

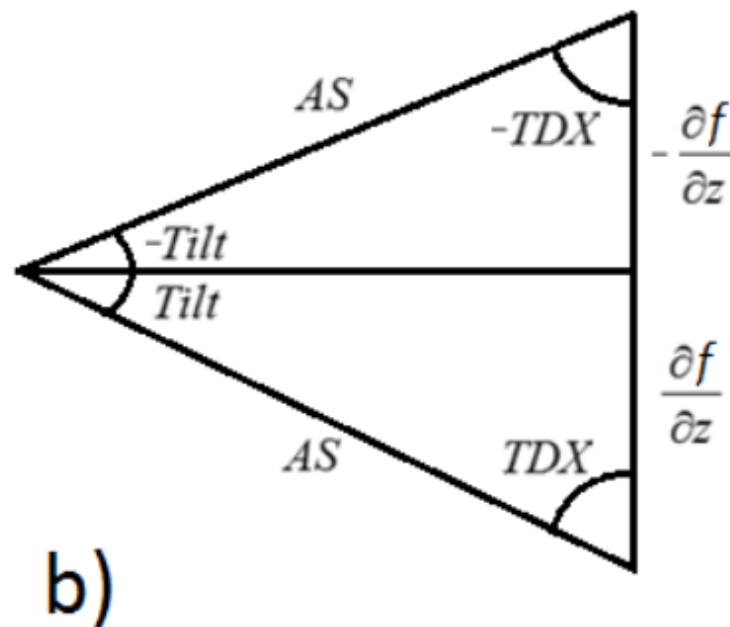
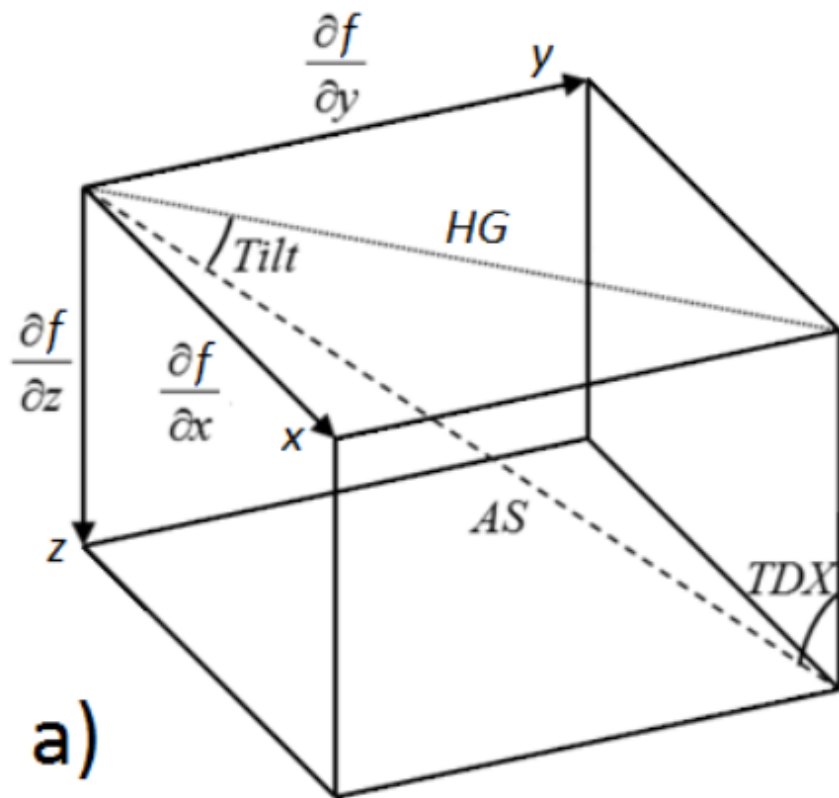
Transformácie v magnetometrii:

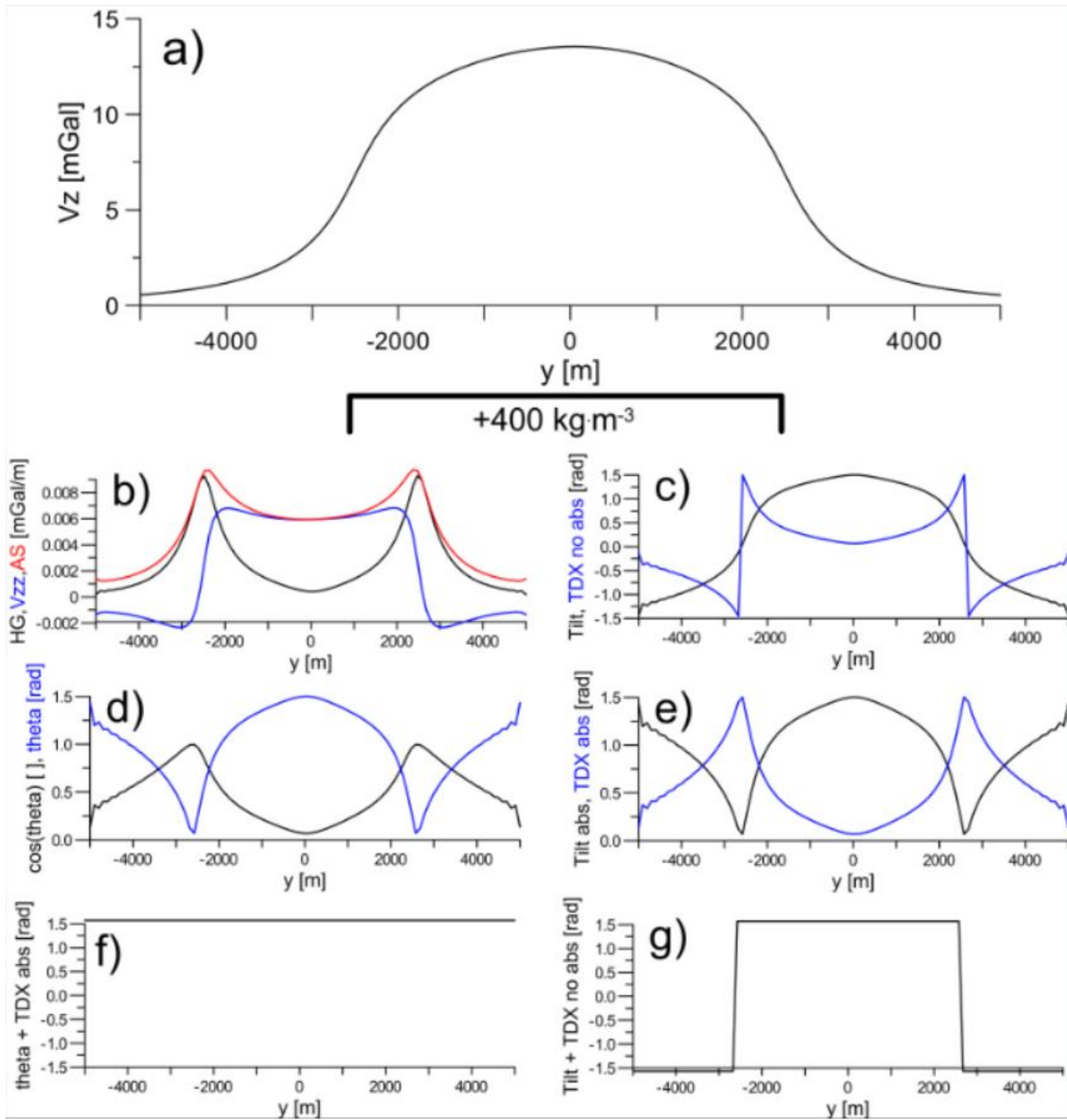
- výpočet vyšších derivácií
(vertikálnych, horizontálnych)
a z nich sa počíta tzv. analytický signál (AS)
ale aj ďalšie pomery derivácií
- analytické pokračovanie nahor/nadol
- tzv. redukcia na pól (RTP – reduction to pole)
(pole ΔT sa prepočíta, ako keby bolo odmerané
na magnetickom póle – potláča sa tým jeho
dipólový charakter)
- transformácia zložky H na Z: (Hilbertova transf.)

výpočet vyšších derivací a ich pomerov

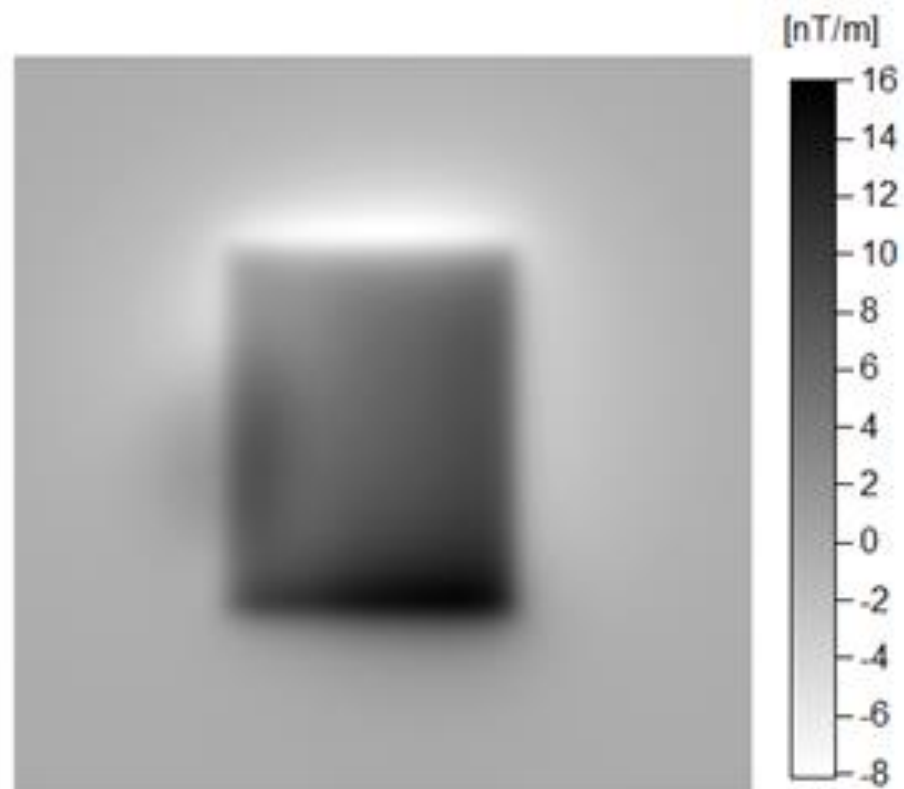
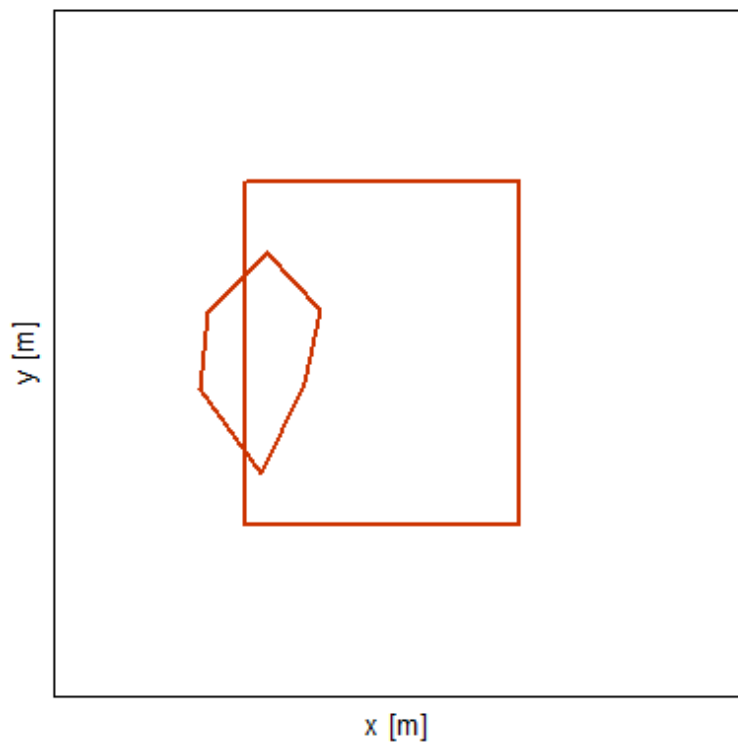
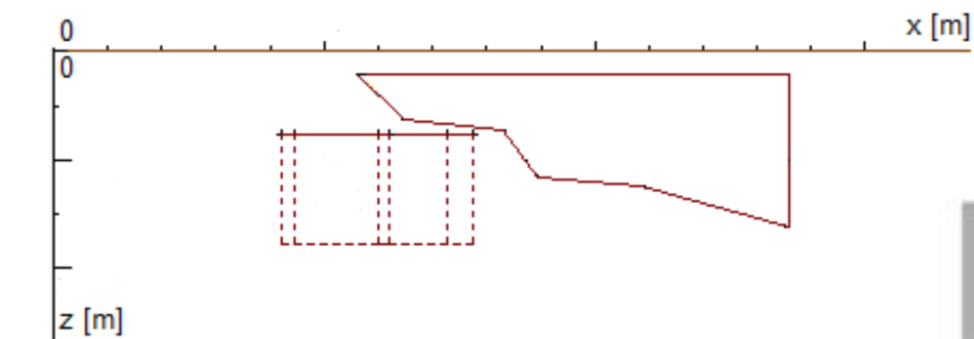
- derivatives of the input field: $\partial f / \partial x$, $\partial f / \partial y$ and $\partial f / \partial z$,
- horizontal gradient: $HG = \sqrt{(\partial f / \partial x)^2 + (\partial f / \partial y)^2}$,
- analytical signal: $AS = \sqrt{(\partial f / \partial x)^2 + (\partial f / \partial y)^2 + (\partial f / \partial z)^2}$,
- tilt derivative: $\text{tilt} = \arctg \frac{\partial f / \partial z}{HG}$, (Miller and Singh, 1994; Verduzco et al., 2004)
- theta derivative: $\cos(\theta) = \frac{HG}{AS}$, (Wijns et al., 2005)
- TDX derivative: $TDX = \arctg \frac{HG}{\partial f / \partial z}$, (Cooper and Cowan, 2006)
- TDXAS transformation: $TDXAS = TDX \cdot AS$, (Stampolidis and Tsokas, 2012)

