druhá prednáška

- aproximácia tvaru Zeme: guľa, elipsoid, geoid

- druhy výšok (súvisiace s tvarom Zeme)

- normálne tiažové pole

tvar Zeme: geoid, elipsoid, guľa

geoid – hladinová plocha (nie matematicky definovaný)

kvázigeoid – blízky geoidu (matem. definovaný)

elipsoid – trojosý geometrický útvar

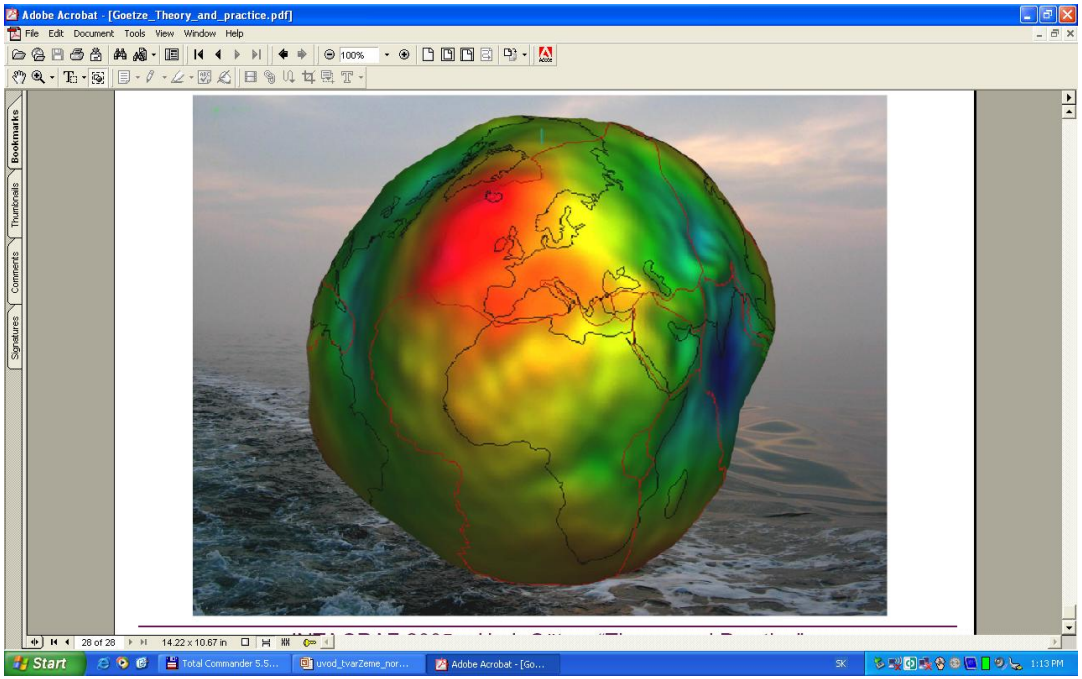
rotačný elipsoid = sféroid (dve poloosi sú rovnaké)

guľa – prvé predstavy o rotačnom tvare Zeme

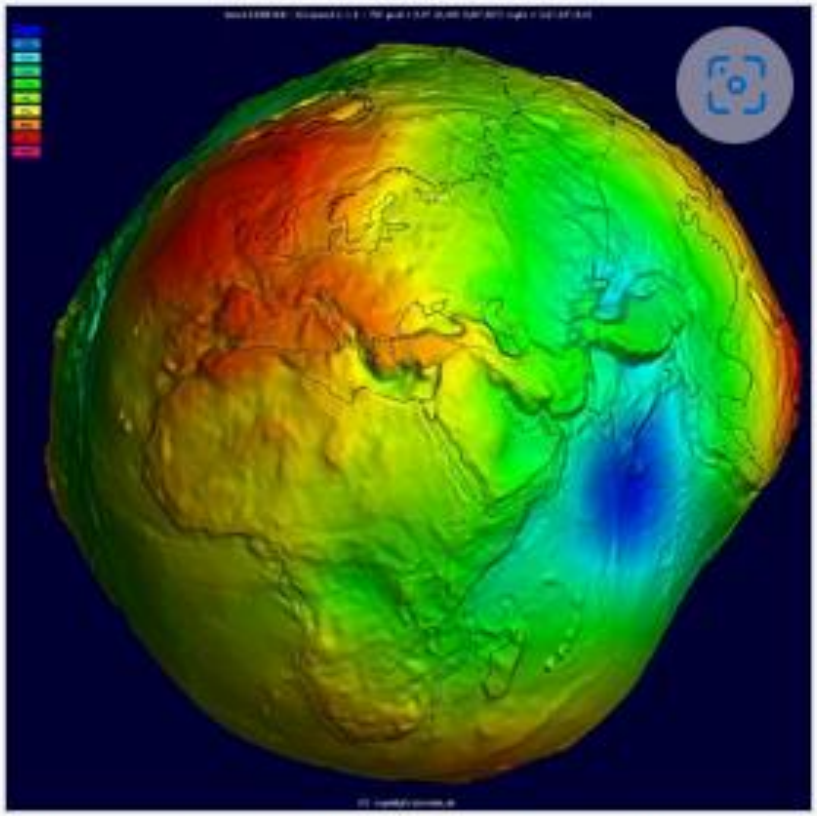
Pozn.: Uvedené témy skôr spadajú do tzv. fyzikálnej geodézie.

geoid

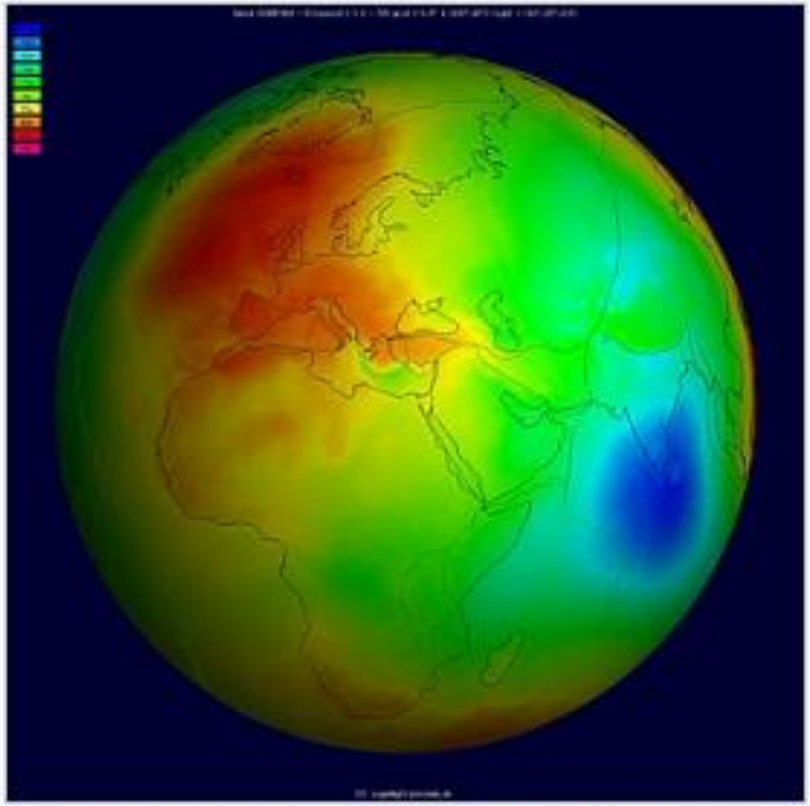
hladinová (ekvipotenciálna) plocha, prechádzajúca strednou hladinou oceánu (pokračujúca aj v oblasti kontinentov), hladinová plocha je v každom bode kolmá na vektor **g**, označenie ***geoid*** prvý krát použil nemecký matematik J. B. Listing (1873),



tieto typy vizualizácie sú upravované – Zem nemá takýto tvar…



Geoid undulation in pseudocolor, shaded relief and vertical exaggeration (10000 vertical scaling factor).



Geoid undulation in pseudocolor, without vertical exaggeration.

2 typy vizualizácie: upravovaná (násobená faktorom) a neupravovaná

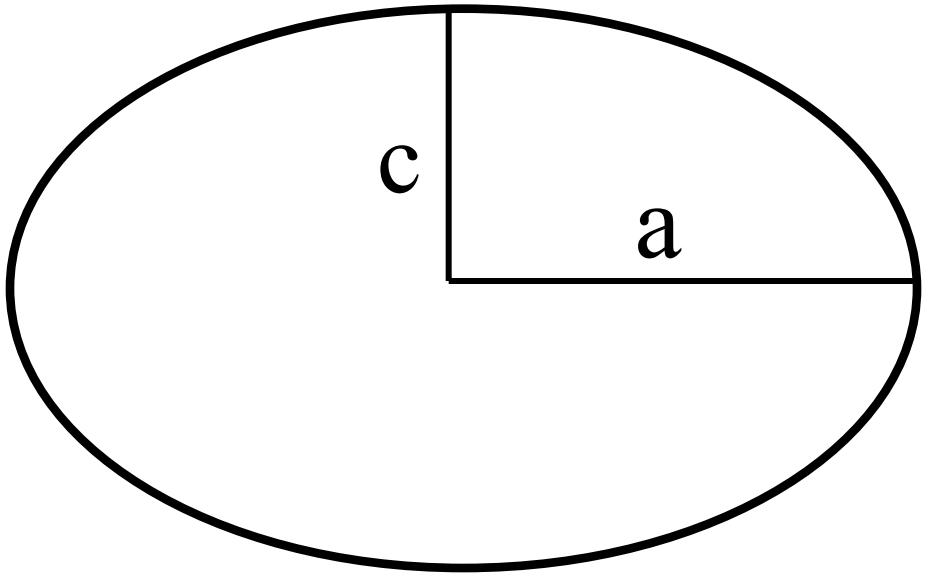
geoid

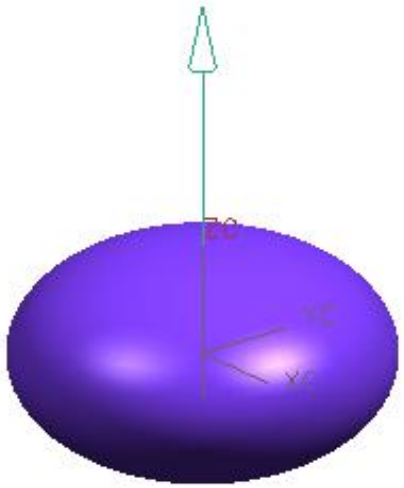
hladinová (ekvipotenciálna) plocha, prechádzajúca strednou hladinou oceánu (pokračujúca aj v oblasti kontinentov), hladinová plocha je v každom bode kolmá na vektor **g**, označenie ***geoid*** prvý krát použil nemecký matematik J. B. Listing (1873),

