

Magnetometria

Priama úloha

- veličiny
- základné vzťahy
- potenciál
- Poissonov teorém
- účinky jednoduchých telies

Magnetometria

Priama úloha

μ – magnetická permeabilita (miera magnetizácie materiálu po vystavení vonkajšiemu poľu)

κ – magnetická susceptibilita (používame ako skalár, vo všeobecnosti je to tenzor)


\mathbf{B} – magnetická indukcia

\mathbf{H} – magnetická intenzita

\mathbf{M} – magnetizácia (môžeme chápať ako vektorový súčet individuálnych dipólových momentov \mathbf{m}_i)

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_r \mu_0 \mathbf{H} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_i + \mathbf{M}_n$$

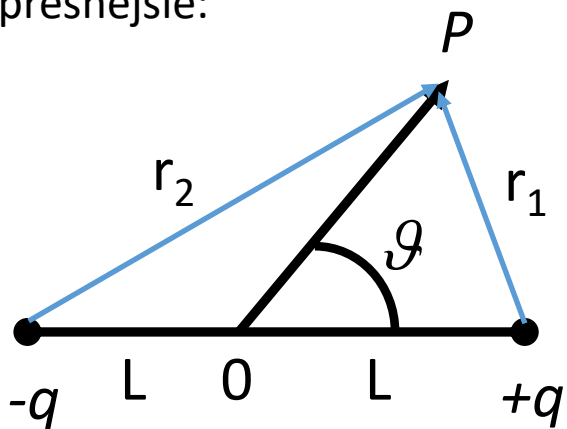
Indukovaná magnetizácia  Remanentná magnetizácia 

$\kappa < 0.1 \rightarrow \mathbf{M}_i = \kappa \mathbf{T}'$ \mathbf{T}' je magnetická intenzita telesa

$\kappa > 0.1 \rightarrow \mathbf{M}_i = \frac{\kappa}{1 + \kappa N} \mathbf{T}'$ N je demagnetizačný faktor

Magnetický potenciál

- přesněji:



tyčový magnet délky $2L$

(potenciál dipólu)

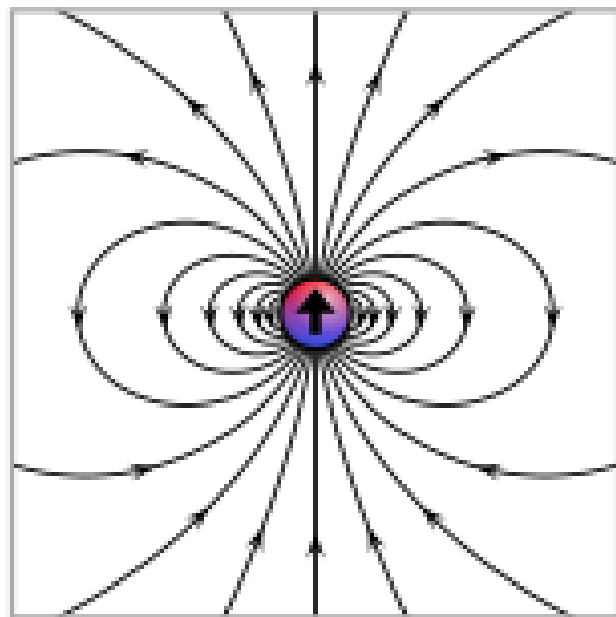
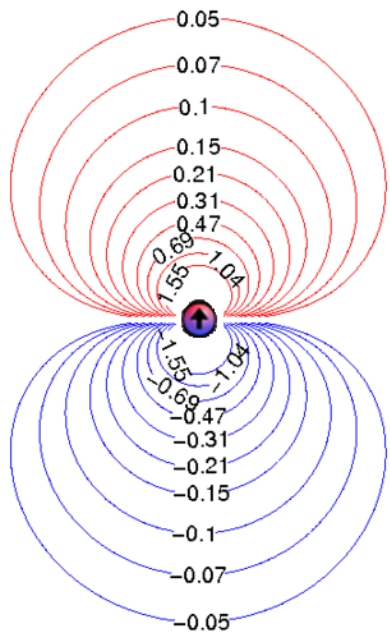
$$W = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} \right) = \frac{1}{4\pi} q \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

$$L \ll r \Rightarrow r_2 - r_1 \doteq 2L \cos \vartheta \wedge r_1 r_2 \doteq r^2$$

$$W = \frac{1}{4\pi} \frac{2Lq \cos \vartheta}{r^2}$$

Magnetický moment velmi krátkého magnetu (m).