výpočet vyšších derivací a ich pomerov

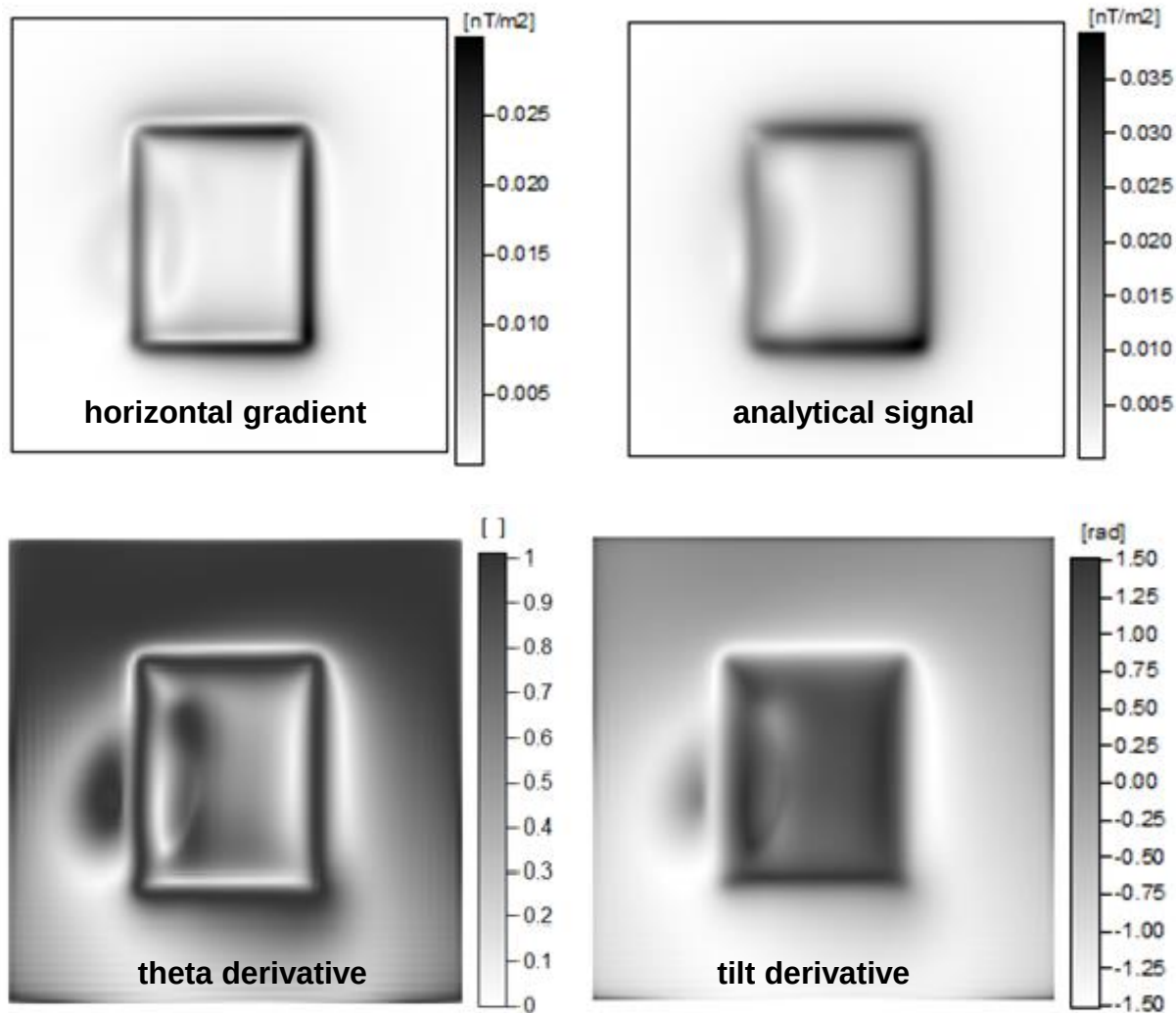




synthetické údaje: model s 2 hranolmi:



synthetické údaje: model s 2 hranolmi:



- horizontal gradient: $HG = \sqrt{(\partial f / \partial x)^2 + (\partial f / \partial y)^2}$,
- analytical signal: $AS = \sqrt{(\partial f / \partial x)^2 + (\partial f / \partial y)^2 + (\partial f / \partial z)^2}$,
- tilt derivative: $\text{tilt} = \arctg \frac{\partial f / \partial z}{HG}$,
- theta derivative: $\cos(\theta) = \frac{HG}{AS}$,

tzv. Bishop model
(ľudia okolo SEG
grav/mag
commitee)

vzaný normálny
reliéf – posunutý
nadol (A) a na jeho
úrovni namodelované
utvary s rôznou
magn. suscept. (B)

(C) – pole ΔT ,

(D) – RTP z poľa ΔT .

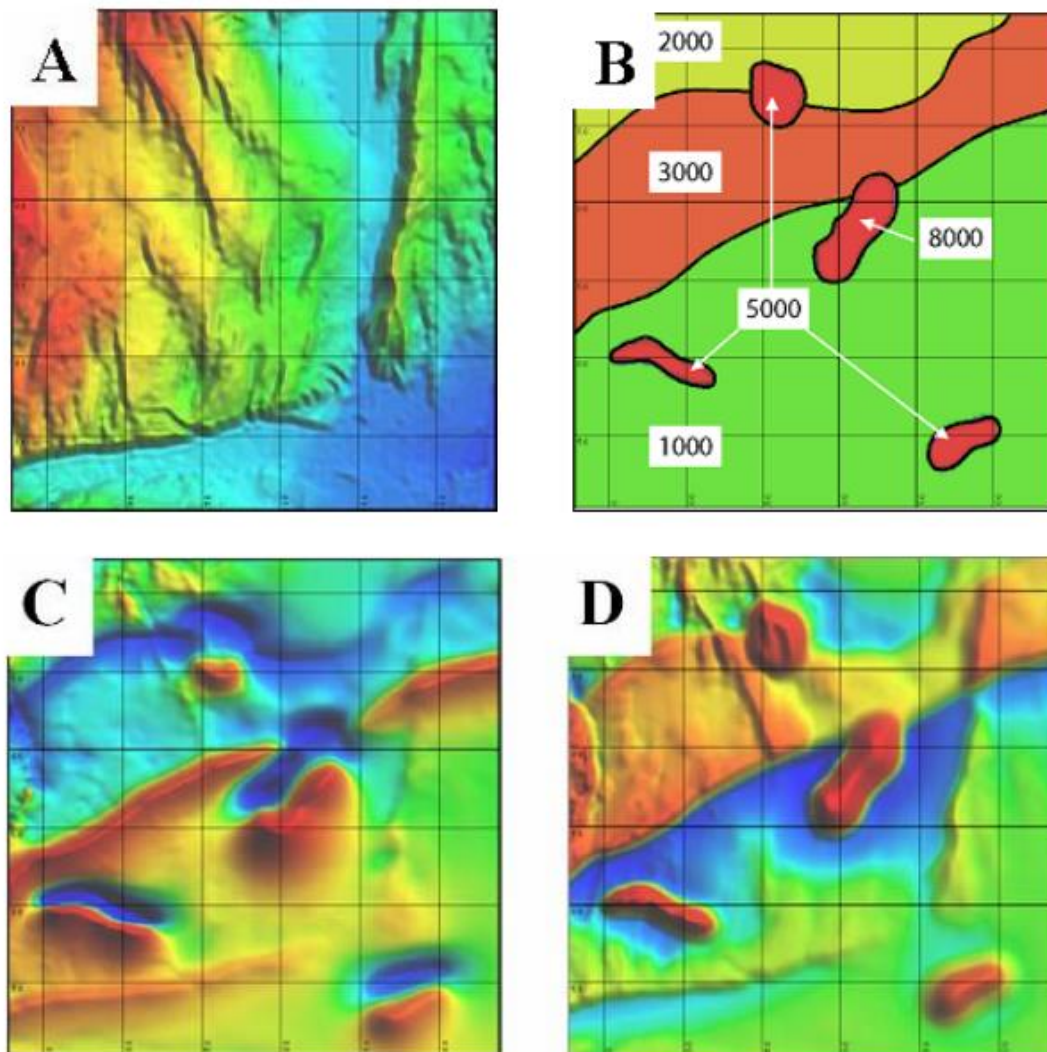


Figure: (A) 3D basement model varying in depth from 1km (NW corner) to 9km (SE corner); (B) Susceptibility map of the basement surface in units of micro cgs. All interfaces are vertical; (C) TMI model field for Inclination 25°, Declination 0° and Geomagnetic field of 50,000 nT; (D) Reduced To the Pole (RTP) response of (C).

tzv. Bishop model
(ľudia okolo SEG
grav/mag
commitee)

(A) – totálny horiz.
gradient,
(B) – vertik. deriv.

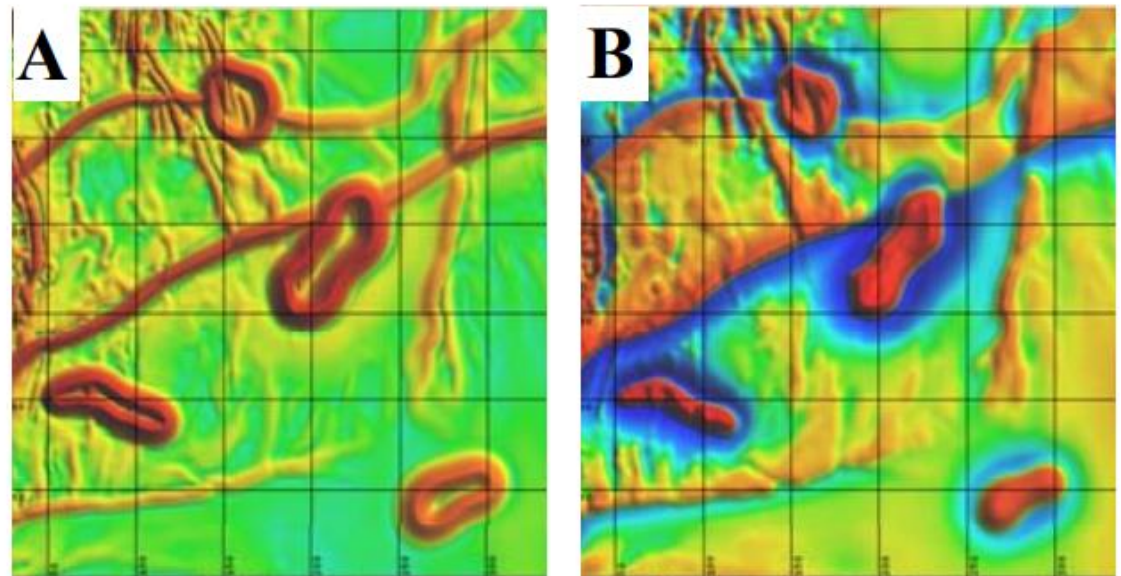
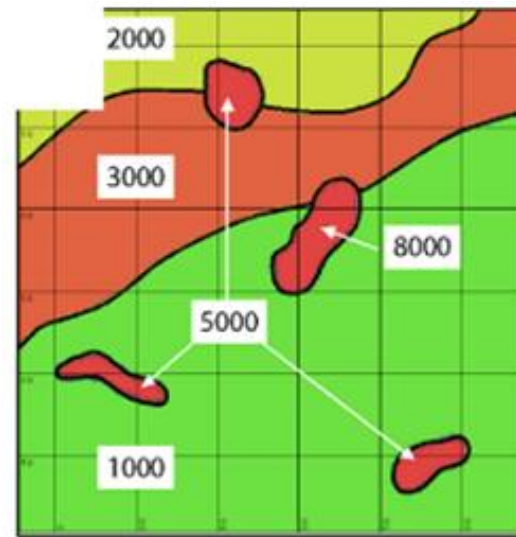
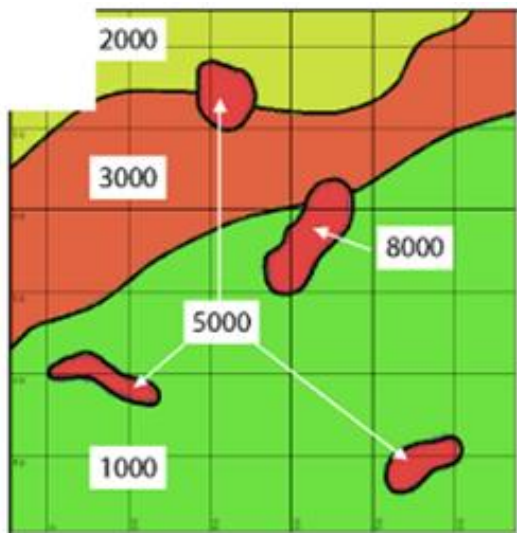


Figure: (A) Horizontal Derivative and (B) Vertical Derivative, both displayed with histogram equalized color.



- (A) – tilt derivácia (uhol),
- (B) – TDX derivácia (uhol),
- (C) – theta derivácia
- (D) – nulové hodnoty vert. derivácie (čierna farba)