kvázigeoid

matematická aproximácia priebehu geoidu (pomocou radu sférických funkcií – riešenie Laplaceovej diferenciálnej rovnice v sférických súradniciach)

rotačný elipsoid (pri zhodnosti dvoch poloosí)





a – hlavná poloos (semi-major axis)

c – vedľajšia poloos (semi-minor axis)

f – sploštenie (flattening), $f = (a - c)/a$

e – excentricita (eccentricity), $e = \sqrt{(2f - f^2)}$

ℓ – elipticita (elipticity or reciprocal of flattening), $\ell = 1/f$

rotačný (dvojosý) elipsoid

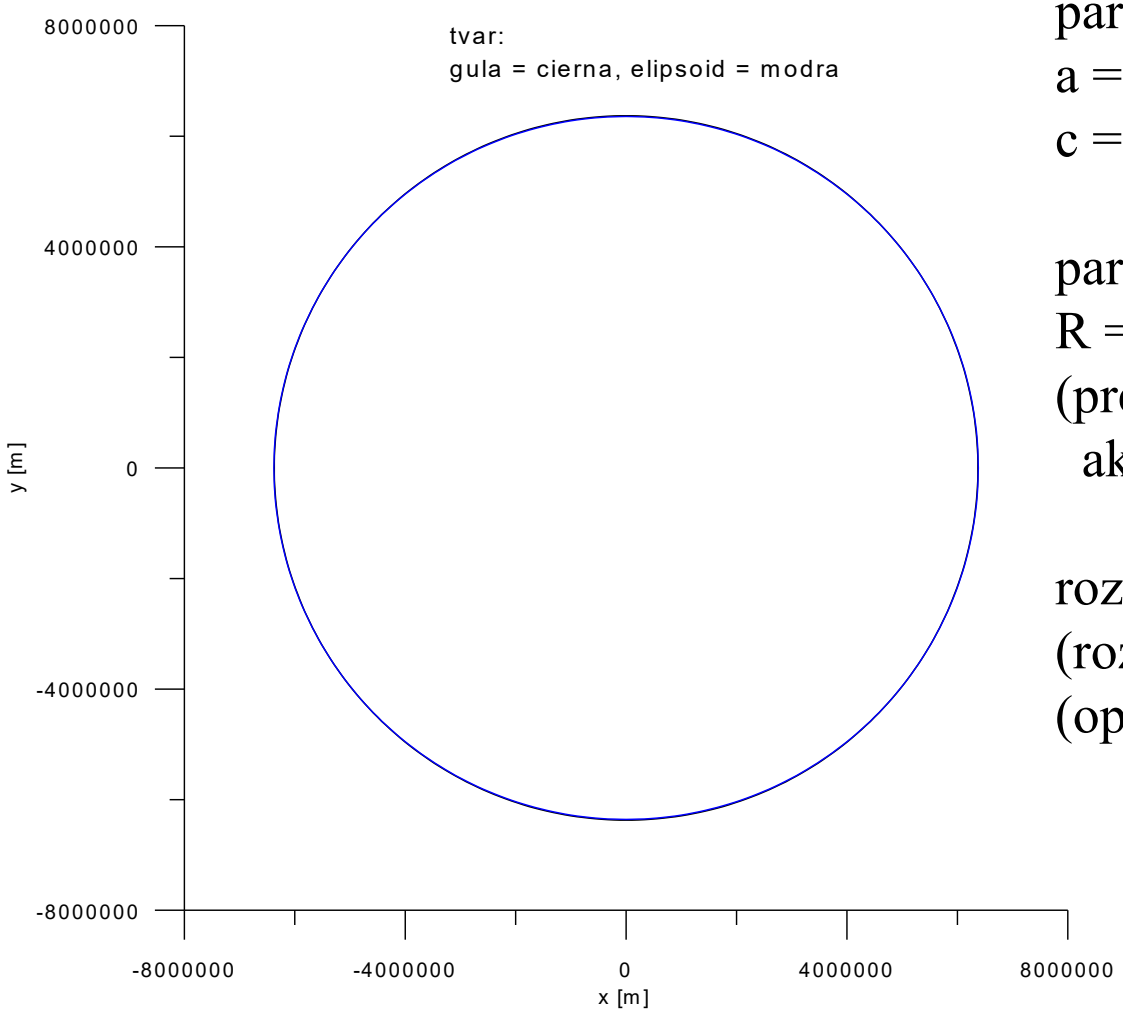
Ellipsoid name	Semimajor axis (a in meters)	Reciprocal of flattening ($1/f$)
Airy 1830	6 377 563.396	299.324 964 6
Helmert 1906	6 378 200	298.3
International 1924	6 378 388	297
Australian National	6 378 160	298.25
GRS 1967	6 378 160	298.247 167 427
GRS 1980	6 378 137	298.257 222 101
WGS 1984	6 378 137	298.257 223 563

rôzne elipsoidy

u nás: donedávna Krasovského 1940 (KA40)

v súčastnosti GRS80 (často označovaný ako WGS84)

guľa vs. rotačný elipsoid

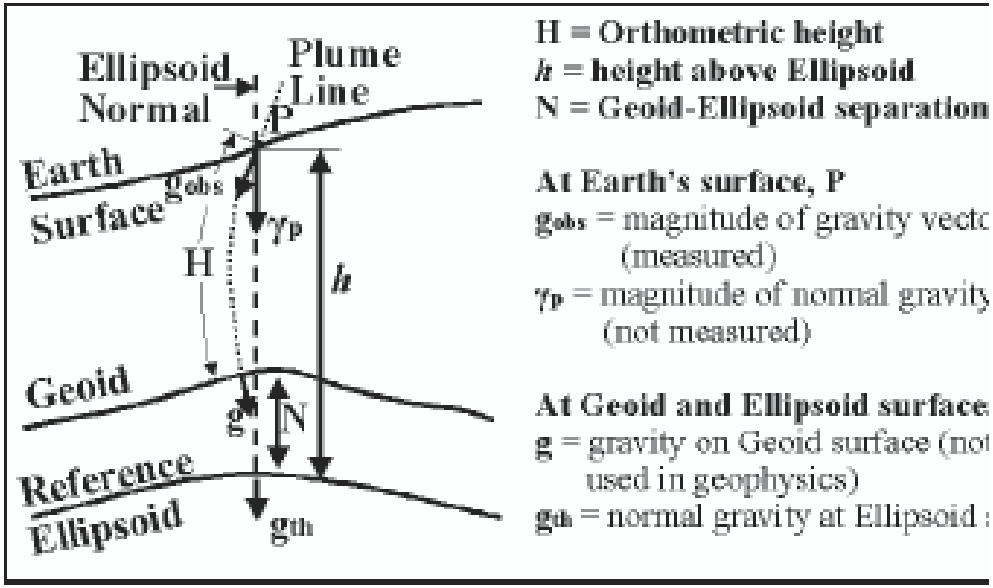


parametre systému GRS80 (WGS84):
a = 6378137 m (hlavná poloos)
c = 6356752.3 m (vedľajšia p.)

parametre gule:
R = 6371001 m (polomer)
(pre guľu s rovnakým objemom,
ako elipsoid WGS84)

rozdiely od -14.3 do 7.1 km
(rozsah: 21.4 km)
(oproti 6371 km je to iba 0.34%)

povrch Zeme (reliéf), geoid, elipsoid



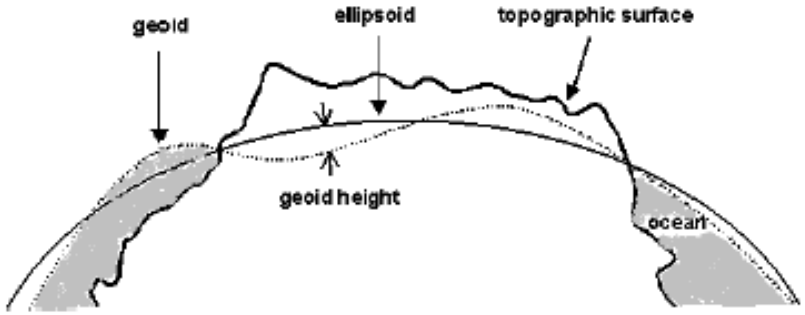
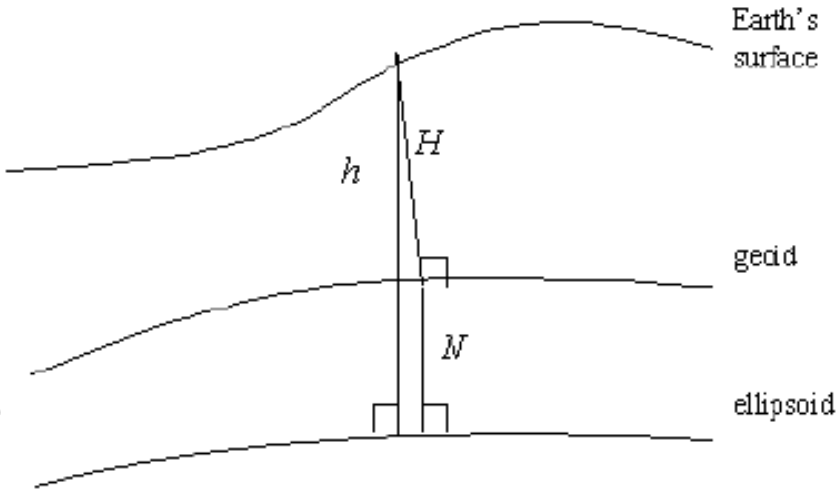


FIG. 1. Cartoon showing the ellipsoid, geoid, and topographic surface (the landmass topography as well as the ocean bathymetry).



