &= 1 \\
bei_0 0 &= 0 \\
ber_0 0,222 &= 1 - 0,000036 + \dots = 0,999964 \\
bei_0 0,222 &= 0,0123 - 0,000002 + \dots = 0,01230 \\
ber_0 0,444 &= 1 - 0,00061 + \dots = 0,9939 \\
bei_0 0,444 &= 0,0493 - 0,0003 + \dots = 0,0490 \\
ber_0 0,222 &= 1 - 0,000036 + \dots = 0,999964 \\
ber_0 0,222 &= 1 - 0,000036 + \dots = 0,999964 \\
(ber_0 0)^2 + (bei_0 0)^2 &= 1 \\
(ber_0 0,222)^2 + (bei_0 0,222)^2 &= 1,00008 \\
(ber_0 0,444)^2 + (bei_0 0,444)^2 &= 1,0012
\end{aligned}$$

Takto hľadaný pomer pre body na osi valca má hodnotu 0,9994 a pre body, nachádzajúce sa vo vzdialenosti polovice polomeru je to 0,9999. Pri hodnote $\alpha = 44$, je vyčíslenie pomeru amplitúd vhodnejšie previesť na základe výrazu (3.5.4) a s použitím asymptotických vyjadrení funkcií $J_0(\alpha r \sqrt{-j})$ a $J_1(\alpha R \sqrt{-j})$. Pri veľkých hodnotách argumentu platia rovnice:

$$\begin{aligned}
J_0(\alpha r \sqrt{-j}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha r}} \cdot e^{\frac{\alpha r}{2} - j\left(\frac{\alpha r}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right)}, \\
J_1(\alpha R \sqrt{-j}) &= \frac{j}{\sqrt{2\pi\alpha R}} \cdot e^{\frac{\alpha R}{2} - j\left(\frac{\alpha R}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right)}.
\end{aligned}$$

Dosadíme tieto hodnoty Besselových funkcií do rovnice (3.5.4) a dostaneme:

$$i(r) = \frac{I}{\pi R^2} \cdot \frac{\alpha R \sqrt{-j}}{2} \cdot \frac{1}{j} \sqrt{\frac{R}{r}} \cdot e^{\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(r-R) - j\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(r-R) - \frac{\pi}{8}\right)} = \frac{I}{\pi R^2} \cdot \frac{\alpha R \sqrt{j}}{2} \sqrt{\frac{R}{r}} \cdot e^{\alpha(r-R)\frac{1-j}{\sqrt{2}}}.$$

Modulom komplexného čísla v poslednom vzorci bude:

$$i_m = \frac{I}{\pi R^2} \cdot \frac{\alpha R}{2} \sqrt{\frac{R}{r}} \cdot e^{\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(r-R)}.$$

Preto

$$\frac{i_m}{i_{mR}} = \sqrt{\frac{R}{r}} \cdot e^{\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(r-R)}.$$

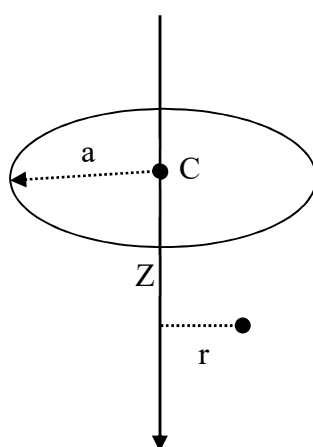
Pri $r = 0,5$ a $R = 1$ dostaneme:

$$\frac{i_m}{i_{mR}} = \sqrt{2} \cdot e^{-\alpha \frac{\sqrt{2}}{4}}.$$

Tento výsledok svedčí o neobyčajne rýchlom zmenšení prúdu s hrúbkou vodiča pri vysokých frekvenciách.

3.6 Odpor uzemnenia v tvare disku

V niektorých prípadoch geoelektrickej praxe treba použiť uzemnenie nie v tvare tyčí, ale ploché (bývajú to nepolarizovateľné elektródy s roztokom modrej skalice), kde v dotyku so zemou môžeme približne považovať elektródu za disk. Ako príklad na použitie Besselových funkcií vyčíslime odpor takéhoto uzemnenia. Úlohu naformulujeme nasledovne: na povrchu rovnorodej pôdy o mernej elektrickej vodivosti σ je položená kruhová elektróda C (**Obr. 12**) s polomerom a , cez ktorú sa sýti pôda prúdom I . Chceme zistiť odpor kladený prúdu takýmto uzemnením. Predpokladajme, že vodivosť materiálu elektród je značne vyššia ako vodivosť zeme a elektródu takto možno považovať za ekvipotenciálnu.