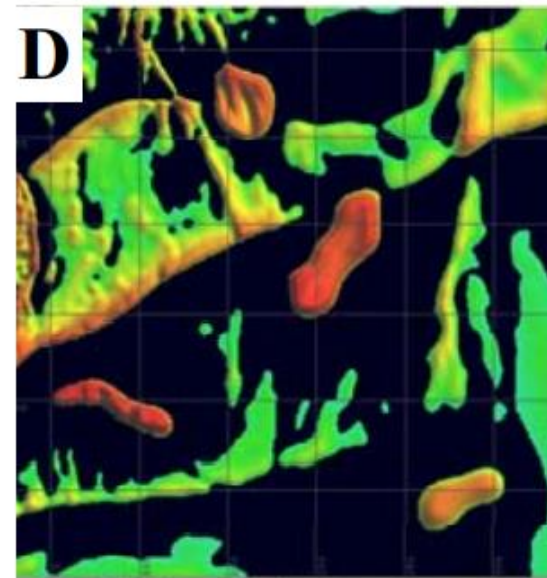
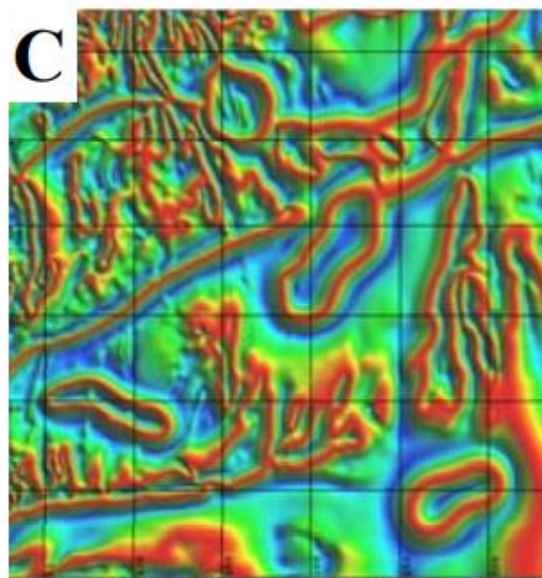
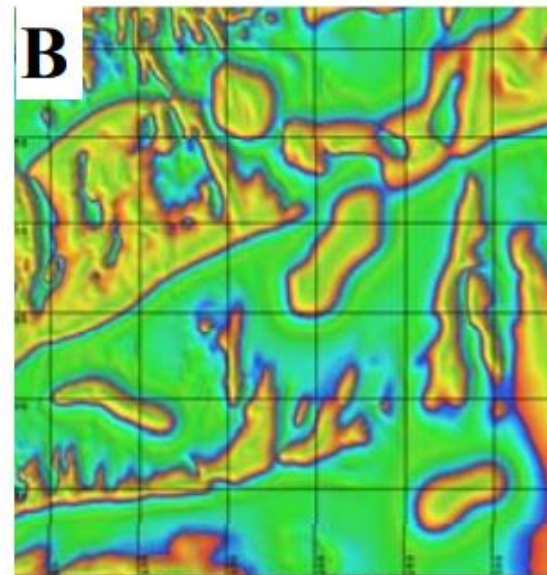
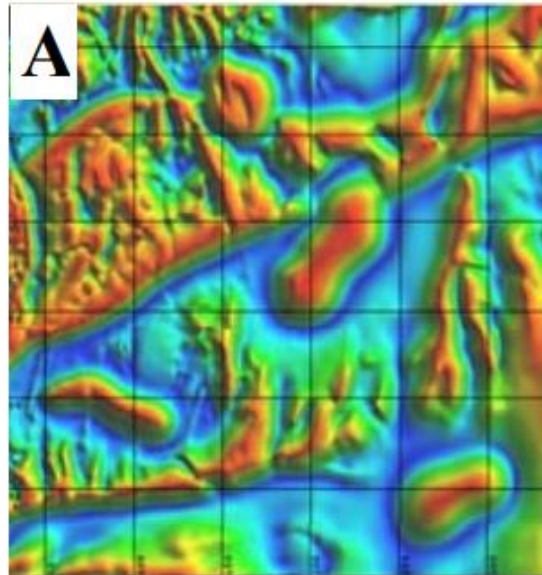
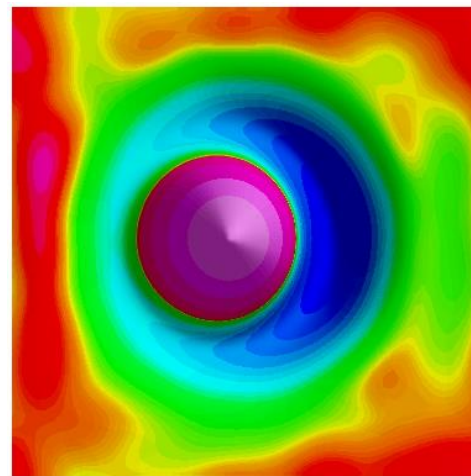
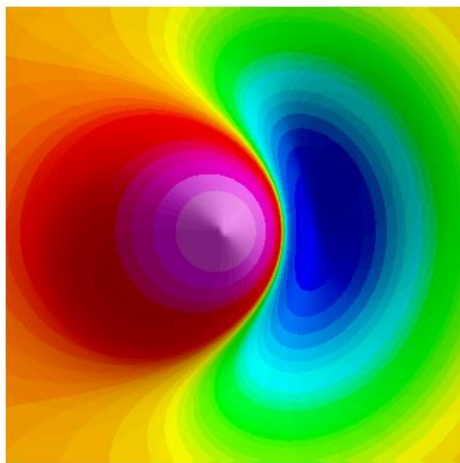


Figure: (A) Tilt, (B) TDX and (C) Theta map derivatives for RTP data, and comparison with zero crossing of the vertical derivative (D).

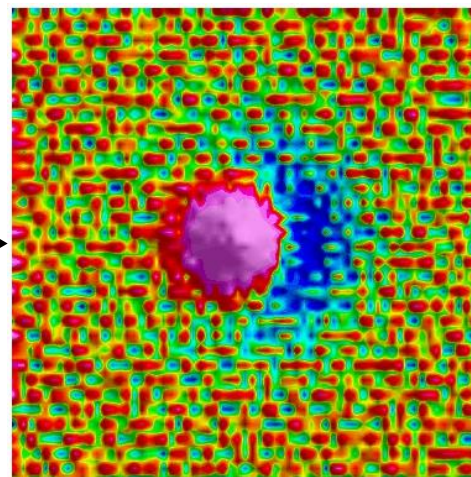
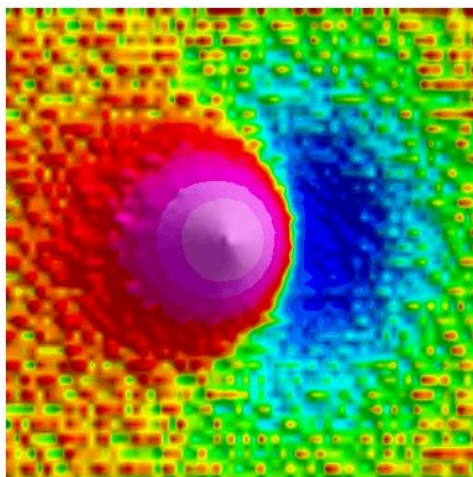
problém: nestabilita pri výpočte numerických derivácií

pole ΔT gule



numericky
spočítaná
vertikálna
derivácia

pole ΔT gule
(plus 5% šum)



numericky
spočítaná
vertikálna
derivácia
(zosilnenie
šumu)

možné riešenie = stabilizácia pomocou Tichonovovej regularizácie

namiesto spektrálnej charakteristiky
pre deriváciu (ik) v spektrálnej oblasti
sa použije nasledujúci filter:

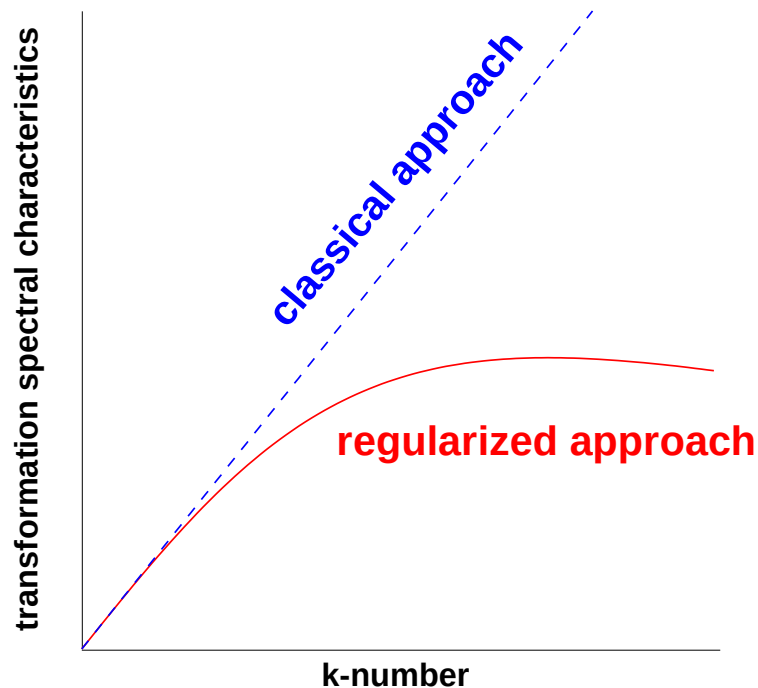
$$\tilde{y}(k) = \frac{1}{1 + \alpha k^2} ik \tilde{U}_\delta(k)$$

kde: k – vlnové číslo (spektr. premenná),

α – regularizačný parameter,

$\tilde{U}_\delta(k)$ – spektrum pôvodnej funkcie,

$\tilde{y}(k)$ – spektrum regular. derivácie.



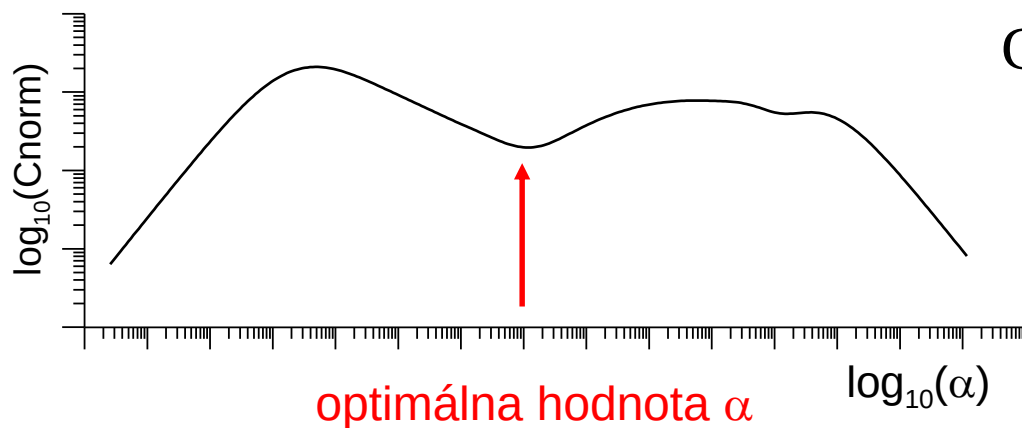
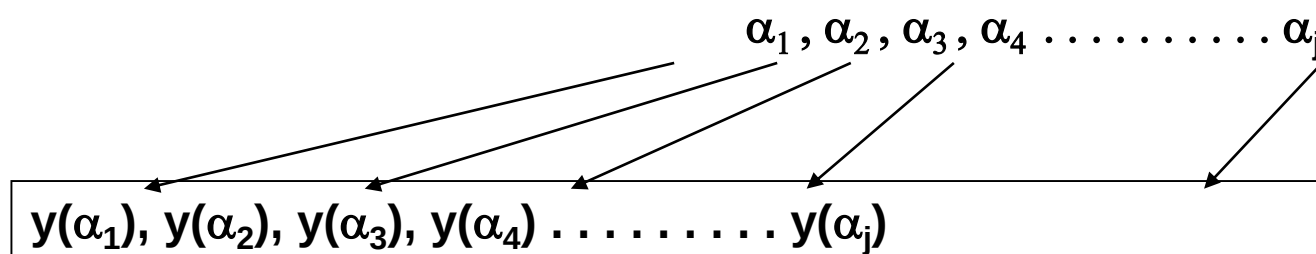
Ako nájsť optimálnu hodnotu α ?

Viacej spôsobov, ale jeden dôležitý je založený na konštrukcii tzv. C-noriem ako funkcií a (Tikhonov, Glasko 1965):

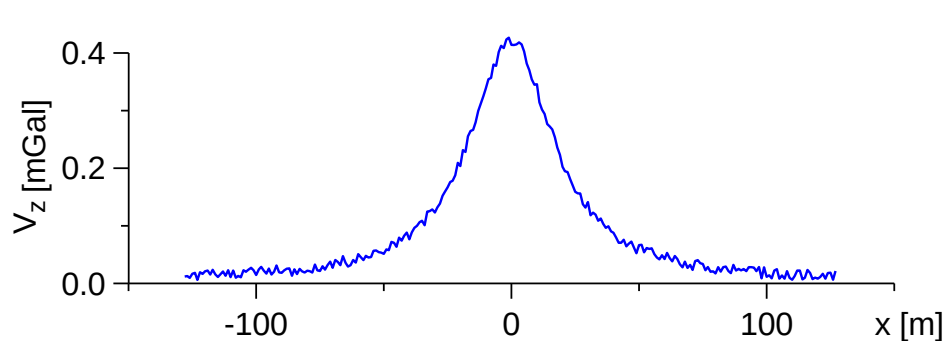
analyzuje sa postupnosť riešení $y(\alpha_i)$ pre po sebe idúce hodnoty geometrickej postupnosti α_i (typický interval α : $\langle 10^{-10}, 10^{10} \rangle$, $q=1.1$)