h = elipsoidálna výška (bodu nad elipsoidom)
(určujú ju systémy GPS)

H = ortometrická výška (nadmorská, fyzikálna, vrstevnice v mapách, pri stavbách)

N = prevýšenie geoidu nad elipsoidom (geoid undulations)

geoid (kvázigeoid)

celosvet. prevýšenie geoidu nad elipsoidom – model EGM96
(global geoid undulations)

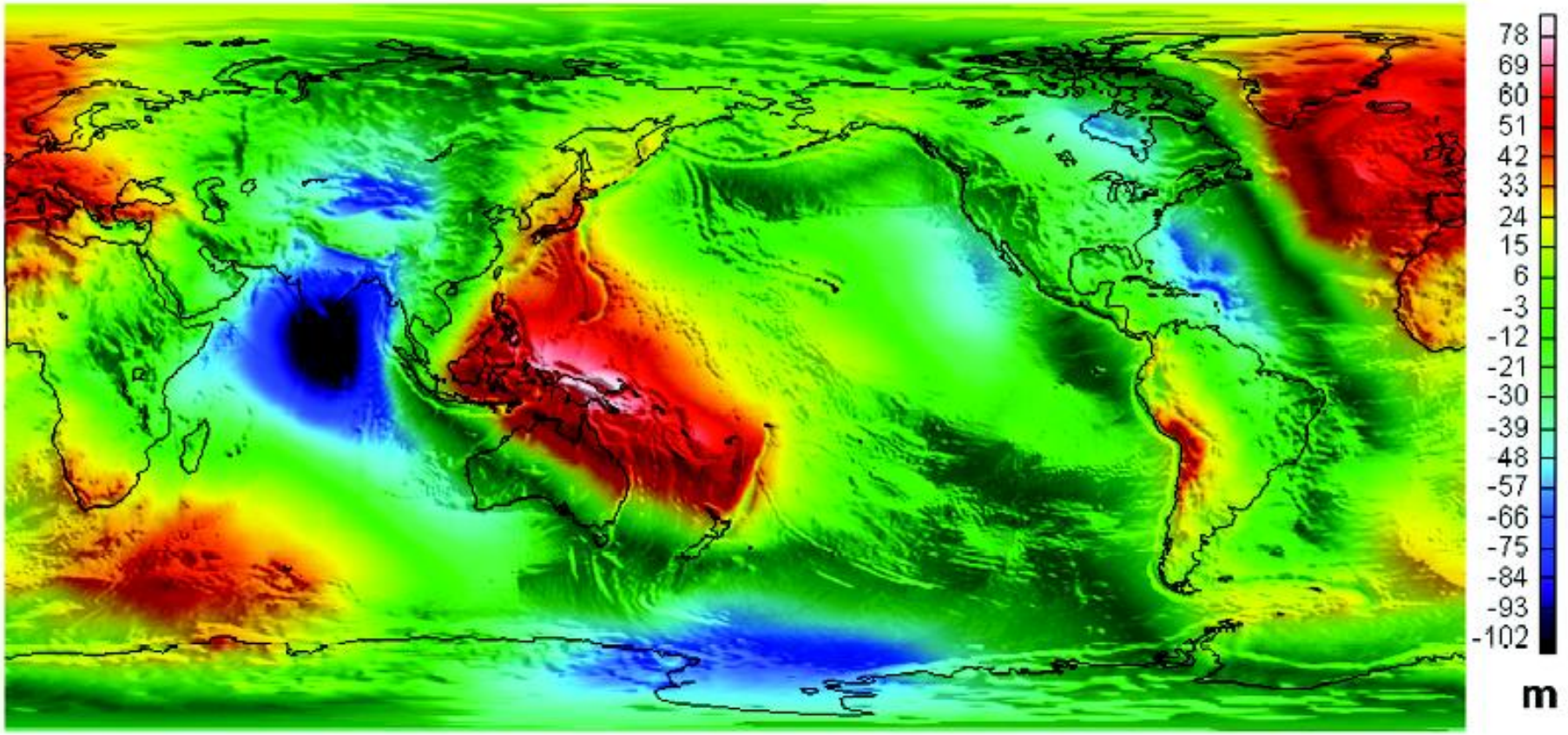
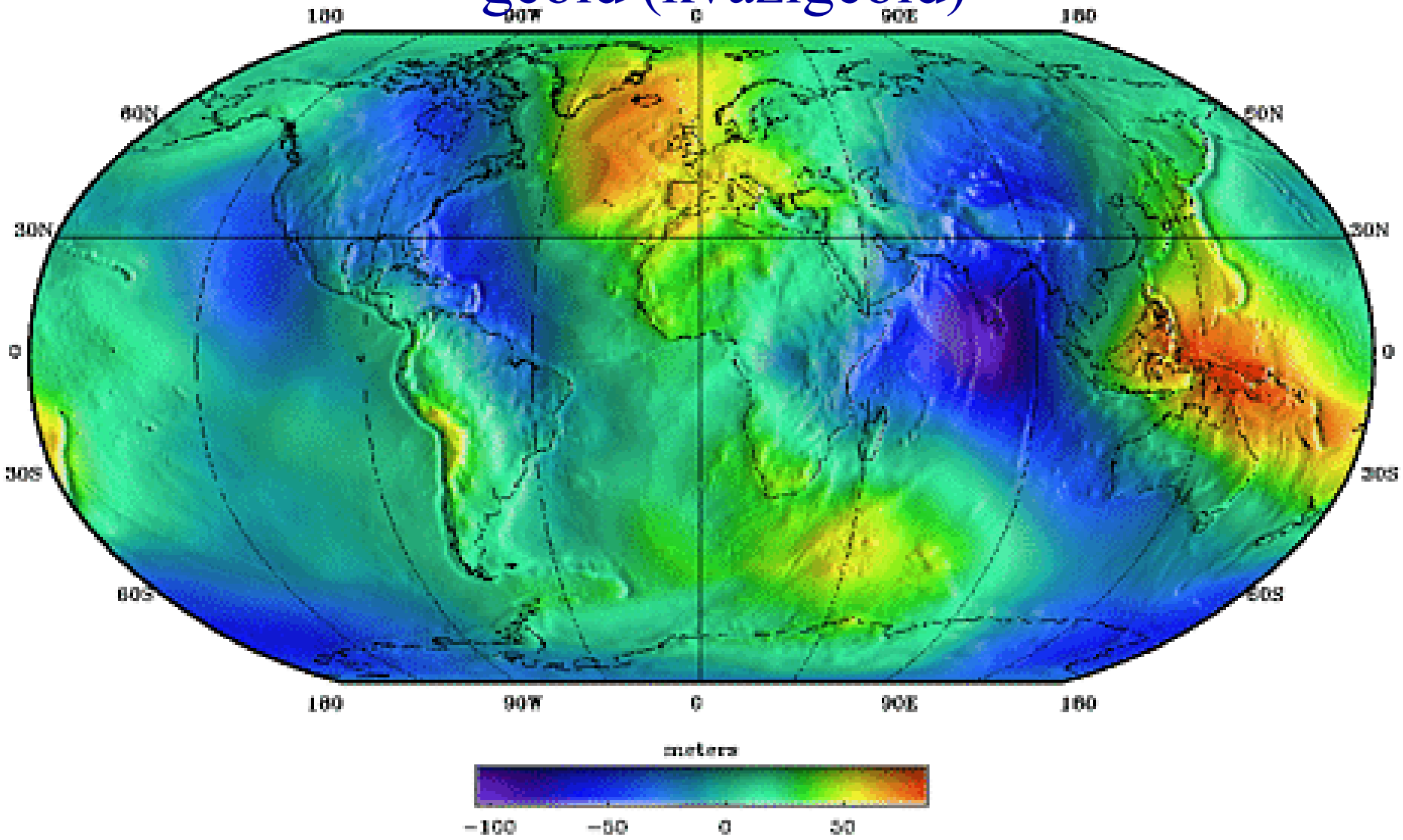
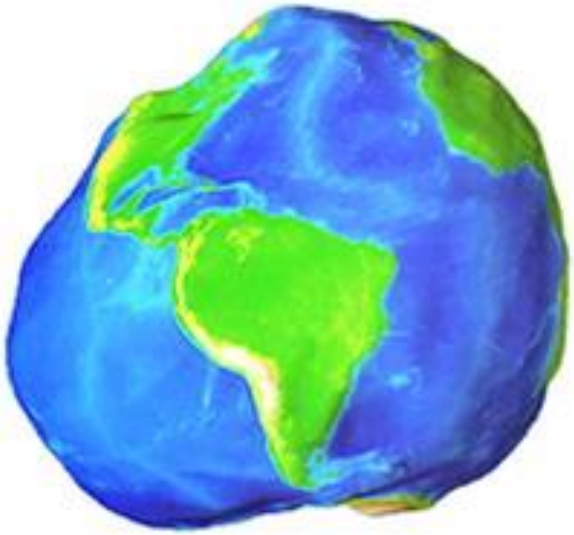


FIG. 3. The 15′ × 15′ global geoid undulations produced by EGM96 (Lemoine et al., 1998). The undulations range from −107 m to 85 m. Black lines indicate coast lines.