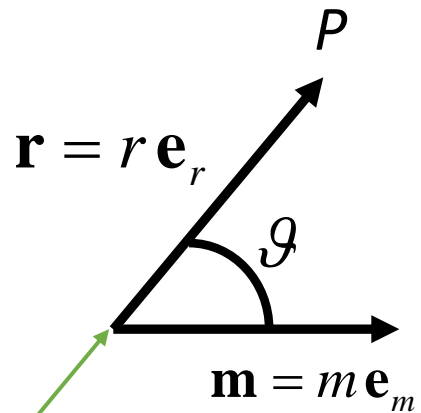
$$W = \frac{1}{4\pi} \frac{m \cos \vartheta}{r^2}$$



Magnetický potenciál

(potenciál dipólu)

$$W = \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{e}_r}{r^2} = \frac{1}{4\pi} \frac{m \cos \vartheta}{r^2} = -\frac{1}{4\pi} \mathbf{m} \cdot \nabla_P \frac{1}{r}$$



Tu je umiestnený dipól,
orientovaný v smere vektora \mathbf{m} .

Vychádzame z **fiktívnej existencie** tzv. elementárneho magnetického množstva (náboja). Vieme však, že magnetické monopóly **neexistujú**.

\mathbf{m} je magnetický dipólový moment, \mathbf{r} je vektor sprievodiča (vzdialenosti) \mathbf{e}_r a \mathbf{e}_m sú jednotkové vektory

poznámka ku predchádzajúcemu snímku:

(gradient funkcie 1/r)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = [x^2 + y^2]^{1/2}$$

uvažujme 2D prípad: $r = r(x,y)$

Gradient je vektor, môžeme vyjadriť samostatne jeho zložky:

$$\left(-\nabla_P \frac{1}{r}\right)_x = -\left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{[x^2 + y^2]^{1/2}}\right) = \left(+\frac{1}{2} \frac{2x}{[x^2 + y^2]^{3/2}}\right) = \frac{x}{r^3} \quad \text{a} \quad \left(-\nabla_P \frac{1}{r}\right)_y = \frac{y}{r^3}$$

$$\nabla_P \frac{1}{r} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{r^3} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{r^3} = \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{r\mathbf{e}_r}{r^3} = \frac{\mathbf{e}_r}{r^2}$$

A preto platí (z predchádzajúceho snímku):

$$\mathbf{W} = -\frac{1}{4\pi} \mathbf{m} \cdot \nabla_P \frac{1}{r} = \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{e}_r}{r^2}$$

Intenzita magnetického poľa dipólu

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= -gradW = -\nabla W \\ &= -\nabla \left[\frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{e}_r}{r^2} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{m}{r^3} \left(3(\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_m) \mathbf{e}_r - \mathbf{e}_m \right)\end{aligned}$$

S posledným výrazom sa dá „hrať“ a upraviť na viacero podôb. Vyjadruje aj pole/intenzitu **dostatočne krátkeho** tyčového magnetu **s homogénnou magnetizáciou \mathbf{M}** kedy prejde na tvar

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{3\mathbf{R}}{R^5} (\mathbf{M} \cdot \mathbf{R}) - \frac{\mathbf{M}}{R^3} \right]$$

pozri skriptá Matematické základy teórie geof. metód I., str. 16

Poissonov teorém

- vyjadruje vzťah medzi gravitačným a magnetickým potenciálom pre **hustotne homogénne** a **homogénne zmagnetizované** teleso

$$W = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{\kappa\sigma} (\mathbf{M} \cdot \nabla U) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{\kappa\sigma} \left(M_x \frac{\partial U}{\partial x} + M_y \frac{\partial U}{\partial y} + M_z \frac{\partial U}{\partial z} \right)$$