Obr. 12: Schéma k úlohe o uzemnení v tvare disku

Vstupnou rovnicou pri riešení danej úlohy je Laplaceova rovnica potenciálu v celom priestore, majúca v našom prípade opäť tvar:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (3.6.1)$$

Orientácia cylindrického systému je uvažovaná rovnako, ako v predošlých úlohách spolu s vlastnosťou symetrie vzhľadom na ekvatoriálny uhol. Riešenie napísanej rovnice musí byť zvolené tak, aby vyhovoval nasledujúcim podmienkam:

1. v nekonečne vzdialených bodoch má potenciál nulovú hodnotu
2. v bodoch disku, teda keď $0 \leq r \leq a$ má potenciál konštantnú hodnotu φ_0
3. v každom bode priestoru je potenciálová funkcia konečná.

Riešenie rovnice (3.6.1) už poznáme:

$$\varphi(r, z) = \int_0^\infty A(m) e^{-mz} J_0(rm) dm. \quad (3.6.2)$$

Lahko sa presvedčíme, že rovnica napísaná v takomto tvare vyhovuje podmienkam 1 a 3. Pokiaľ ide o podmienku 2, treba rozobrať funkciu $A(m)$. Aby podmienka 2 bola splnená, je nevyhnutné aby:

$$\varphi_1(r, 0) = \int_0^{\infty} A(m) e^{-mz} J_0(rm) dm = \varphi_0 = \text{const.}$$

pri $r \leq a$. Obrátime sa k Besselovým integrálom a využijeme nasledujúci:

$$\int_0^{\infty} J_0(rm) \frac{\sin am}{m} dm,$$

ktorý má tú vlastnosť, že pri $a \geq r$ má hodnotu $\frac{\pi}{2}$ a pri $a < r$ je jeho hodnota $\arcsin \frac{a}{r}$.

Zvolíme preto $A(m)$ v integráli (3.6.2) rovným $\frac{\sin am}{m} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \varphi_0$ a dostaneme riešenie vyhovujúce podmienke 2. Takto konečne dostaneme:

$$\varphi(r, z) = \frac{2\varphi_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin am}{m} e^{-mz} J_0(rm) dm.$$

Derivujeme túto rovnicu podľa z a výsledok násobíme (-1) a dostaneme.

$$-\frac{\partial \varphi(r, z)}{\partial z} = E_z = \frac{2\varphi_0}{\pi} \int_0^{\infty} \sin am \cdot e^{-mz} J_0(rm) dm,$$

t.j. výraz pre zložku poľa pozdĺž osi z . Pri $z = 0$ sa táto zložka určí výrazom:

$$E_{z_0} = \frac{2\varphi_0}{\pi} \int_0^{\infty} \sin am \cdot J_0(rm) dm$$

Pri $r < a$ integrál v pravej časti rovnice, má, ako je známe, hodnotu:

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 - r^2}},$$

preto v hraniciach disku je:

$$E_{z_0} = \frac{2\varphi_0}{\pi \sqrt{a^2 - r^2}}$$

Pomocou napätia poľa v bodoch disku môžeme s použitím Gaussovej vety vyčíslit' náboj

$Q = \frac{1}{2\pi a}$ jednej jeho strany podľa vzorca:

$$2\pi Q = \int_0^a 2\pi r \cdot E_{z_0} dr = \frac{2\varphi_0}{\pi} \cdot 2\pi \int_0^a \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}} dr = 4\varphi_0 a$$

Poslednú rovnicu možno použiť v tvare:

$$\frac{I}{2a} = 2\varphi_0 a.$$

Vyčíslime nakoniec podľa vzorca $R = \frac{\varphi_0}{I}$ pre odpor uzemnenia dostaneme.

$$R = \frac{1}{4\sigma a}, \quad (3.6.3)$$

čím môžeme považovať úlohu za vyriešenú.

Literatúra

- Bell, W.W., 1968: Special functions for scientists and engineers. D. van Nostrand Company, Ltd., London, 247 p.
- Korenev, B.G., 2002: Bessel functions and their applications. Taylor and Francis, 276 p.
- Lebedev, N.N., 1965: Special functions and their applications. Prentice-Hall, Inc. (English edition translated by R. Silverman), 308 p.
- Nemes, G., 2010: New asymptotic expansion for the Gamma function. Arch. Math. **95**, 161-169.
- Watson, G.N., 1966: A treatise on the theory of Bessel functions. Cambridge University Press, 804 p.
- Zaborovskij, A.N., 1939: Špeciálne funkcie v geofyzike. Vydavateľstvo Gonti (v ruštine).