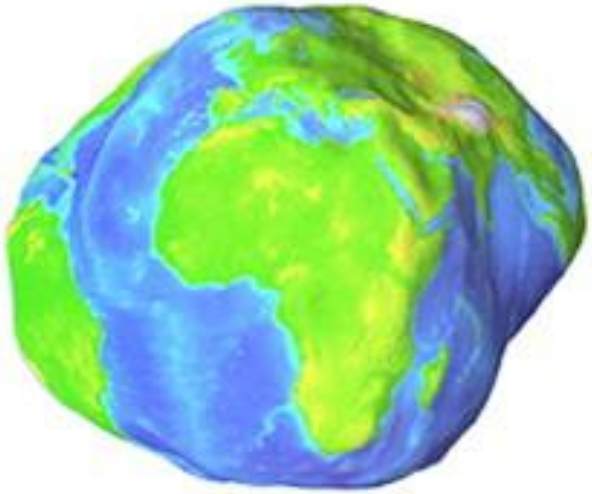
geoid (kvázigeoid)



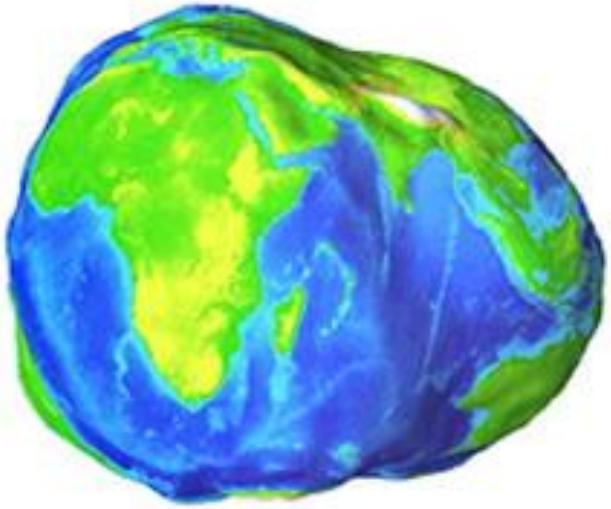
model EGM96 (iný pohľad)



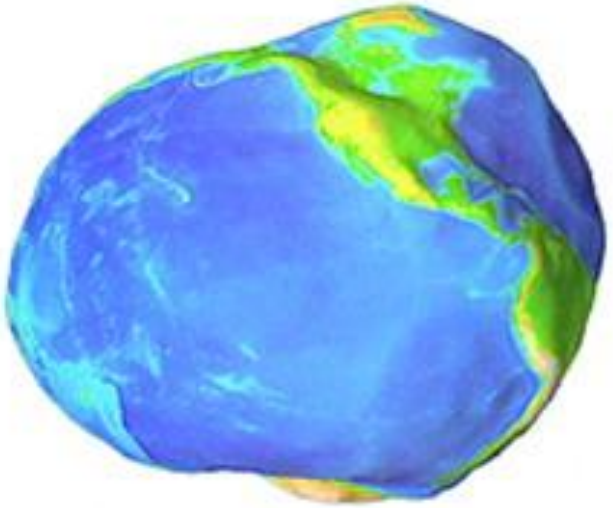
Geoid - Južná Amerika



Geoid - Afrika a Európa



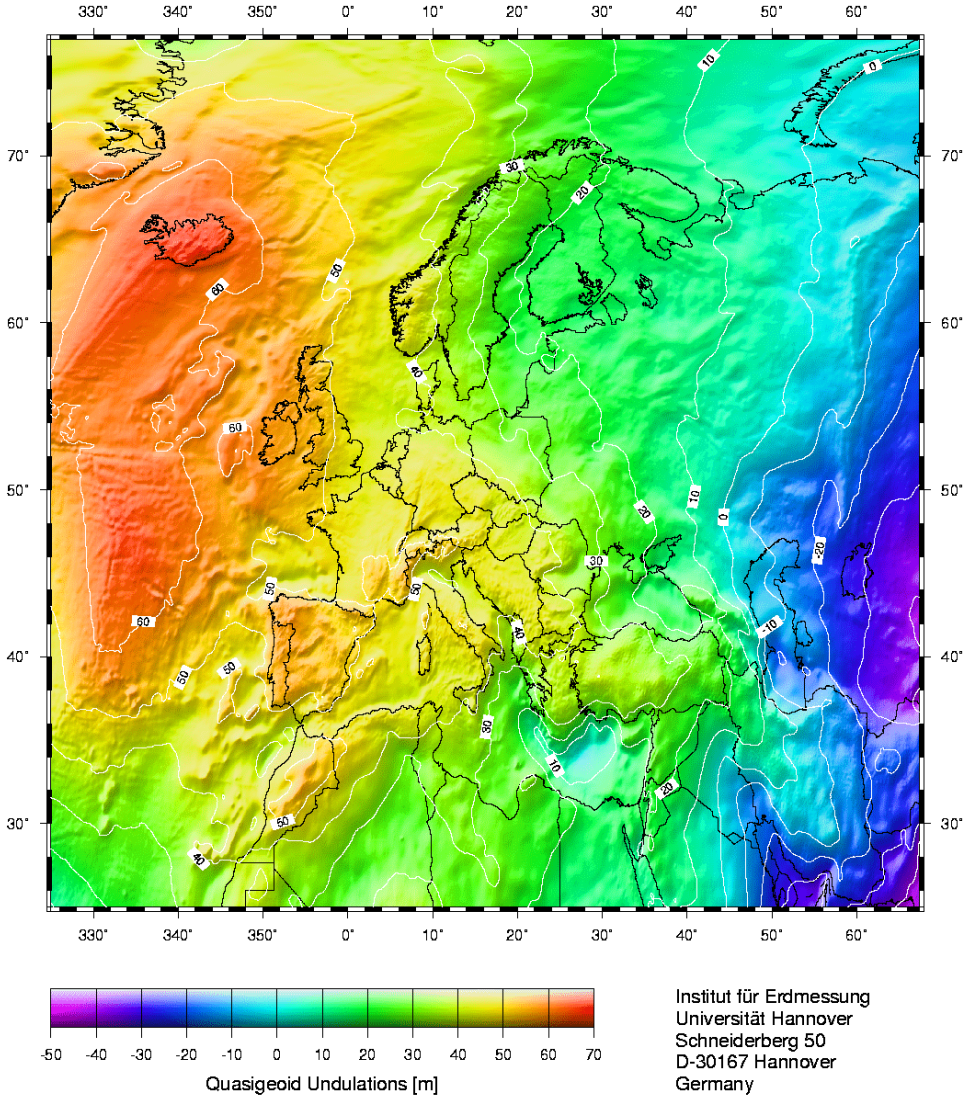
Geoid - Afrika a Ázia



Geoid - Severná Amerika

vizualizácia kvázigeoidu (10000 násobné zvýraznenie)

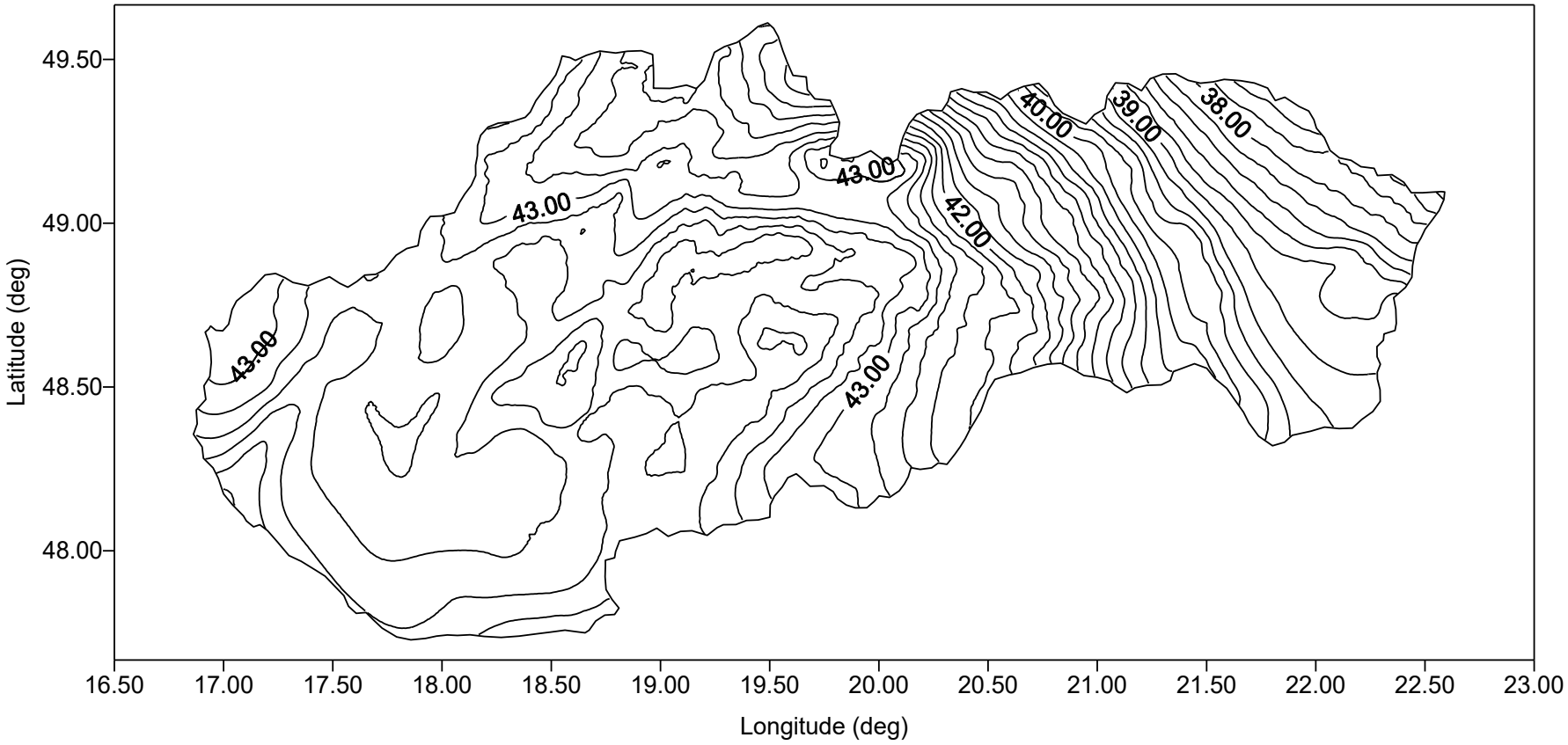
geoid
(kvázigeoid)