Tento výraz umožňuje výpočet magnetickej intenzity pomocou derivácií gravitačného potenciálu – tento súvis je čisto matematický a nemá fyzikálny význam – teda kým niekto nepríde so zjednocujúcou teóriou, ktorá spojí gravitačné a magnetické polia

Pozn.: Výraz je vhodný pre „oblé“ telesá – ohraničené plochami druhého rádu (gul'a, elipsoidy...). Pri telesách ohraničených rovinami sa výraznejšie prejavuje **demagnetizačný faktor**

Demagnetizačný faktor

Pri vysokých hodnotách objemovej magnetickej susceptibility (>0.1 [SI]), pri „hranatých“ okrajoch telies a pre veľké telesá vzniká vnútorné pole v telese, ktoré zoslabuje celkové magnetické pole telesa. Táto situácia sa opisuje pomocou tzv. zdanlivej objemovej magnetickej susceptibility:

$$\kappa' = \frac{\kappa}{1 + \kappa N},$$

kde N je demagnetizačný faktor vyjadrujúci úroveň demagnetizácie a pohybuje sa od 0 do 1. Pre niektoré tvary telies je možné ho odvodiť analyticky (elipsoid, guľa $N = 1/3$, krátky valec s magnetizáciou kolmou na rotačnú os $N = 1/2$), pre ostatné telesá sa určuje numericky (tento výpočet je už často zakomponovaný do výpočtu pri niektorých modelovacích programoch)

Riešenia pre jednoduché telesá

Hľadať budeme zložky vektora magnetickej indukcie (označíme $\Delta\mathbf{T}$)

$$\Delta\mathbf{T} = \mathbf{T} - \mathbf{T}_n,$$

kde \mathbf{T} „pochádza“ od samotného telesa (predpokladáme len indukovanú magnetizáciu a v takom prípade je jej orientácia zhodná ako orientácia vektora \mathbf{T}) a \mathbf{T}_n je „normálne“ pole. Výsledný vektor rozložíme do zložiek v karteziánskom súradnicovom systéme:

$$X = -\mu_0 \frac{\partial W}{\partial x} \mathbf{i}, \quad Y = -\mu_0 \frac{\partial W}{\partial y} \mathbf{j}, \quad Z = -\mu_0 \frac{\partial W}{\partial z} \mathbf{k}$$
$$H = \sqrt{X^2 + Y^2}; \quad |\Delta\mathbf{T}| = \Delta T = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

GUL'A

Využijeme **Poissonov teorém**. Pre gravitačný potenciál U gule so stredom v bode S $[\xi, \eta, \zeta]$, polomeru R , v bode P $[x, y, z]$ máme:

$$U = \frac{4}{3} \pi R^3 \sigma \kappa \frac{1}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}} = \frac{4}{3} \pi R^3 \sigma \kappa \frac{1}{\sqrt{D}}$$

Pre jednotlivé zložky vektora \mathbf{T} potom máme:

$$X = -\mu_0 \frac{R^3}{3} \left[M_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{\sqrt{D}} \right) + M_y \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{1}{\sqrt{D}} \right) + M_z \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(\frac{1}{\sqrt{D}} \right) \right] \mathbf{i},$$

$$Y = -\mu_0 \frac{R^3}{3} \left[M_x \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{1}{\sqrt{D}} \right) + M_y \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{\sqrt{D}} \right) + M_z \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left(\frac{1}{\sqrt{D}} \right) \right] \mathbf{j},$$

$$Z = -\mu_0 \frac{R^3}{3} \left[M_x \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(\frac{1}{\sqrt{D}} \right) + M_y \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left(\frac{1}{\sqrt{D}} \right) + M_z \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{\sqrt{D}} \right) \right] \mathbf{k}$$