$$\frac{1}{1+\alpha k^2} i k$$

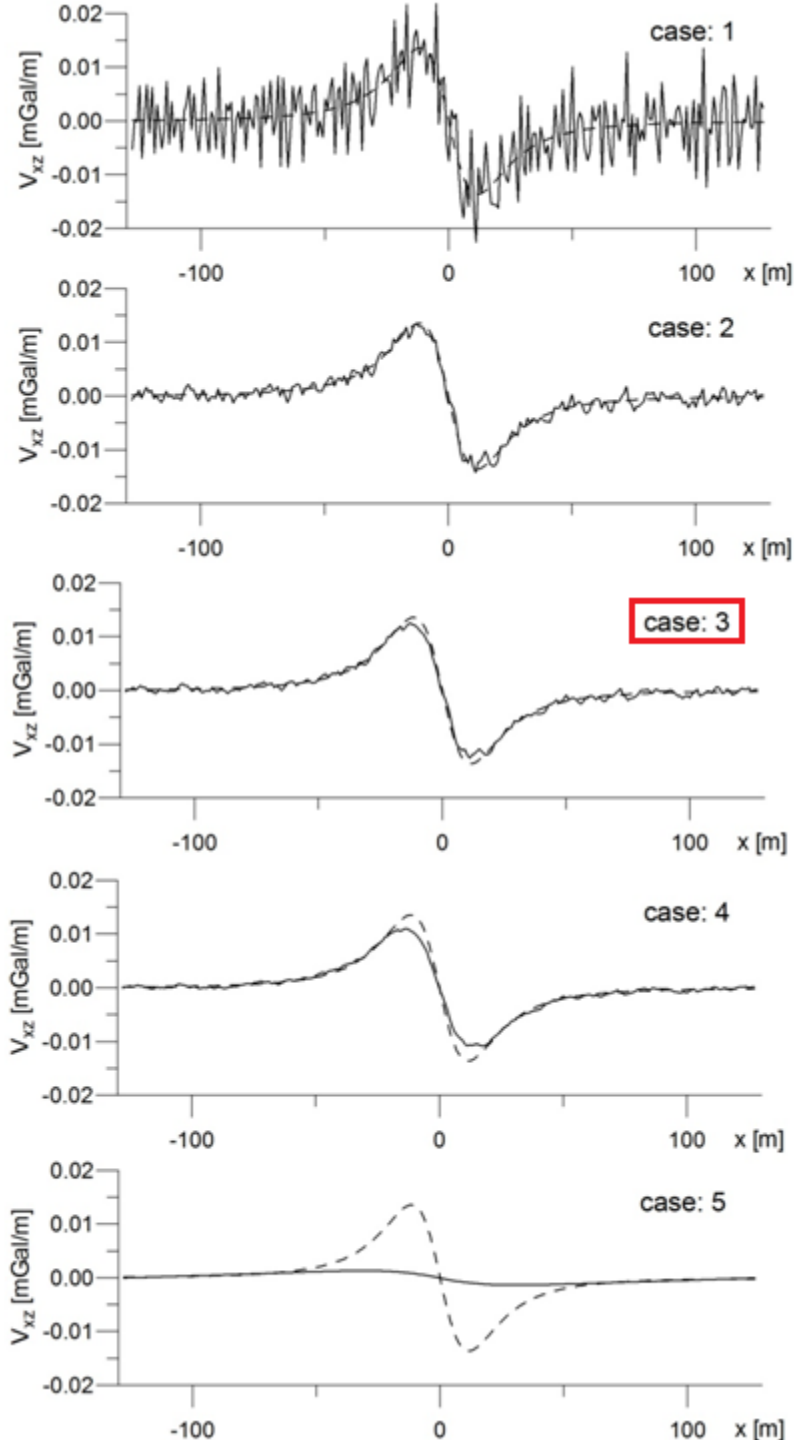
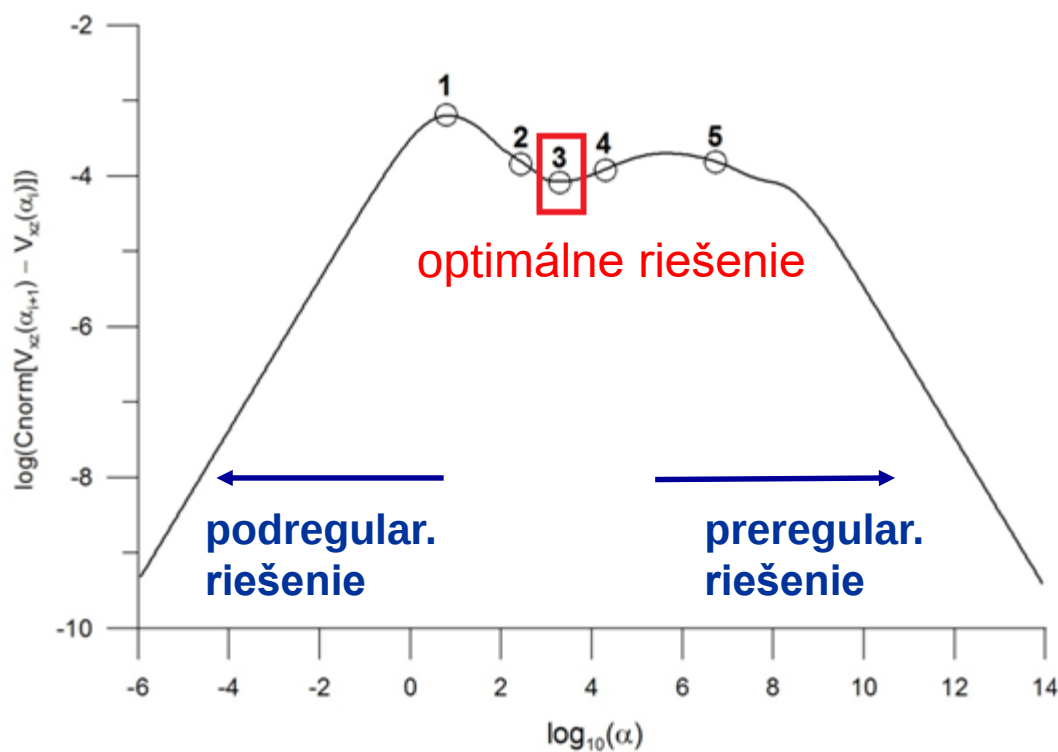
↓



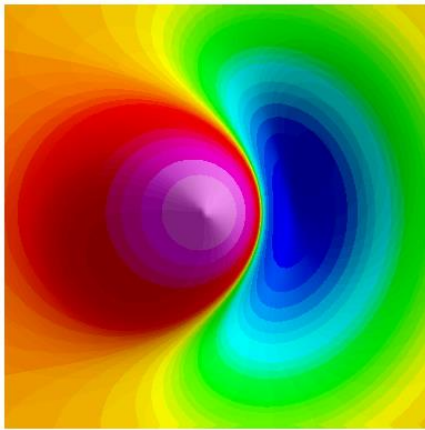
$$C_{\text{norm}} = \max |y(\alpha_{i+1}) - y(\alpha_i)|$$



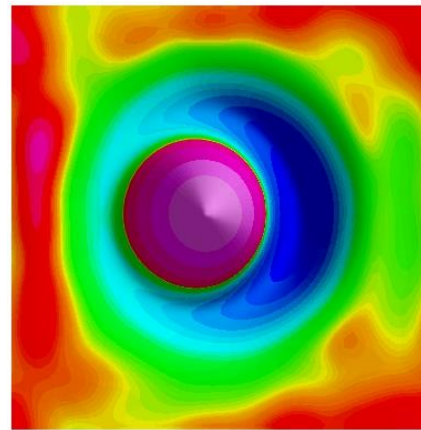
Príklad: analýza C-noriem
(pre x-ovú deriváciu poľa V_z pre horiz. valec)



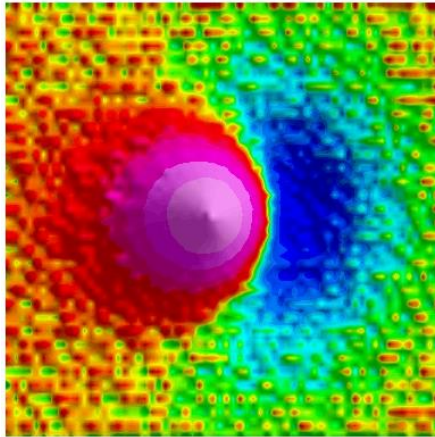
pole ΔT gule



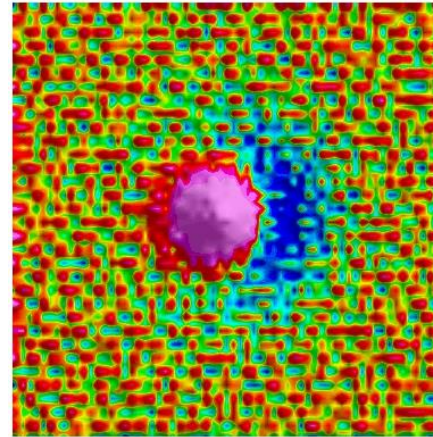
numericky
spočítaná
vertikálna
derivácia



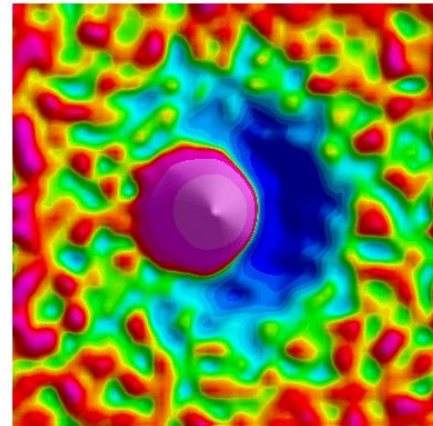
pole ΔT gule
(plus 5% šum)



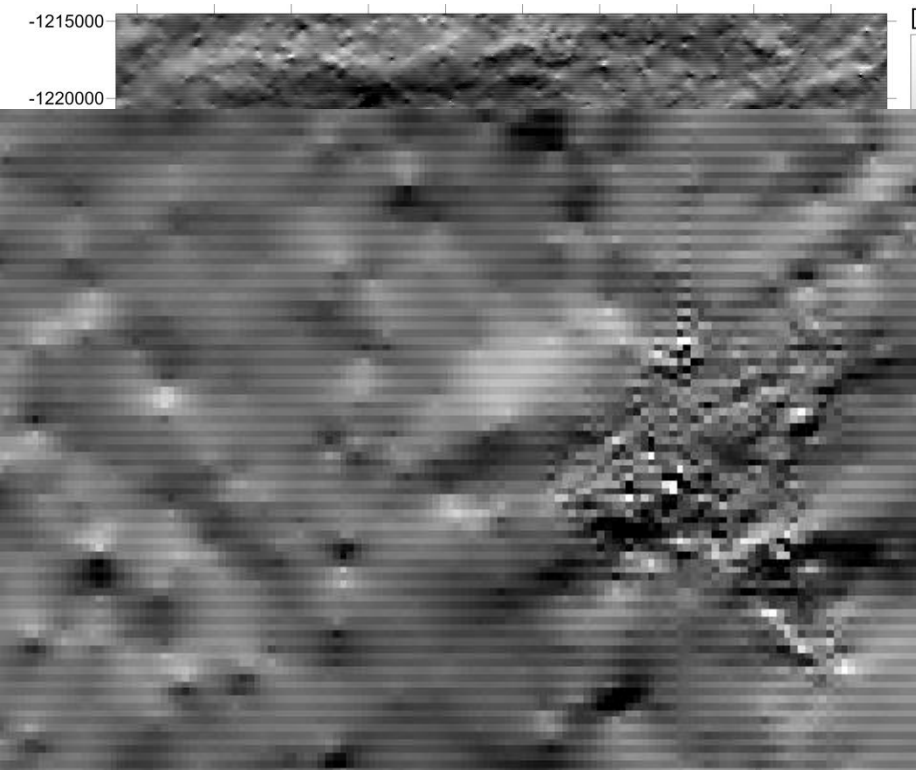
štandardne
numericky
spočítaná
vertikálna
derivácia
(zosilnenie
šumu)



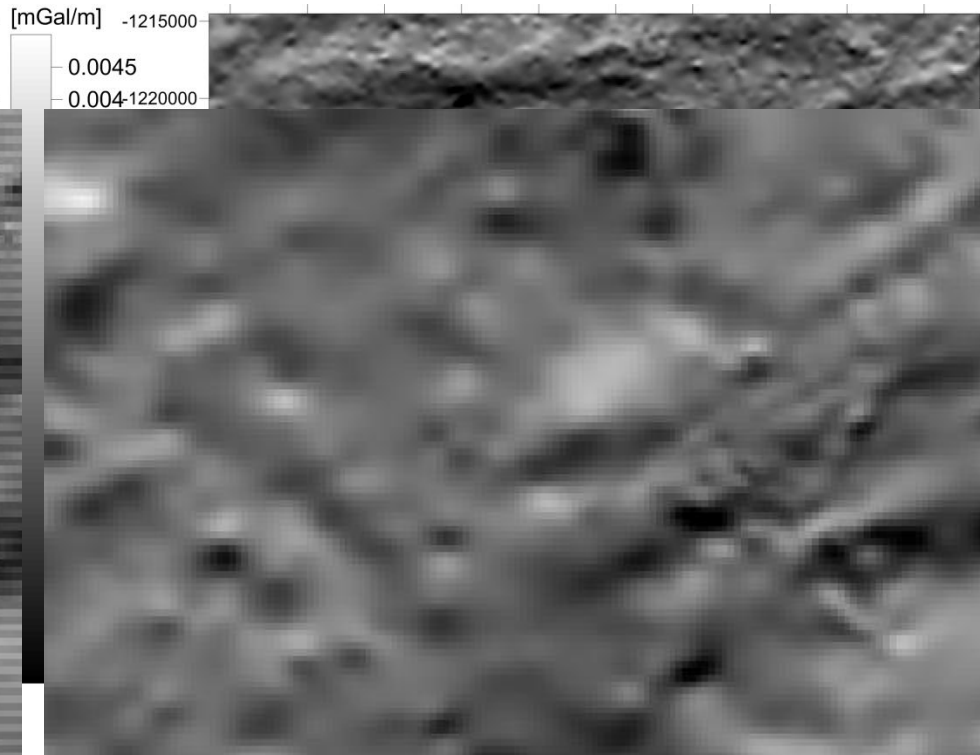
regularizovaná
vertikálna
derivácia
(potlačenie
šumu)



príklad použitia regularizovaných derivácií (časť ÚBA SR)



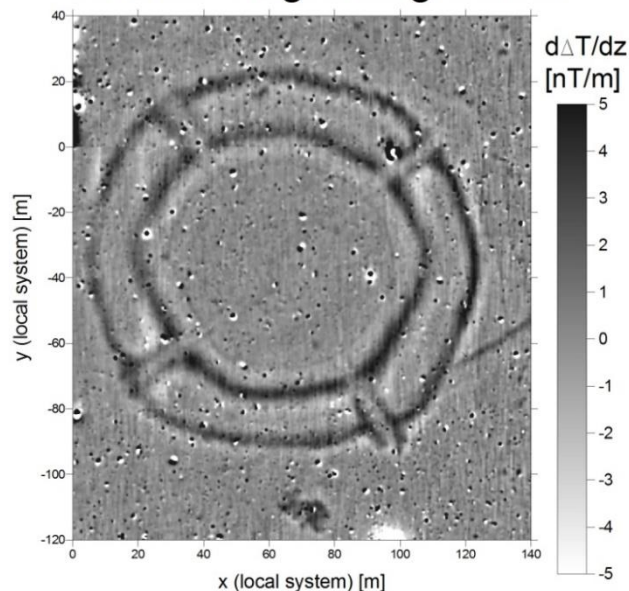
štandardná y-derivácia
(bez regularizácie)



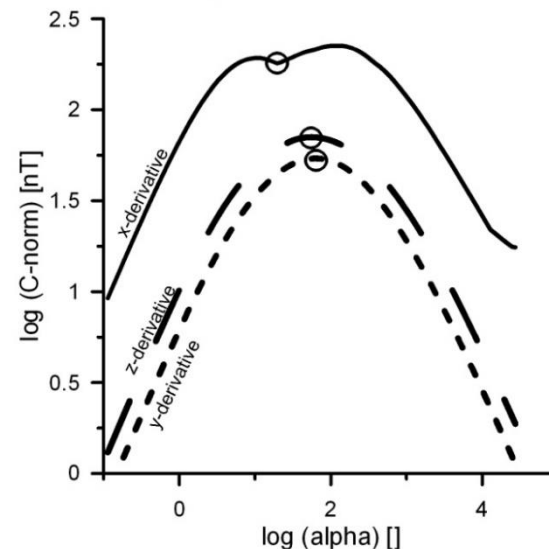
regularizovaná y-derivácia
(vyhladená)

lokalita Milovice (ČR)