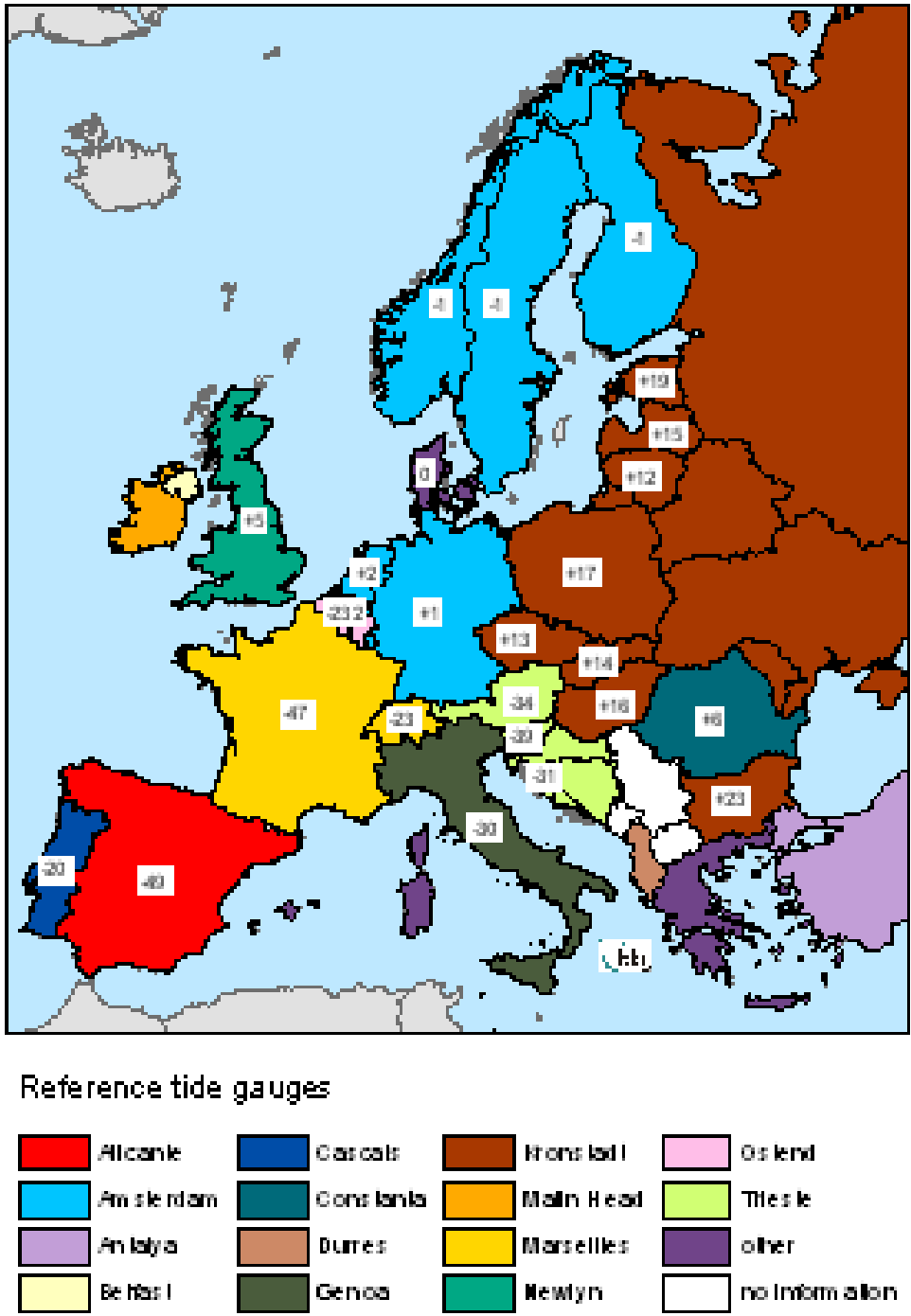
prevýšenie geoidu - Európa (kvázigeoidu) nad elipsoid. – model EGG97

prevýšenie kvázigeoidu nad elipsoidom (Slovensko) – model GMSQ98BF

New Gravimetric Model of Slovak Quasigeoid - GMSQ98BF, contour interval 0.2 m



rozdiely medzi
výškovými systémami
(nadmorské výšky)
v rámci Európy –
uvedené v centimetroch
oproti Holandsku



Súvis tvaru Zeme s výpočtom Úplných Bouguerových anomálií ÚBA (?)

$$\Delta g_B = g - g_n + 0.3086h - 0.0419h\rho - B + T$$

prvý dôležitý krok pri výpočte ÚBA – odpočítanie normálneho tiažového poľa g_n:

$$\Delta g_B = g - g_n + 0.3086h - 0.0419h\rho - B + T$$

normálne pole Zeme (g_n, γ)

Pozn.:
V niektorých zahraničných učebniciach (napr. Telford et al.) sa tento krok zjednodušene označuje ako tzv. “latitude correction”. V skutočnosti sa merané tiažové pole mení dosť prudko v smere S-J (cca 10 microGal asi na 10 m vzdialenosť v S-J smere)

normálne pole (g_n, γ)

- s tvarom Zeme a jej tiažovým poľom ako celkom veľmi úzko súvisí tzv. normálne pole Zeme (normal, theoretical gravity),

- je to tiažové pole platné pre rotujúci (rotačný) referenčný elipsoid, ktorý sa v čo najväčšej miere svojimi rozmermi blíži ku geoidu, popisujúcemu tvar Zeme,

- normálne pole sa často označuje ako: g_n alebo γ

normálne pole (g_n, γ)

je to tiažové pole referenčného elipsoidu (sféroidu), ktorý však nebol odvodený na základe riešenia priamej úlohy (grav. pole elipsoidu mínus odstredivá sila, spôsobená rotáciou), ale z riešenia Laplaceovej rovnice vo sférických (elipsoidálnych) súradniciach

najtriviálnejší prístup (geometrická aproximácia) –
– tzv. Clairautov sféroid:

$$g_n = g_e(1 + \beta \sin^2\varphi)$$

g_e – tiažové zrýchlenie na rovníku (určené meraním),
β – konštanta (určená z meraní), hodnota okolo 0.005
φ – zemepisná šírka

normálne pole - Clairautov sféroid

odvodenie

normálne pole (g_n, γ)

je to tiažové pole referenčného elipsoidu (sféroidu), ktorý však nebol odvodený na základe riešenia priamej úlohy (grav. pole elipsoidu mínus odstredivá sila, spôsobená rotáciou), ale z riešenia Laplaceovej rovnice vo sférických (elipsoidálnych) súradniciach

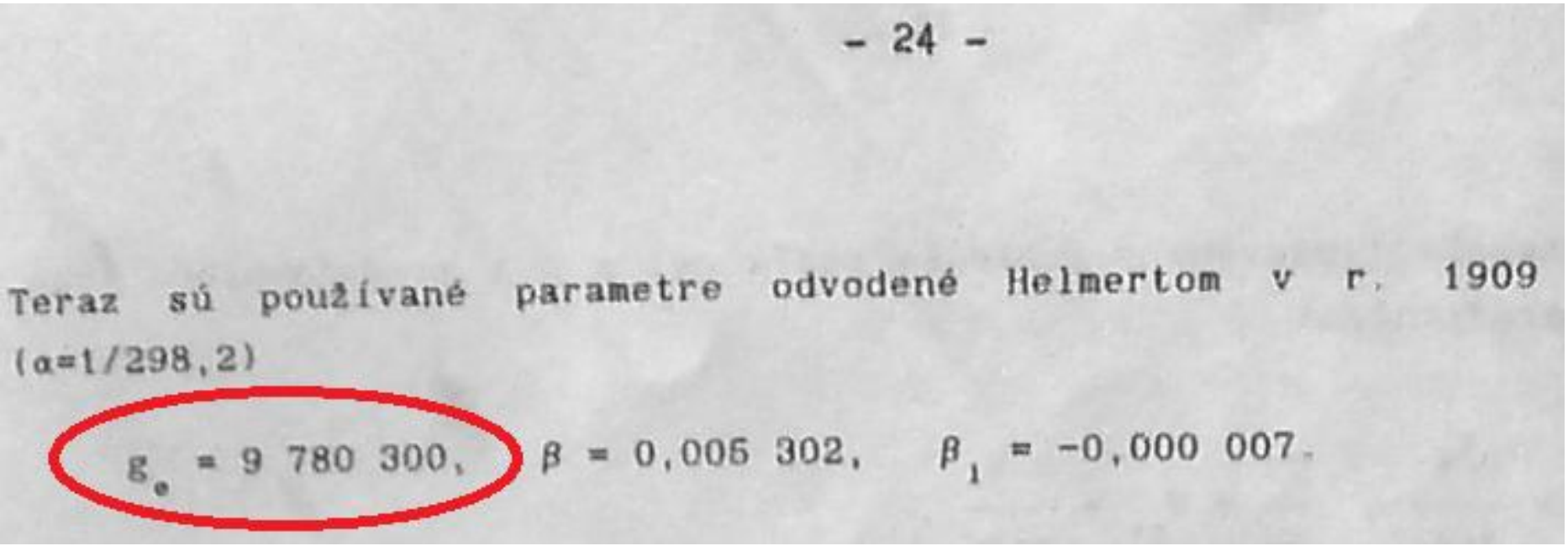
jednoduchší prístup (vo sférických súradniciach) –
– tzv. Helmertov vzorec (sféroid):

$$g_n = g_e(1 + \beta \sin^2\varphi + \beta_1 \sin^2 2\varphi)$$

g_e – tiažové zrýchlenie na rovníku (určené meraním),
β, β_1 – konštanty (určené z meraní)
φ – zemepisná šírka
napr. Helmertove konštanty (pre výstup v [mGal]):
$g_e = 978030$, $\beta = 0.005302$, $\beta_1 = 0.000007$
Cassinisove konštanty:
$g_e = 978049$, $\beta = 0.0052884$, $\beta_1 = 0.0000059$

normálne pole (g_n, γ)

Pozor, v skriptách sú používané oficiálne SI jednotky [$\mu m \cdot s^{-2}$], čiže hodnoty pre g_e tam sú 10 × krát väčšie:



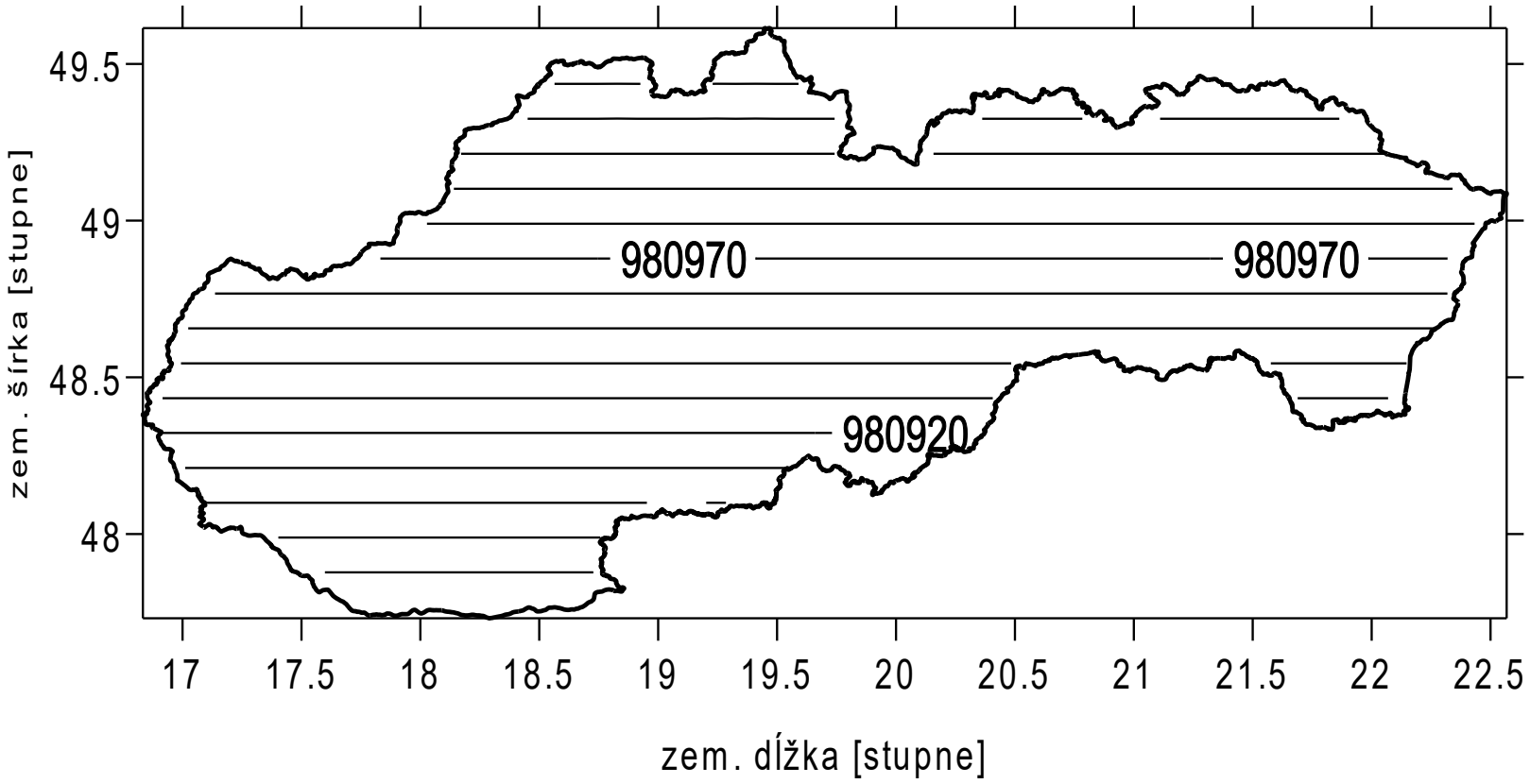
- 24 -

Teraz sú používané parametre odvodené Helmertom v r. 1909 (α=1/298,2)

g_e = 9 780 300, β = 0,005 302, β_1 = -0,000 007.

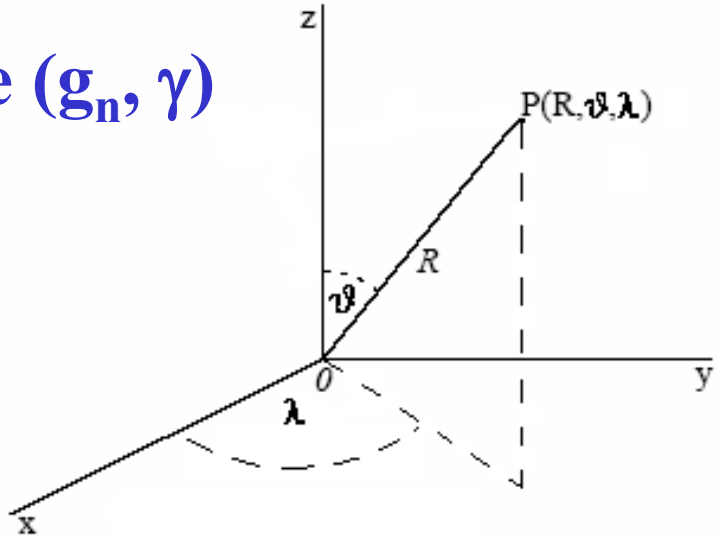
normálne pole (g_n, γ)

je to tiažové pole referenčného elipsoidu (sféroidu), ktorý však nebol odvodený na základe riešenia priamej úlohy (grav. pole elipsoidu mínus odstredivá sila, spôsobená rotáciou), ale z riešenia Laplaceovej rovnice vo sférických (elipsoidálnych) súradniciach



normálne pole (g_n, γ)

„exaktnejšie“ dovodenie je spojené s riešením Laplaceovej rovnice vo sférických (elipsoidálnych) súradniciach



prvky sfér. súradnicového systému

R – centrálna vzdialenosť

ϑ – doplnok zemepisnej šírky, $\varphi = 90^o - \vartheta$

λ – azimutálny uhol (zemepisná dĺžka)

$$U(R,\vartheta,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{R}\right)^{n+1}\sum_{m=0}^{n}(A_{nm}\cos m\lambda + B_{nm}\sin m\lambda)P_n^m(\cos\vartheta)$$

tzv. sférické funkcie (spherical harmonics)

kde:

R, ϑ, λ - sú sférické súradnice,

a – polomer Zeme (pri guľovej aproximácii),

A_{nm}, B_{nm} – koeficienty tzv. sférických funkcií,

P_n^m – tzv. pridružené Legendreove polynómy

normálne pole (g_n, γ)

„exaktnejšie“ dovodenie je spojené s riešením Laplaceovej rovnice vo sférických (elipsoidálnych) súradniciach

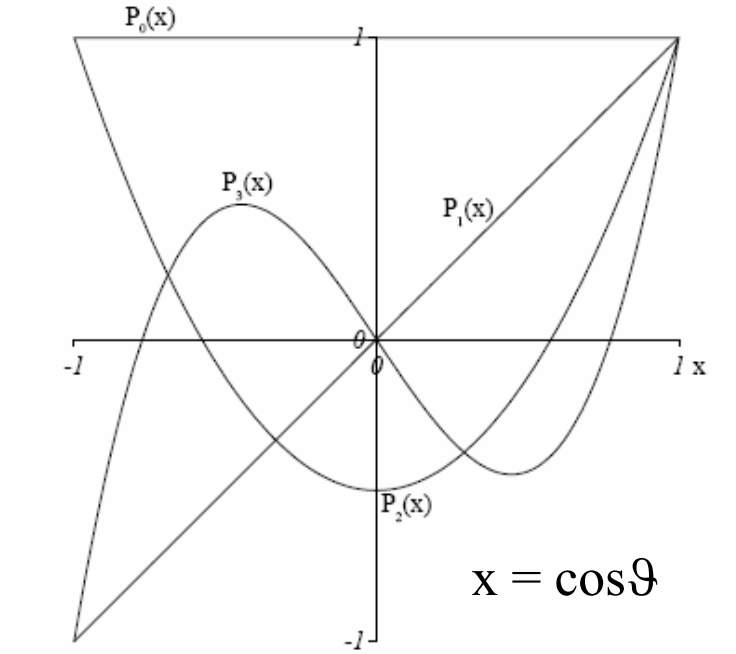
$$U(R,\vartheta,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{R}\right)^{n+1}\sum_{m=0}^{n}(A_{nm}\cos m\lambda+B_{nm}\sin m\lambda)P_n^m(\cos\vartheta)$$

tzv. sférické funkcie (spherical harmonics)

kde:

R, ϑ, λ - sú sférické súradnice, a – polomer Zeme (pri guľovej aproximácii),

A_{nm}, B_{nm} – koef. tzv. sférických funkcií, P_n^m – tzv. pridružené Legendreove polynómy

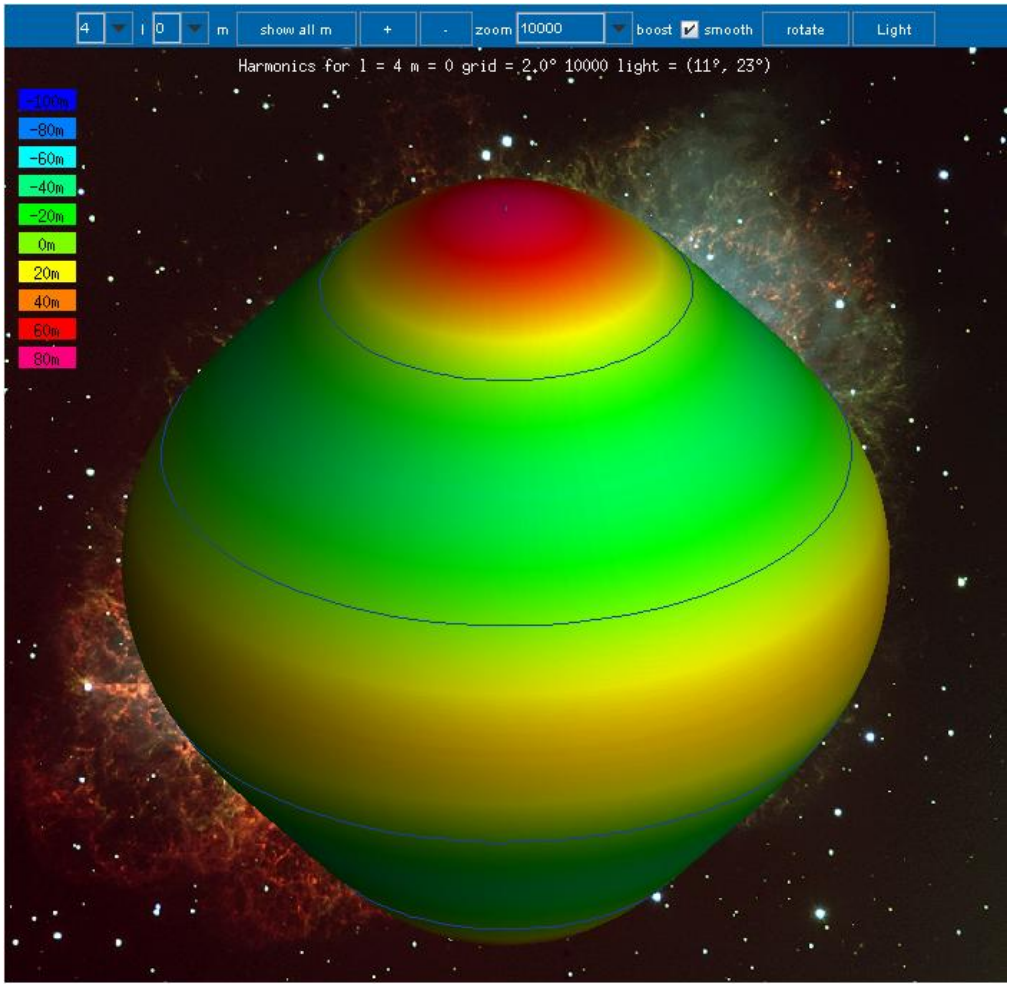


$x = \cos\vartheta$

normálne pole (g_n, γ)