V takejto podobe je to príliš zložitá, zjednodušenie dosiahneme viacerými predpokladmi: vhodné umiestnenie gule ($\xi = \eta = 0$), $\zeta = h$, predpoklad vertikálnej magnetizácie $\mathbf{M} = [0, 0, M]$, výpočet na úrovni $z = 0$, deklinácia $D = 0$ a objem gule je V_g a dostaneme:

$$H = -\frac{\mu_0}{4\pi} V_g \frac{Mhx}{[x^2 + h^2]^{\frac{3}{2}}}; \quad Z = -\frac{\mu_0}{4\pi} V_g \frac{M(2h^2 - x^2)}{[x^2 + h^2]^{\frac{3}{2}}} \rightarrow \Delta T(x, z) = H \cos I + Z \sin I$$

2D HORIZONTÁLNY VALEC

Využijeme **Poissonov teorém**. Pre gravitačný potenciál U 2D horizontálneho valca s osou rovnobežnou so smerom y a umiestnenou pod počiatkom súradnicového systému v hĺbke h , s polomerom R , v bode výpočtu $P [x, 0, 0]$ máme:

$$U = 2\pi\kappa\sigma R^2 \ln \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + h^2}} \right]$$

Pre zložky H a Z potom máme, s predpokladom **vertikálnej magnetizácie** $\mathbf{M} = [0, 0, M]$:

$$H = |X| = \frac{\mu_0 R^2 M h x}{[x^2 + h^2]^2}; \quad Z = -\frac{\mu_0 R^2 M (h^2 - x^2)}{[x^2 + h^2]^2} \rightarrow \Delta T(x, z) = H \cos I \cos D + Z \sin I$$

TENKÁ VERTIKÁLNA TYČ

1. Hĺbkovo neobmedzená

Uvažujeme fiktívny magnetický monopól (magnetické množstvo) – m , ktorý je umiestnený pod počiatkom súradnicového systému v hĺbke h . Jeho potenciál je určený výrazom:

$$U = \frac{-m}{4\pi\sqrt{x^2 + h^2}}$$

Pre zložky H a Z potom máme (vertikálna magnetizácia):

$$H = |X| = \frac{\mu_0 m x}{[x^2 + h^2]^{\frac{3}{2}}}; \quad Z = -\frac{\mu_0 m h}{[x^2 + h^2]^{\frac{3}{2}}} \rightarrow \Delta T(x, z) = H \cos I \cos D + Z \sin I$$

TENKÁ VERTIKÁLNA TYČ

2. Hĺbkovo obmedzená

Uvažujeme fiktívne magnetické póly (magnetické množstvá) $-m$ v hĺbke h_1 a $+m$ v hĺbke h_2 , ktorý je umiestnený pod počiatkom súradnicového systému, dĺžka tyče je $2l$. Potenciál je určený výrazom:

$$U = \frac{m}{4\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + h_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + h_2^2}} \right)$$

Pre zložky H a Z potom máme (vertikálna magnetizácia):

$$H = |X| = \mu_0 m x \left(\frac{1}{[x^2 + h_1^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{[x^2 + h_2^2]^{\frac{3}{2}}} \right); \quad Z = -\mu_0 m x \left(\frac{h_1}{[x^2 + h_1^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{h_2}{[x^2 + h_2^2]^{\frac{3}{2}}} \right)$$

V prípade sklonu tyče o uhol α dostaneme:

$$H = |X| = \mu_0 m x \left(\frac{1}{[x^2 + h_1^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{x - 2l \cos \alpha}{[(x - 2l \cos \alpha)^2 + h_2^2]^{\frac{3}{2}}} \right); \quad Z = -\mu_0 m x \left(\frac{h_1}{[x^2 + h_1^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{h_2}{[(x - 2l \cos \alpha)^2 + h_2^2]^{\frac{3}{2}}} \right)$$

2D TENKÁ ŠIKMÁ DOSKA

Uvažujeme šikmú dosku s horizontálnou mocnosťou b a úklonom α s horným okrajom uloženým v hĺbke h , zdola hĺbkovo neobmedzenú a šikmo zmagnetizovanú $\mathbf{M} = [M_x, M_y]$. Postupuje sa opäť cez Poissonov teorém a dostaneme:

$$\Delta T(x, z) = -\frac{2b\mu_0}{\pi} \frac{x(M_x \sin I + M_z \cos I \sin \alpha) + h(M_x \cos I \sin \alpha - M_z \sin I)}{x^2 + h^2}$$