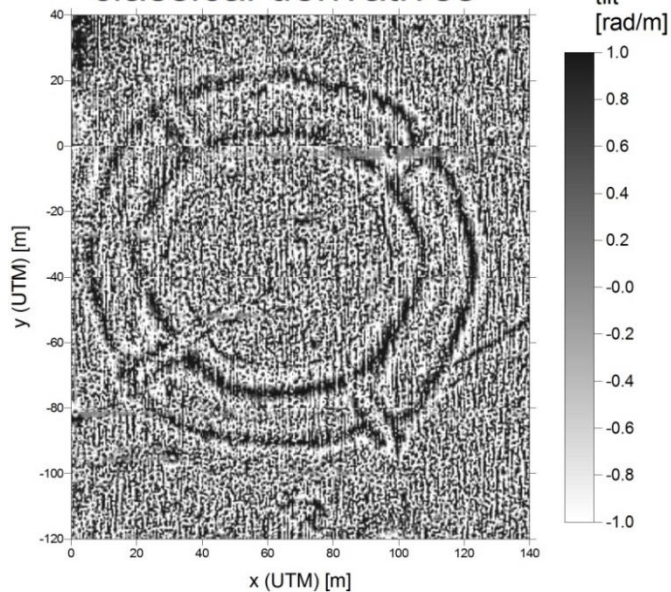
a) original field:
vertical magnetic gradient



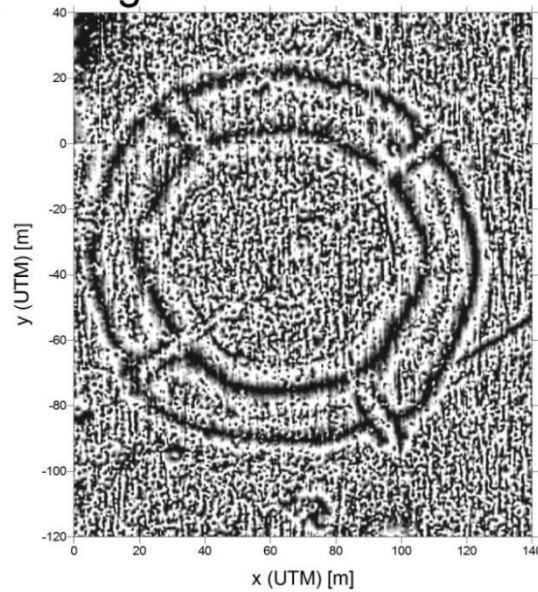
b) C-norm functions, used
in regularized derivatives
evaluation

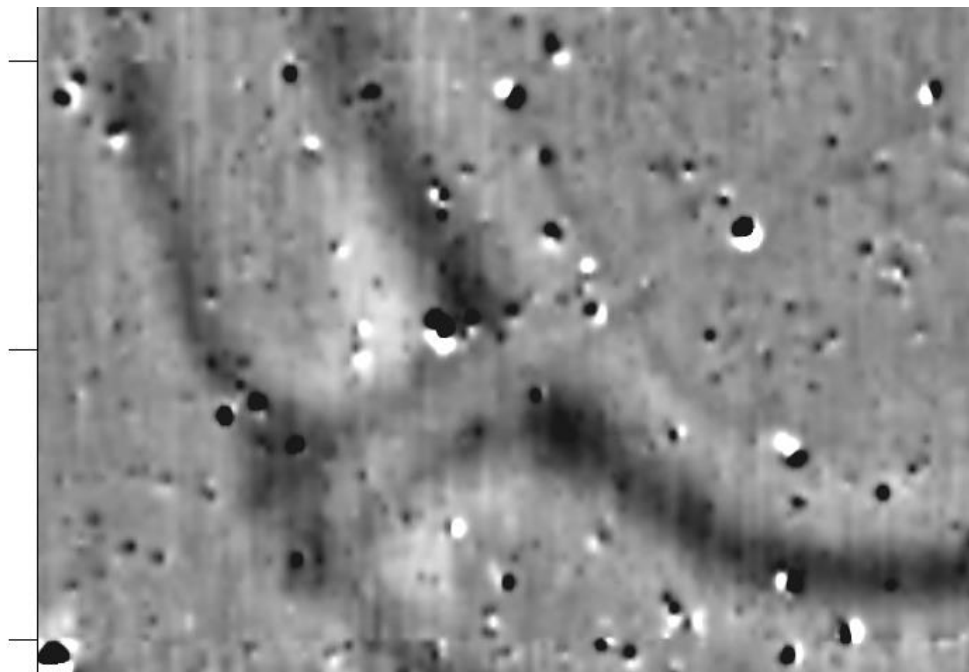


c) tilt-derivative with
classical derivatives



d) tilt-derivative with
regularized derivatives



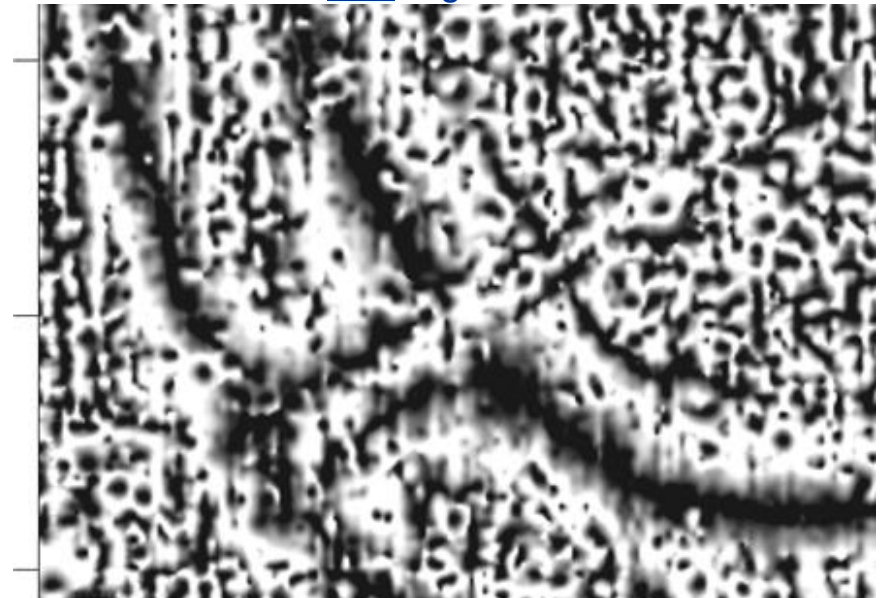


detail – original
field

without regularization

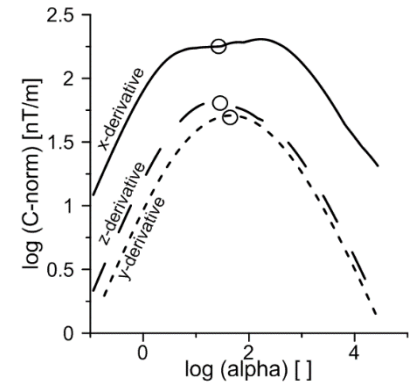
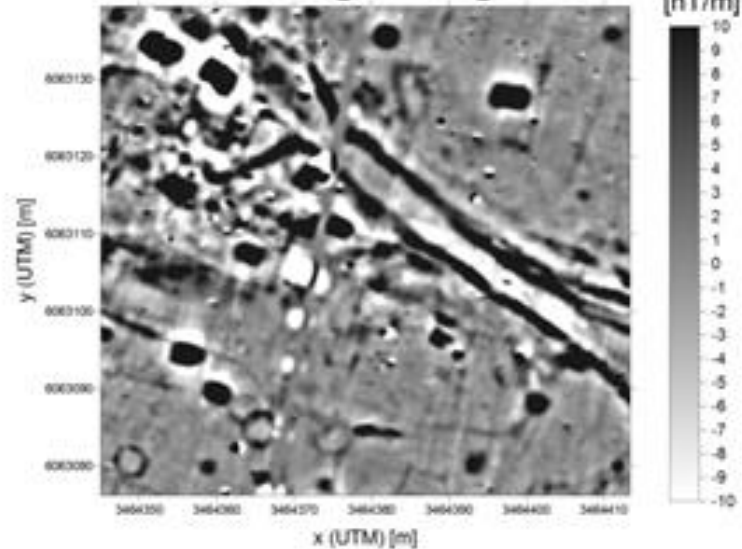
tilt-derivative

with regularization

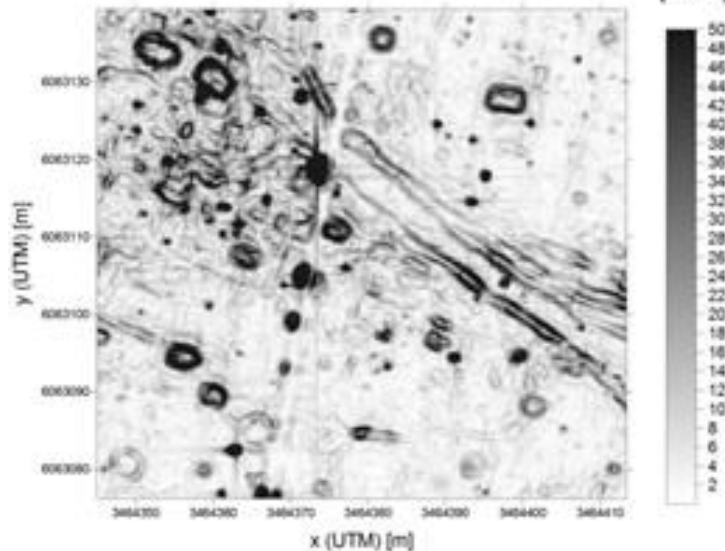


lokalita
Witsum
(sev. Nemecko)

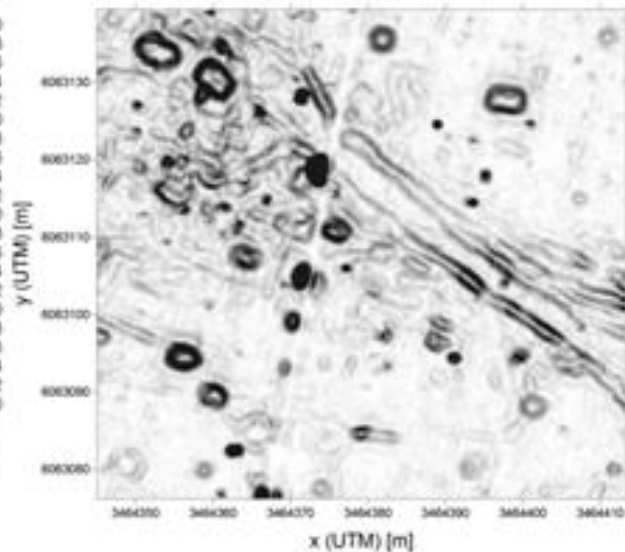
a) original field:
vertical magnetic gradient

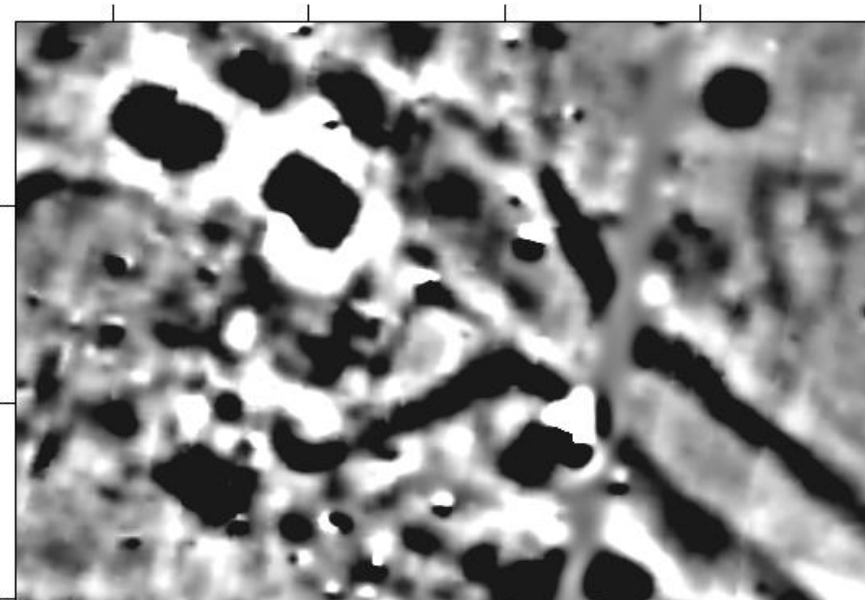


b) horizontal gradient
with classical derivatives



c) horizontal gradient
with regularized derivatives



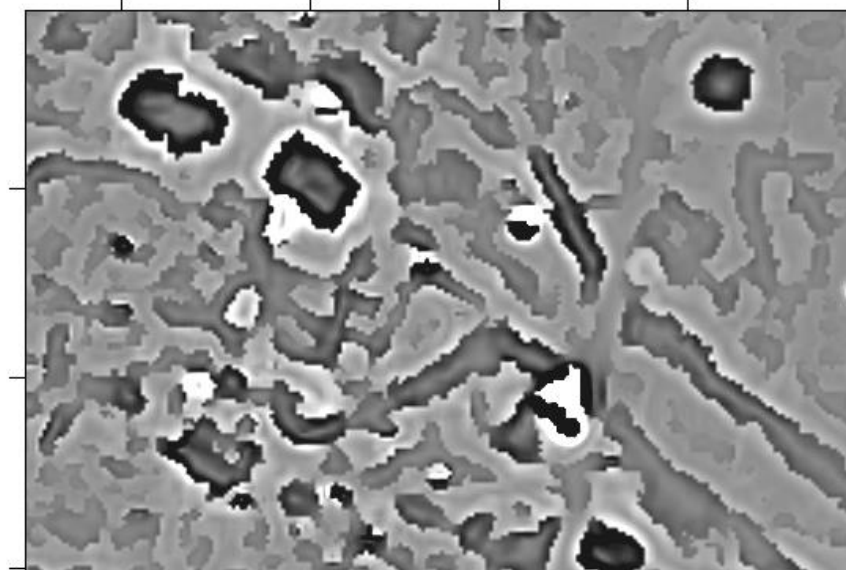
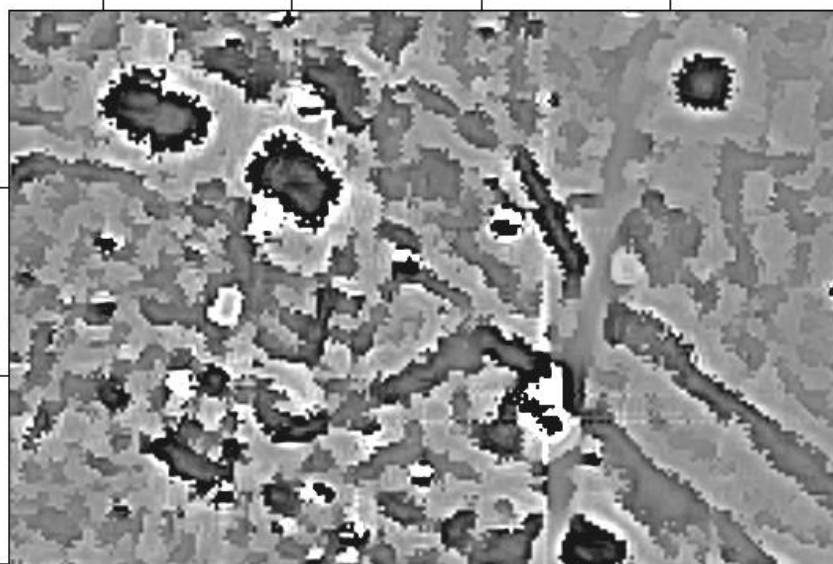