$$U(R,\vartheta,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{R}\right)^{n+1}\sum_{m=0}^{n}(A_{nm}\cos m\lambda+B_{nm}\sin m\lambda)P_n^m(\cos\vartheta)$$

tzv. sférické funkcie (spherical harmonics)



n = 4
m = 0

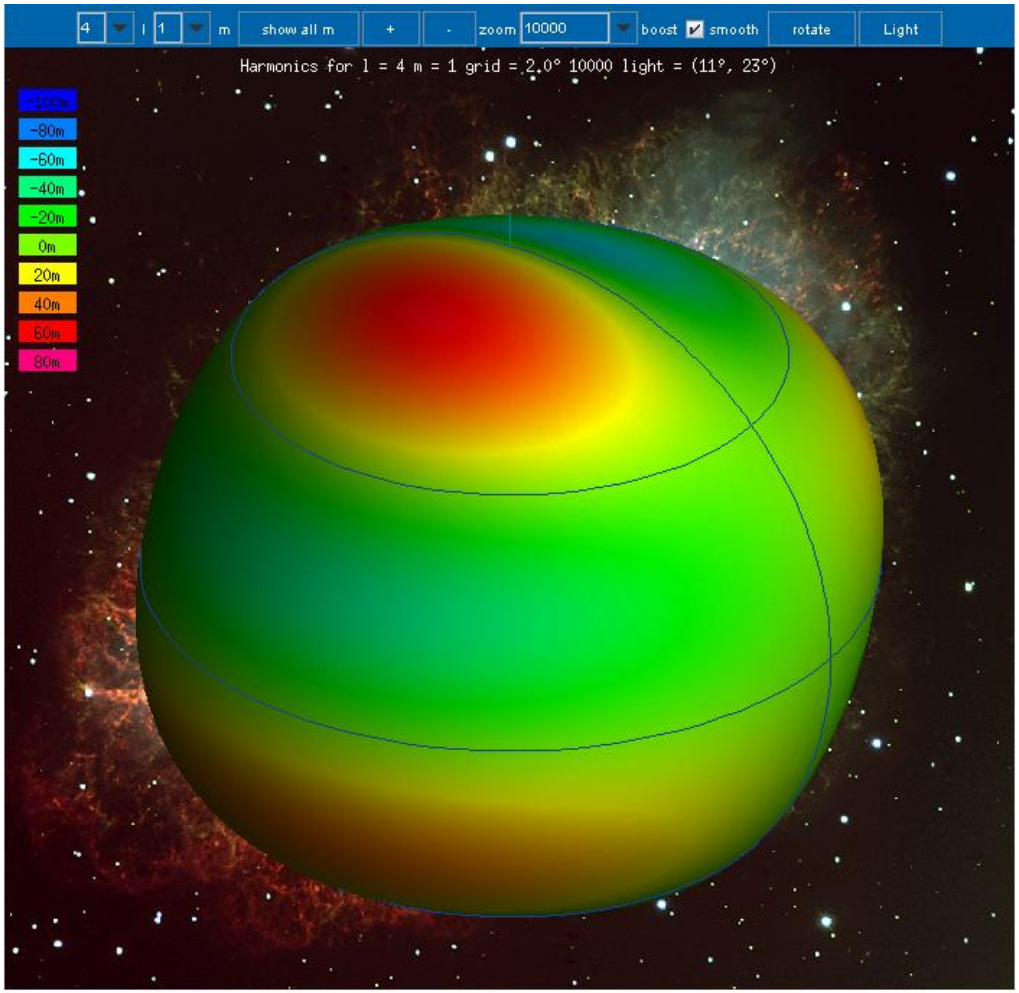
tzv. zonálne sféricke fun.

http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM/ICGEM.html

normálne pole (g_n, γ)

$$U(R,\vartheta,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{R}\right)^{n+1}\sum_{m=0}^{n}(A_{nm}\cos m\lambda+B_{nm}\sin m\lambda)P_n^m(\cos\vartheta)$$

tzv. sférické funkcie (spherical harmonics)



n = 4

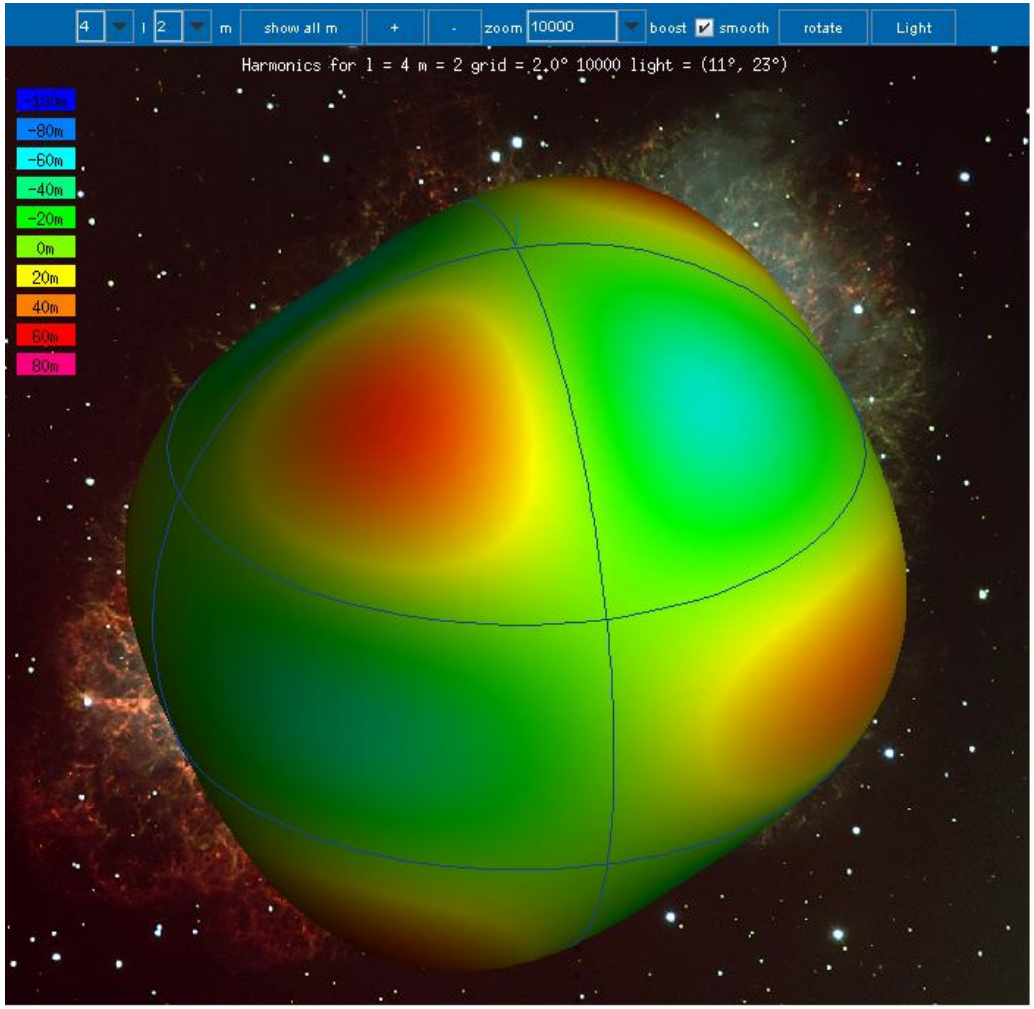
m = 1

http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM/ICGEM.html

normálne pole (g_n, γ)

$$U(R,\vartheta,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{R}\right)^{n+1}\sum_{m=0}^{n}(A_{nm}\cos m\lambda+B_{nm}\sin m\lambda)P_n^m(\cos\vartheta)$$

tzv. sférické funkcie (spherical harmonics)