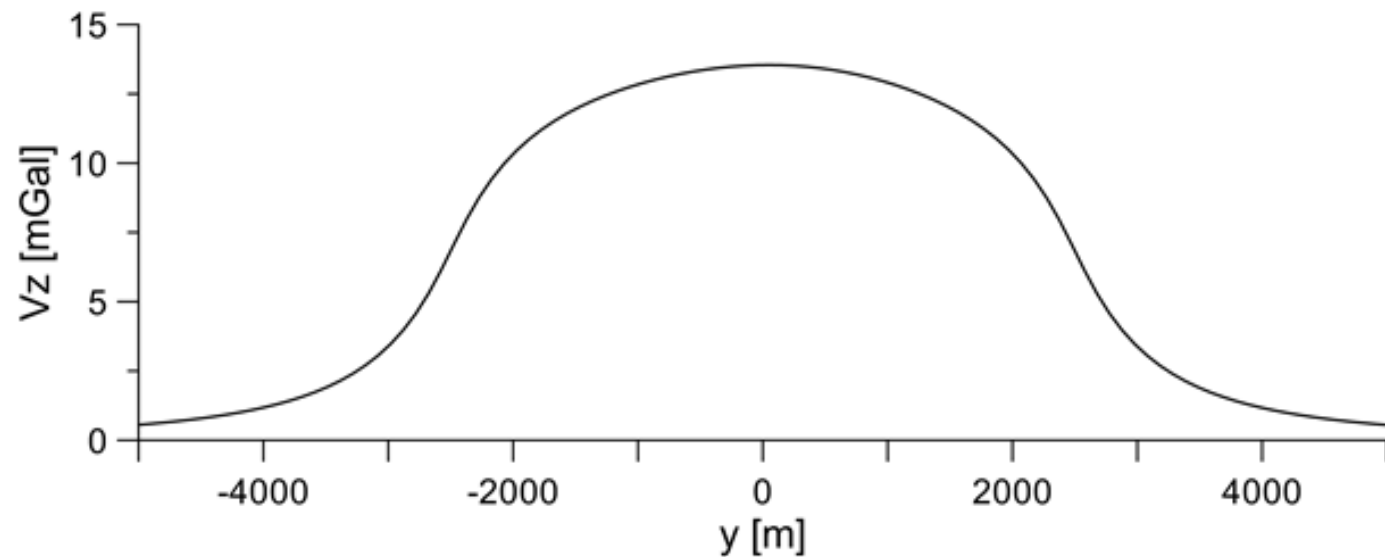
detail – original
field

without regularization

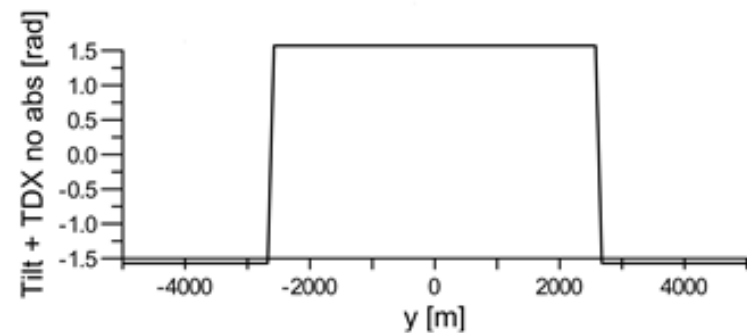
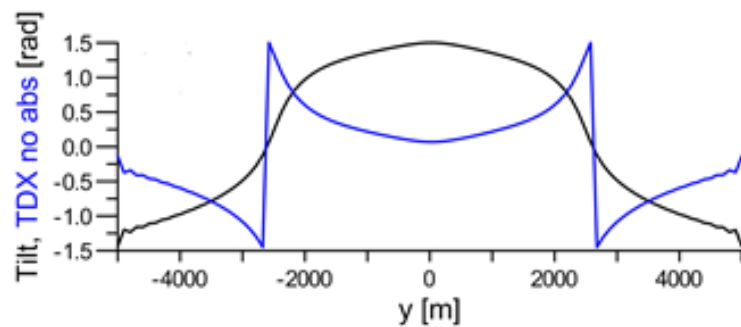
TDXAS transformation

with regularization



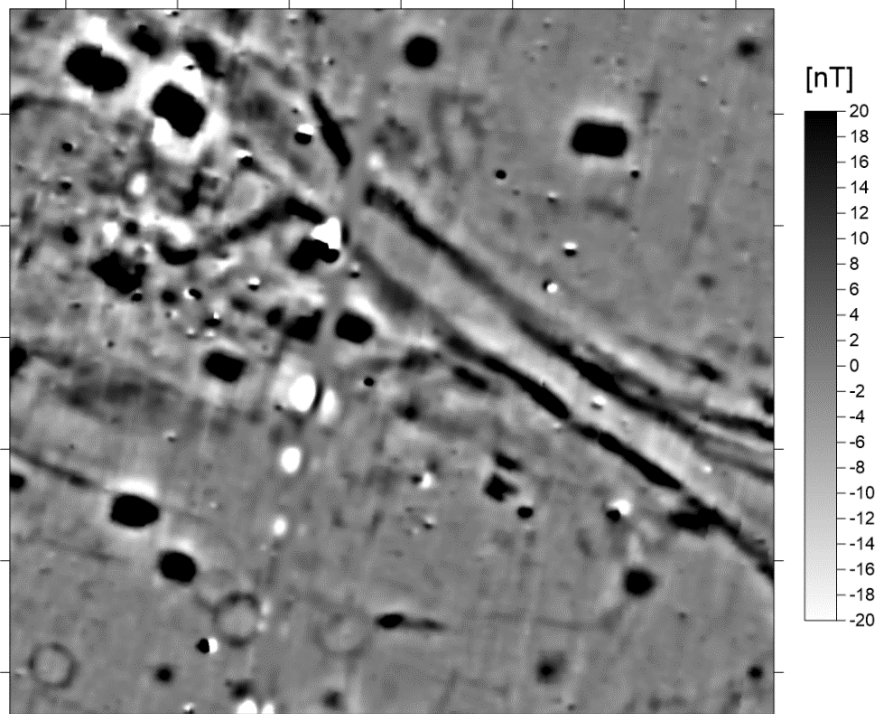


$\overbrace{\hspace{15em}}^{+400 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}}$

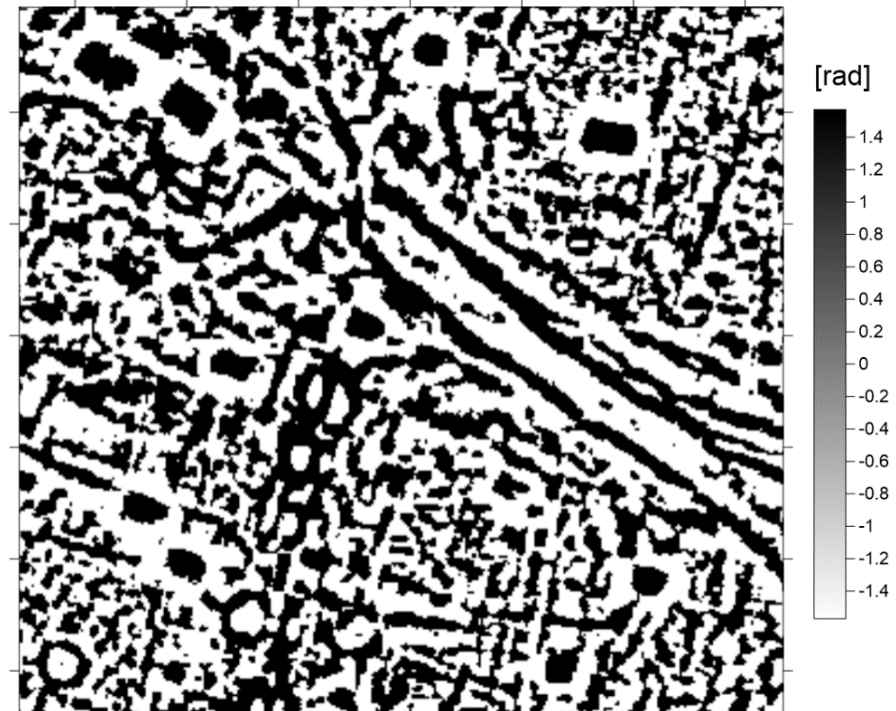


- tilt derivative: $\text{tilt} = \arctg \frac{\partial f / \partial z}{HG}$,
- TDX derivative: $\text{TDX} = \arctg \frac{HG}{\partial f / \partial z}$,

trials with a new simple transformation:
tilt deriv. + TDX (without applying absolute value in denominator)

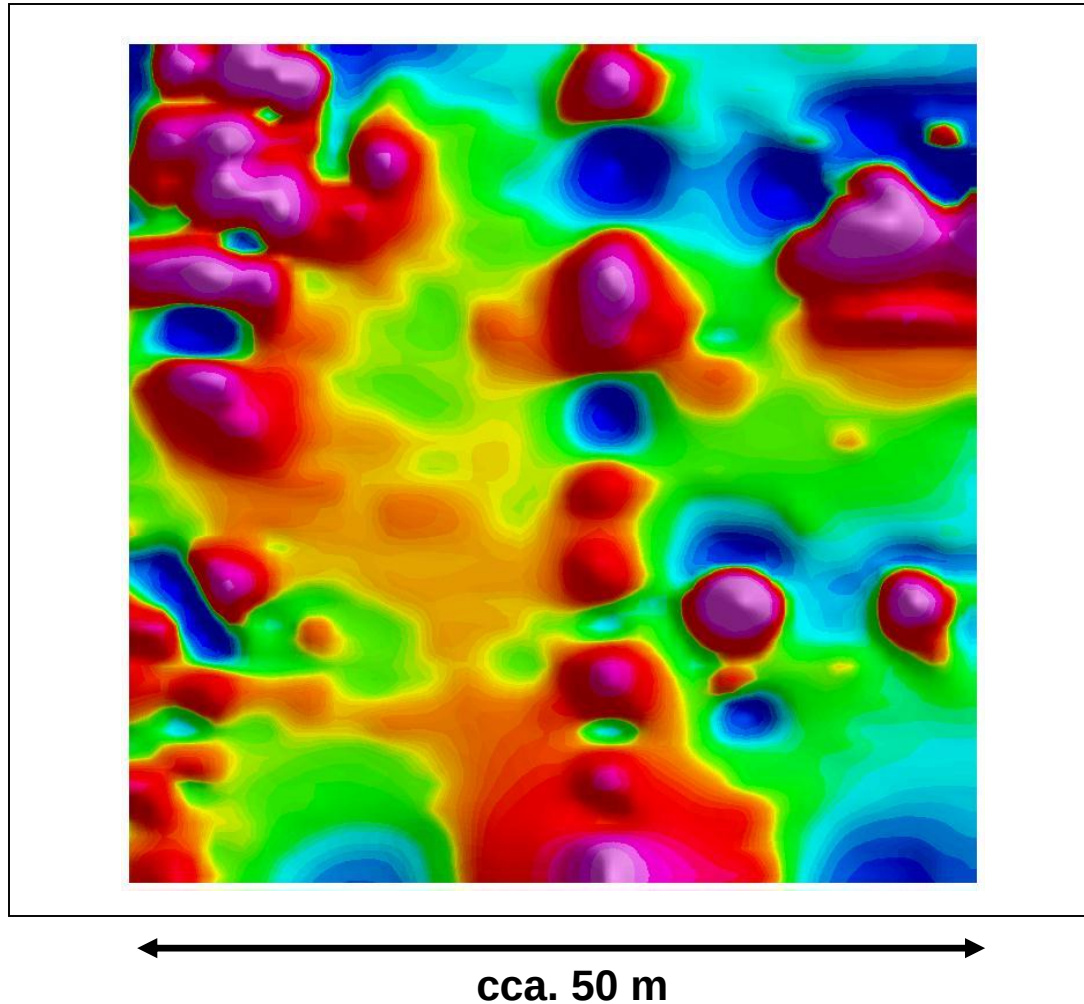


original field



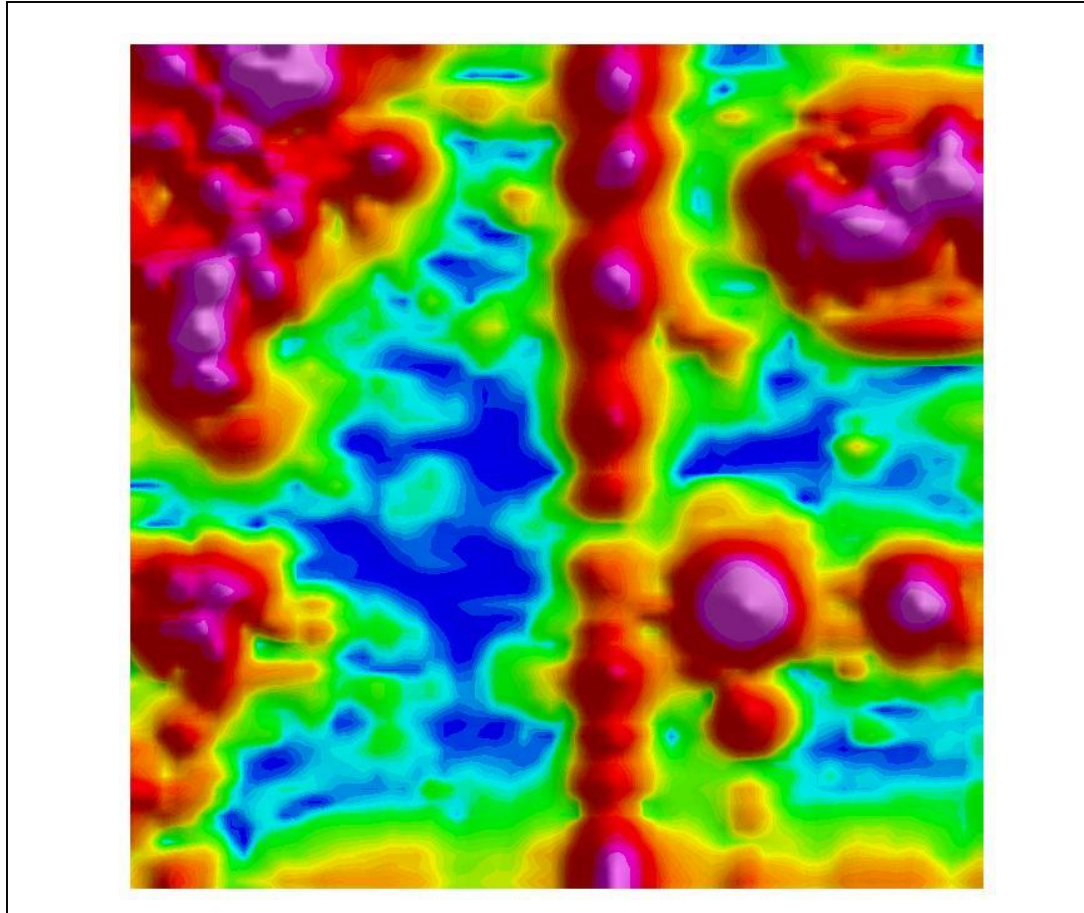
new simple transformation

príklad užitočnosti transformácie poľa ΔT do AS



vysoko presná magnetometria - high-sensitivity magnetometry
 ΔT pole z environmentálneho prieskumu
(starý prístav, Bratislava, G-trend s.r.o., Bratislava)

príklad užitočnosti transformácie poľa ΔT do AS

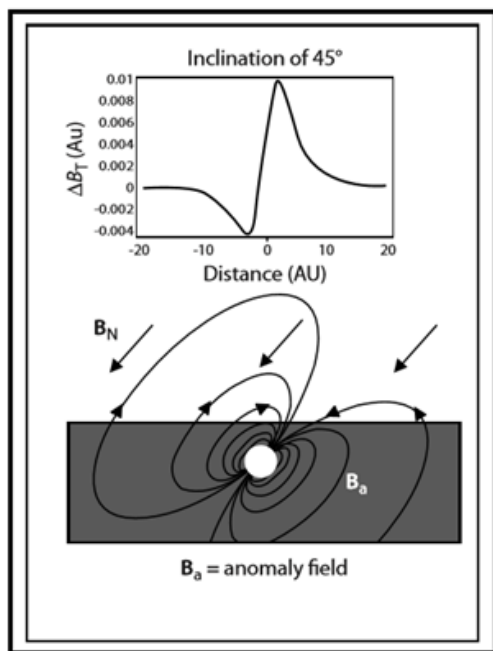


analytický signál (veľkosť modulu = AS):

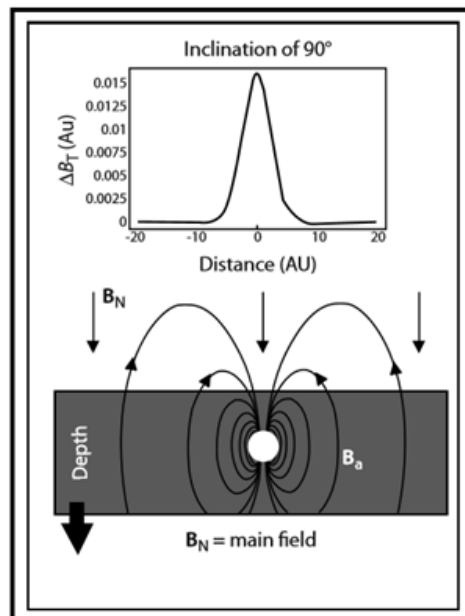
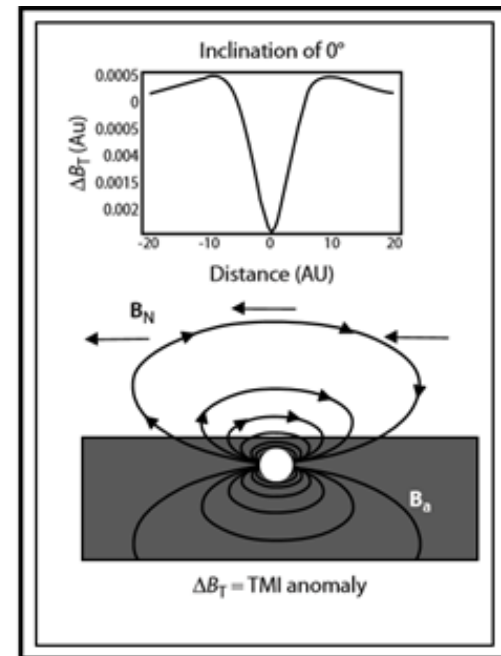
$$AS = \sqrt{(\partial\Delta T/\partial x)^2 + (\partial\Delta T/\partial y)^2 + (\partial\Delta T/\partial z)^2}$$

redukcia na pól (RTP – reduction to pole)

- pole ΔT sa prepočíta, ako keby bolo odmerané na magnetickom póle – potláča sa tým jeho dipólový charakter)
- založené na využití Poissonovho teorému (Baranov, 1957)
- realizácia v priestorovej alebo spektrálnej oblasti



RTP



Pri odvodení transformácie RTP sa vychádza z Poissonovho teroému (vzťah medzi gravitačným a magnetickým potenciálom):

$$W = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{\kappa\sigma} (\mathbf{M} \cdot \nabla U) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{\kappa\sigma} \left(M_x \frac{\partial U}{\partial x} + M_y \frac{\partial U}{\partial y} + M_z \frac{\partial U}{\partial z} \right) = -\frac{1}{4\pi} \frac{M_i}{\kappa\sigma} \left(\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial i} \right) \quad (1)$$

kde:

W je magnetický potenciál, U je gravitačný potenciál, κ je univerzálna gravitačná konštanta, σ je hustota, $\mathbf{M} = (M_x, M_y, M_z)$ je vektor magnetizácie (indukovanej), $i = x, y, z$.

Pre totálnu magnetickú indukciu T môžeme písať (ako gradient potenciálu vo všeob. smere i):

$$T = -\nabla W = -\frac{\partial W}{\partial i} = \frac{1}{4\pi} \frac{M_i}{\kappa\sigma} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial i^2} \right) \quad (2)$$

Keby sme sa chceli dostať späť ku potenciálu U , tak musíme vzťah (2) dva krát integrovať:

$$U = 4\pi \frac{\kappa\sigma}{M_i} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} T di di \quad (3)$$

V prípade, že máme iba vertikálnu magnetizáciu ($i = z$), môžeme podľa (1) písať pre zložku Z :

$$Z = -\frac{\partial W}{\partial z} = \frac{1}{4\pi} \frac{M_i}{\kappa\sigma} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial i} \right) = \frac{1}{4\pi} \frac{M_i}{\kappa\sigma} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) \quad (4)$$

V tomto vzťahu za potenciál U dosadíme vzťah (3), pričom sa nám vykrátia všetky konštanty:

$$Z = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} T d i d i \quad (5)$$

Získaný vzťah (5) je všeobecným vzorcom pre RTP transformáciu.

Jej samotná numerická realizácia sa vykonáva buď v priestorovej oblasti (cez dvojnú numerickú integráciu) alebo v spektrálnej oblasti pomocou násobenia spektrálnych charakteristík.

RTP v spektrálnej oblasti (modul MAGMAP v rámci Oasis Montaj)

REDP **Reduce to the magnetic pole**

$$L(\theta) = \frac{[\sin(I) - i \cdot \cos(I) \cdot \cos(D - \theta)]^2}{[\sin^2(I_a) + \cos^2(I_a) \cdot \cos^2(D - \theta)] \cdot [\sin^2(I) + \cos^2(I) \cdot \cos^2(D - \theta)]}, \text{if } (|I_a| < |I|), I_a = I$$

where:

I geomagnetic inclination

I_a inclination for amplitude correction (never less I).

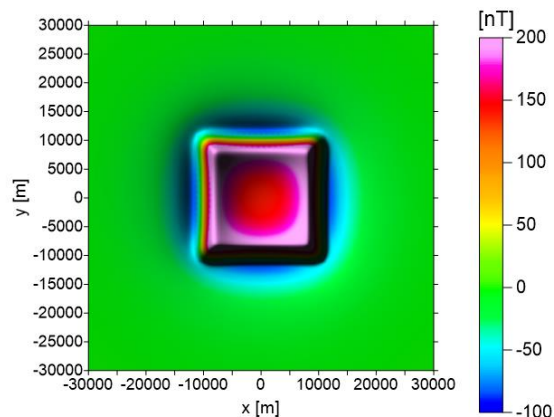
D geomagnetic declination

Parameter:

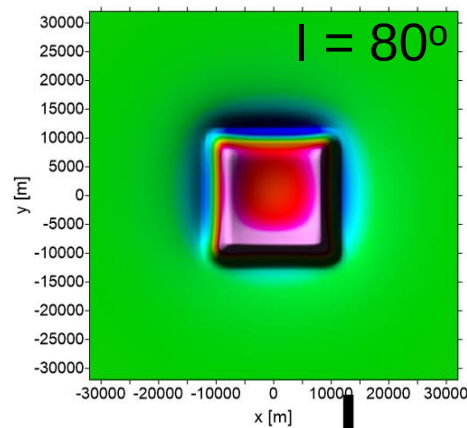
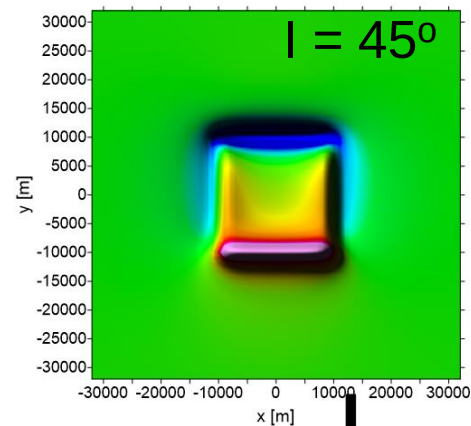
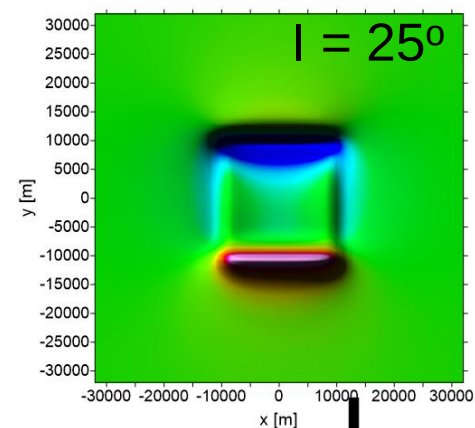
I_a Inclination to be used for the amplitude correction. Default is ± 20 degrees.

If $|I_a|$ is specified to be less than $|I|$, it is set to I .

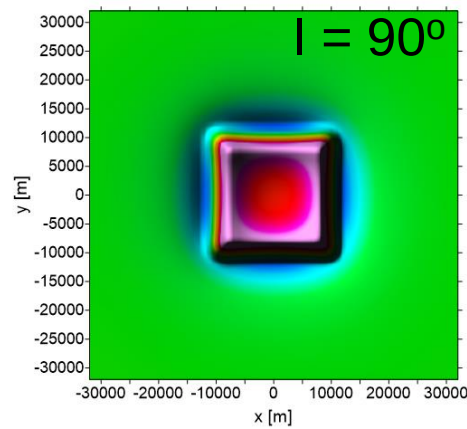
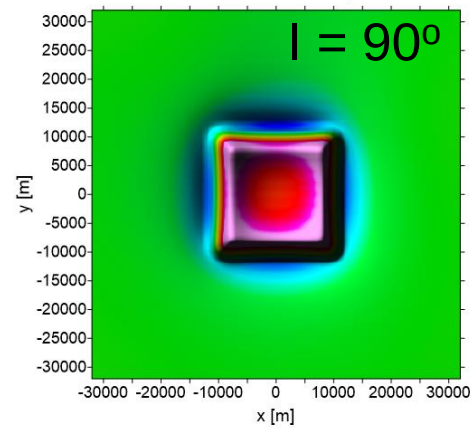
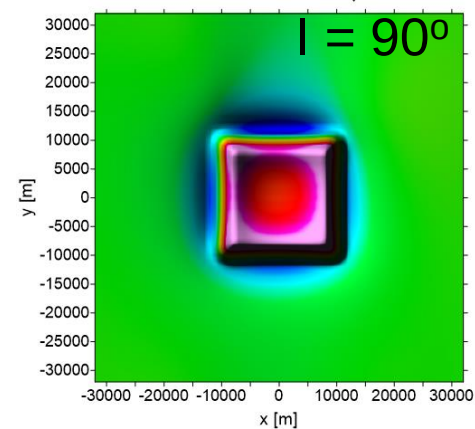
(RTP)



výsledok
pre vertik.
magnetizáciu

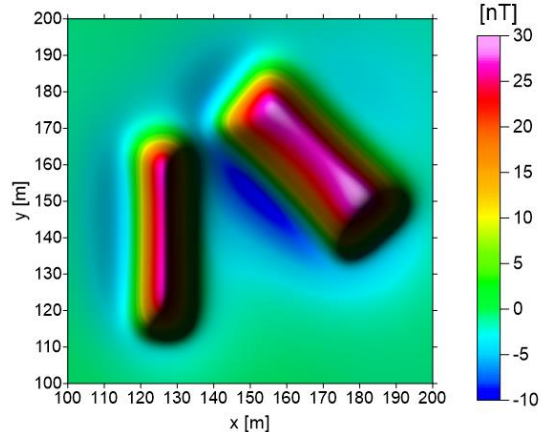


pôvodné
údaje

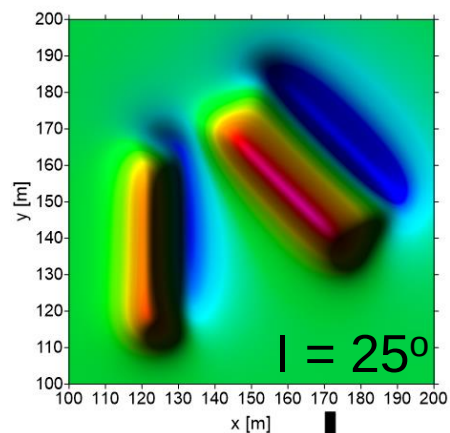


RTP
údaje

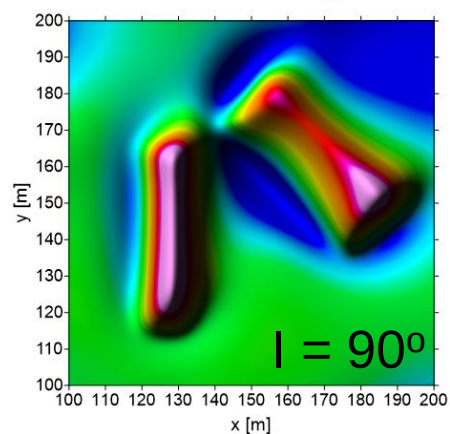
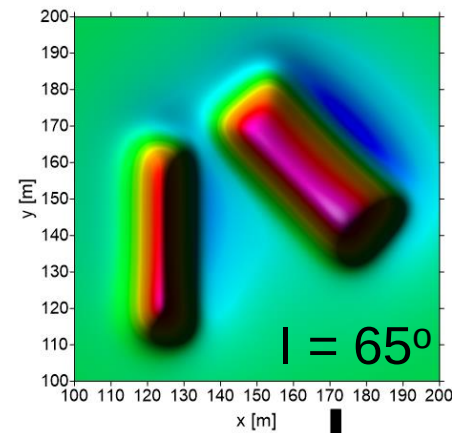
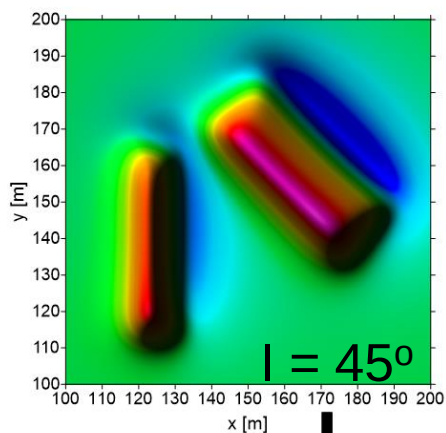
(RTP)



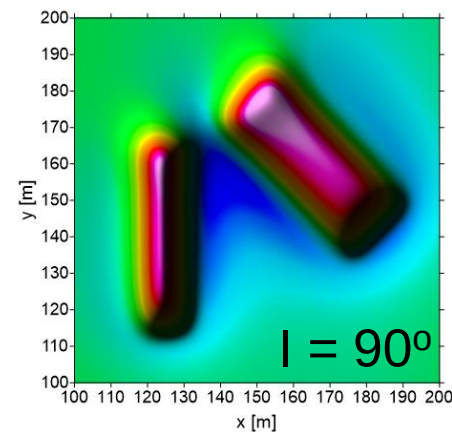
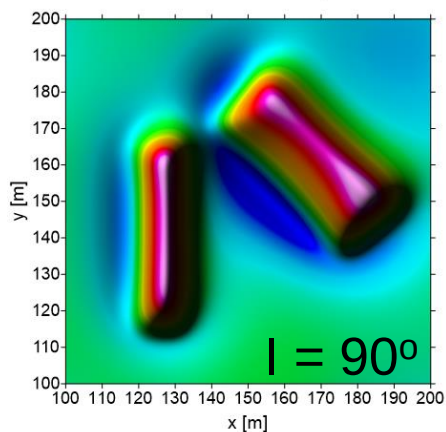
výsledok
pre vertik.
magnetizáciu



pôvodné
údaje

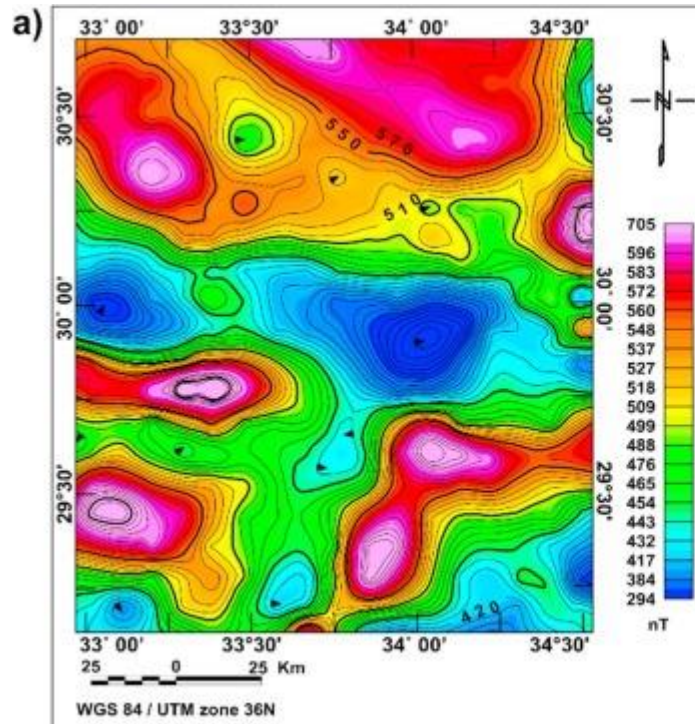


RTP
údaje

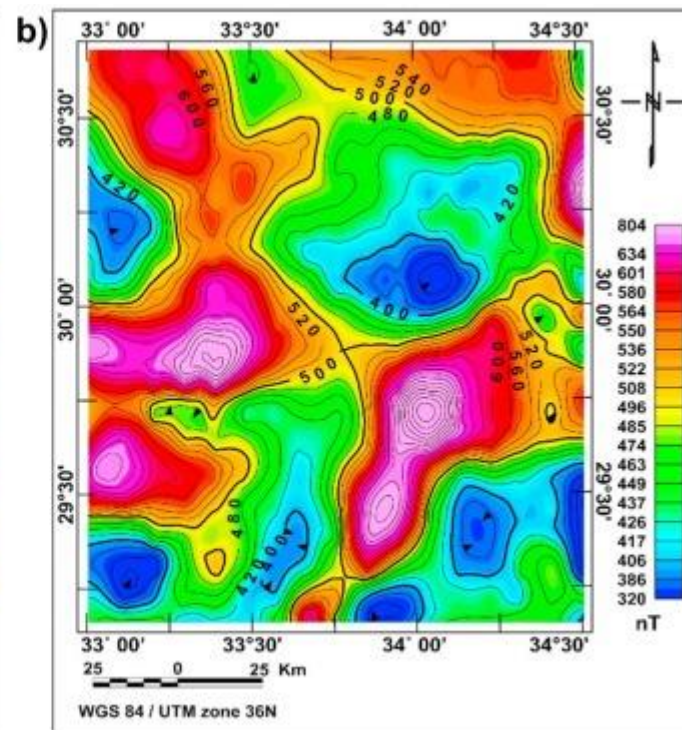


redukcia na pól (RTP)

reálne údaje



pôvodné údaje

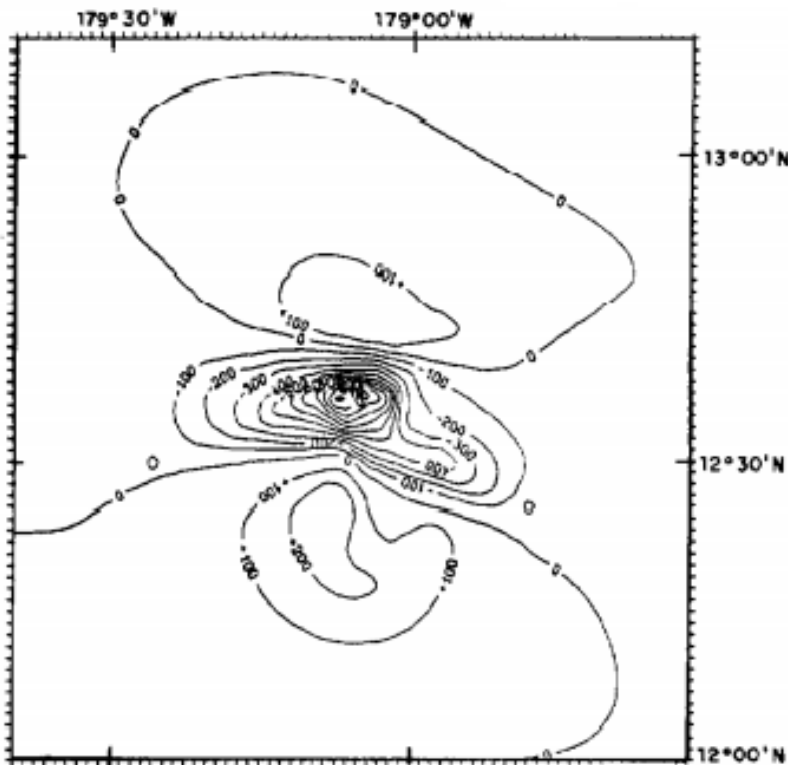


údaje redukované na pól

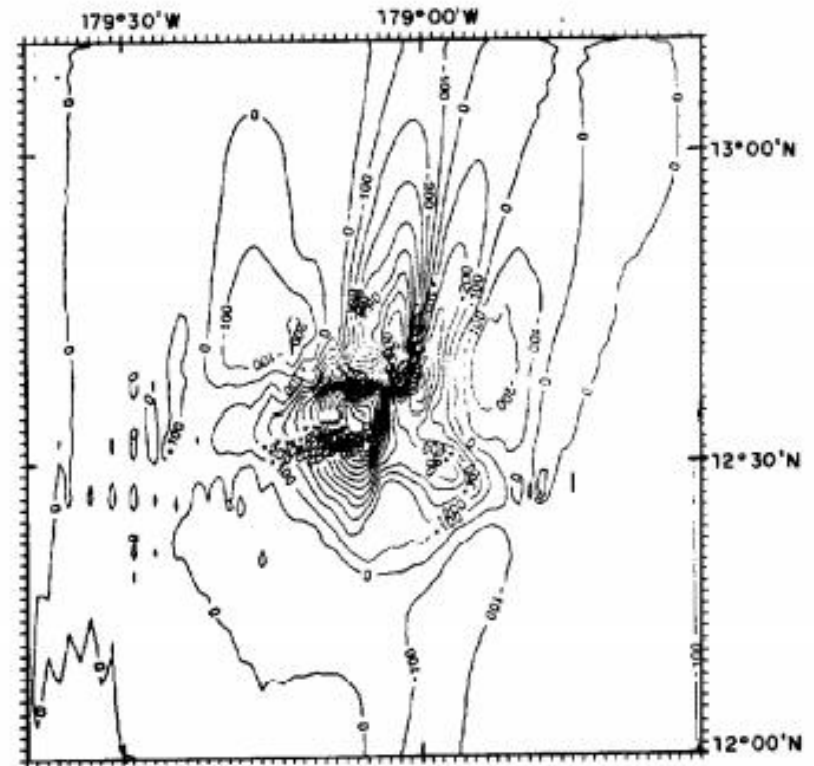
Nie vždy to funguje dokonale (dôležitú úlohu tam zohráva prítomnosť remanentnej magnetizácie – pri nej to nezaberá).

redukcia na pól (RTP)

problém, ak vstupné pole bolo merané v blízkosti rovníka ($I < 10^\circ$)
- riešenia bývajú často nestabilné



pôvodné údaje



RTP transformácia

príklad z konf. príspevku: Mendonca and Silva (1992)

***exaktné odvodenie tvaru
stabilizujúceho filtra na výpočet
regularizovaných derivácií
(gradientov)
(založené na teórii variačného počtu)***

**motivované odvodením regularizovaného pokračovania
nadol (Tichonov et al., 1968, Fyzika Zemli, Izvestia)
a publikovaná v článku Pašteka et al. (2007, Geoph. Prosp.)**

odvodenie filtra na výpočet regularizovanej derivácie

minimalizácia dvoch funkcionálov

prvý popisuje samotné
riešenie
(klasický prístup)

druhý potrebu jeho
stability
(zavedenie „of
constraints“)

$$\text{functional } I = \int_a^b F[y, y', x] dx = \int_a^b \left\{ [y(x) - A(U_\delta)]^2 + \alpha [y'(x)]^2 \right\} dx = \min.$$

kde $y(x)$ je hľadané regular. riešenie (regularizovaná horizontálna derivácia), $y' = \partial y / \partial x$
 U_δ – merané poľa (obsahujúce šum δ), $A()$ – operátor “klasického” výpočtu derivácie
v priestorovej oblasti (napr. diferenčná schéma),

α – tzv. regularizačný parameter (zároveň parameter vyhladzujúceho filtra)

I – funkcionál, F – funkcia, popisujúca „vzdialenosť“ alebo „veľkosť“ funkcií

za účelom nájdania riešenia daného minimalizačného problému (nájdanie minima funkcionálu) sa rieši tzv. Euler-Langrangeova rovnica:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad (1)$$

odvodenie filtra na výpočet regularizovanej derivácie

na riešenie Euler-Lagrangeovej rovnice $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$ (1) potrebujeme pozn

derivácie pomocnej funkcie F: $F[y(x), y'(x), x] = [y(x) - A(U_\delta)]^2 + \alpha [y'(x)]^2$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2[y - A(U_\delta)], \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 2\alpha y', \quad \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y'} = 2\alpha y''.$$

keď tieto dosadíme do Euler-Lagrangeovej rovnice (1), dostaneme:

$$[y - A(U_\delta)] - \alpha y'' = 0 \tag{2}$$

kde hľadaná funkcia $y(x)$ (regularizovaná horiz. derivácia) je dva krát derivovaná = diferenciálna rovnica 2. stupňa.

Takúto rovnicu môžeme riešiť pomocou Fourierovej transformácie (FT): (transformovaná rovnica sa v spektrálnej (Fourierovskej) oblasti stane obyčajnou algebraickou rovnicou – môžeme získať FT hľadanej funkcie $y(x)$).

odvodenie filtra na výpočet regularizovanej derivácie

najprv potrebujeme určiť FT jednotlivých členov v rovnici (2):

$$\mathfrak{T}\{y(x)\} = \tilde{y}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(x) e^{-ikx} dx, \quad \mathfrak{T}\{U_{\delta}(x)\} = \tilde{U}_{\delta}(k)$$

$$\mathfrak{T}\{A(U_{\delta})\} = ik\tilde{U}_{\delta}(k), \quad \mathfrak{T}\{y''(x)\} = (ik)^2 \tilde{y}(k) = -k^2 \tilde{y}(k)$$

keď tieto výrazy dosadíme do Euler-Lagrangeovej rovnice (2),

$$[y - A(U_{\delta})] - \alpha y'' = 0 \quad (2)$$

dostaneme:

$$\tilde{y}(k) - ik\tilde{U}_{\delta}(k) + \alpha k^2 \tilde{y}(k) = 0$$

$$\tilde{y}(1 + \alpha k^2) = ik\tilde{U}_{\delta}$$

$$\tilde{y}(k) = \frac{1}{1 + \alpha k^2} ik\tilde{U}_{\delta}(k) \quad (3)$$

výsledok: FT hľadaného riešenia (regulariz. derivácie) má okrem “klasickej” spektrálnej charakteristiky pre deriváciu (ik) aj low-pass vyhladzujúci člen $1/(1+\alpha k^2)$