n = 4

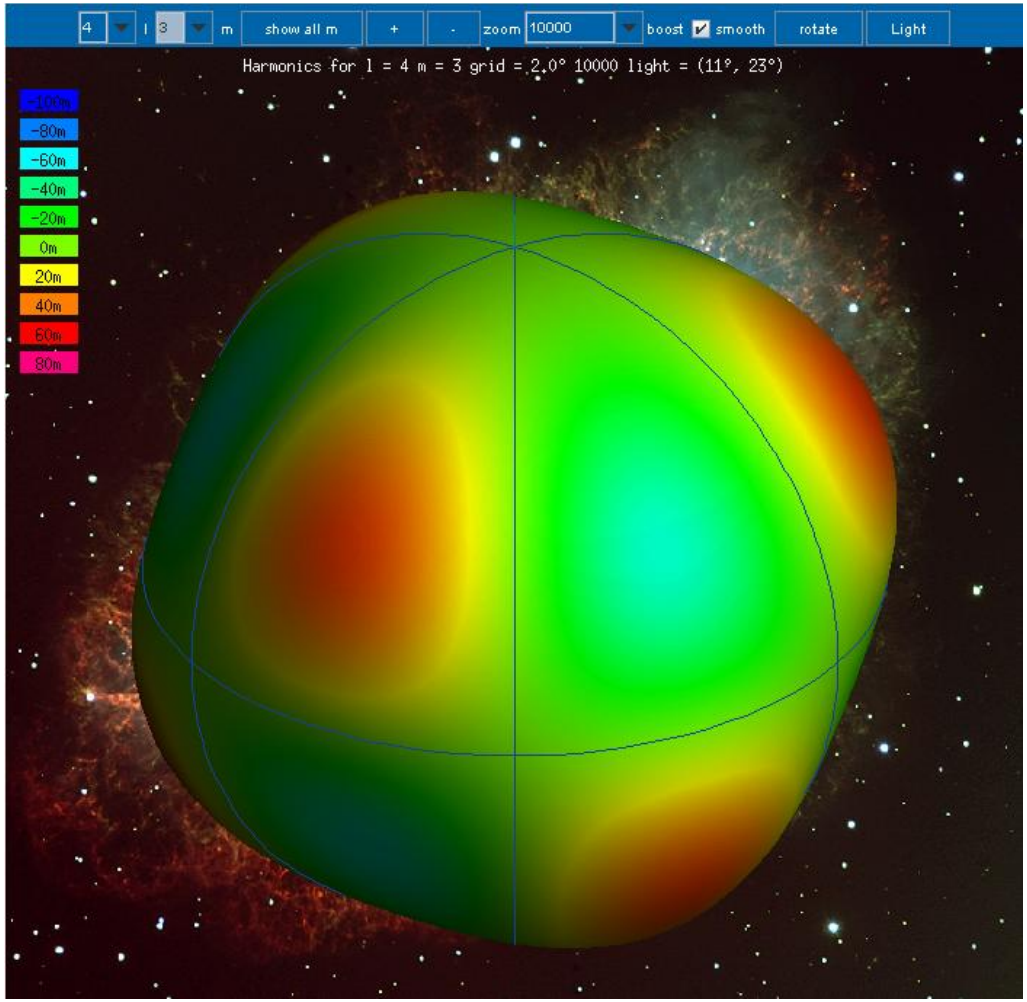
m = 2

http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM/ICGEM.html

normálne pole (g_n, γ)

$$U(R,\vartheta,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{R}\right)^{n+1}\sum_{m=0}^{n}(A_{nm}\cos m\lambda+B_{nm}\sin m\lambda)P_n^m(\cos\vartheta)$$

tzv. sférické funkcie (spherical harmonics)



n = 4

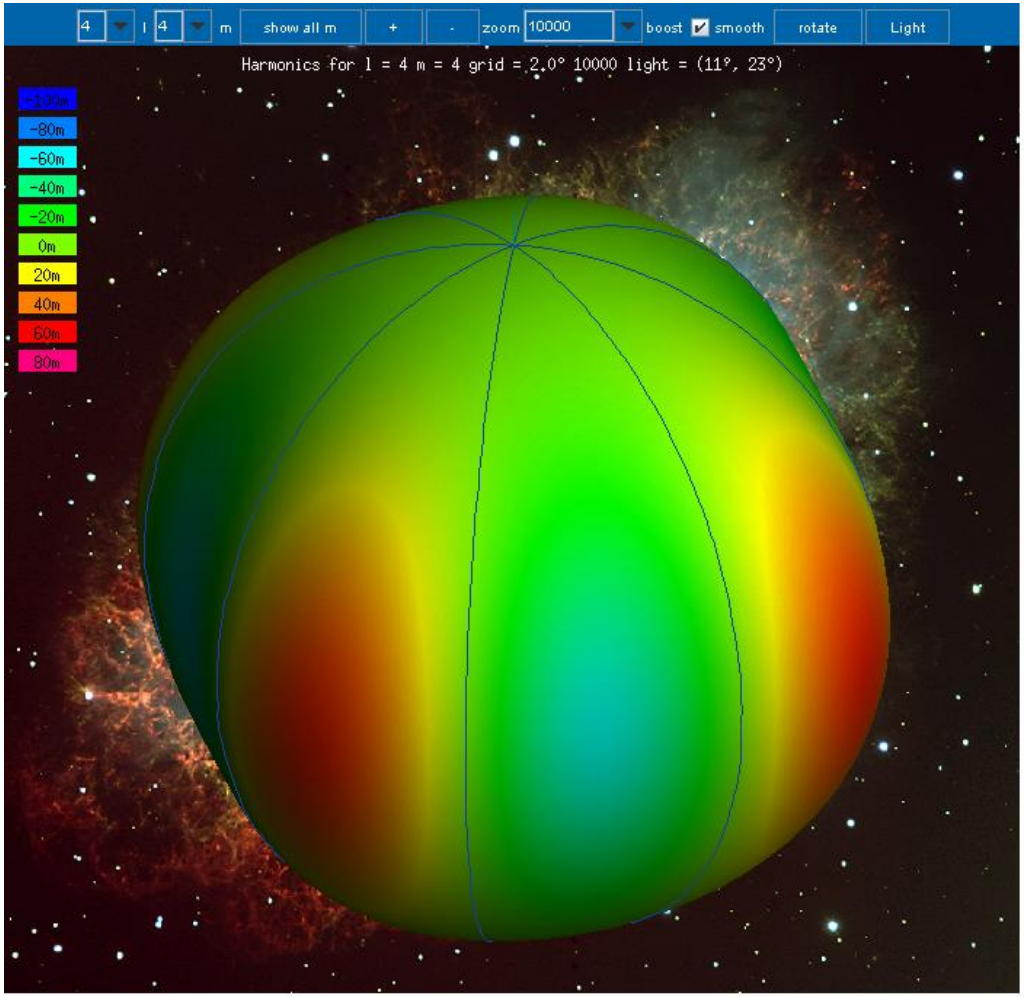
m = 3

http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM/ICGEM.html

normálne pole (g_n, γ)

$$U(R,\vartheta,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{R}\right)^{n+1}\sum_{m=0}^{n}(A_{nm}\cos m\lambda+B_{nm}\sin m\lambda)P_n^m(\cos\vartheta)$$

tzv. sférické funkcie (spherical harmonics)



n = 4
m = 4

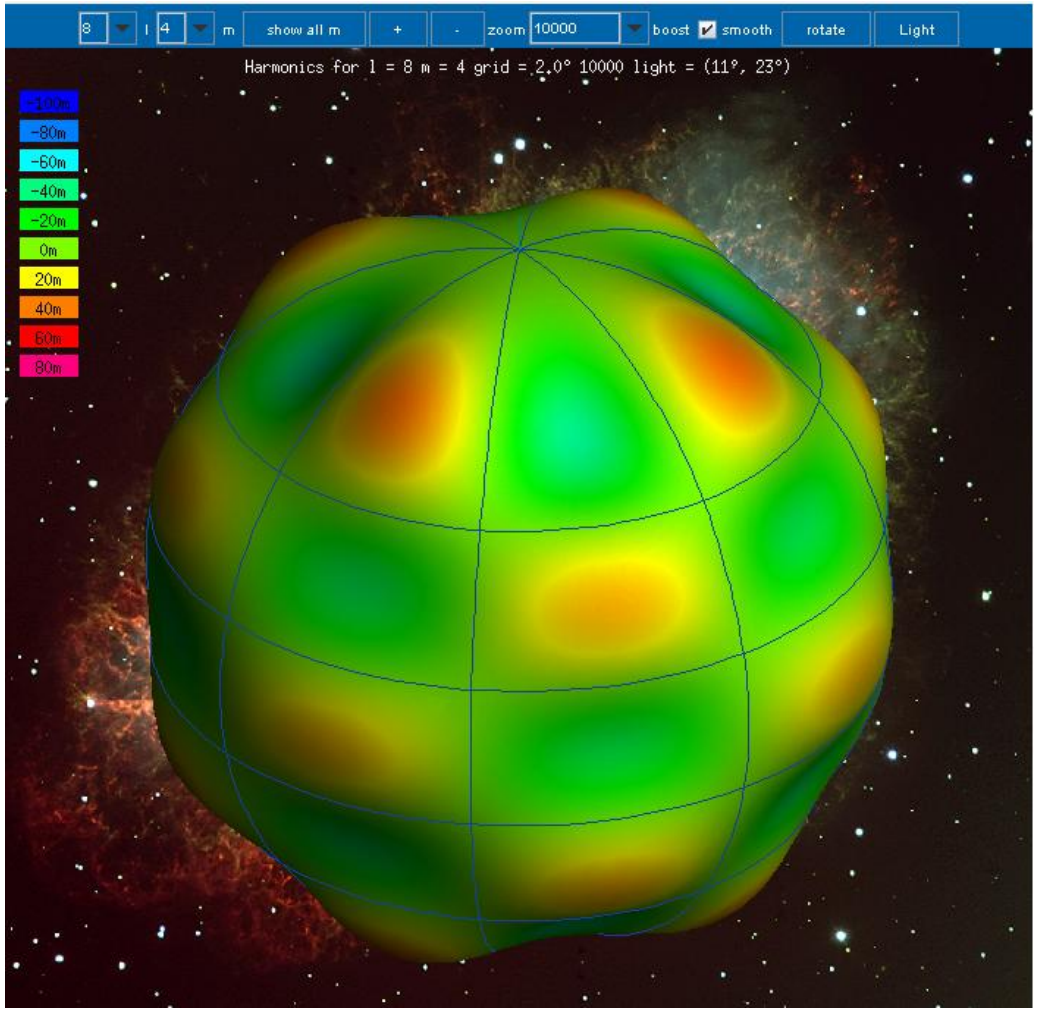
tzv. sektorálne sféricke fun.

http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM/ICGEM.html

normálne pole (g_n, γ)

$$U(R,\vartheta,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{R}\right)^{n+1}\sum_{m=0}^{n}(A_{nm}\cos m\lambda+B_{nm}\sin m\lambda)P_n^m(\cos\vartheta)$$

tzv. sférické funkcie (spherical harmonics)



n = 8
m = 4

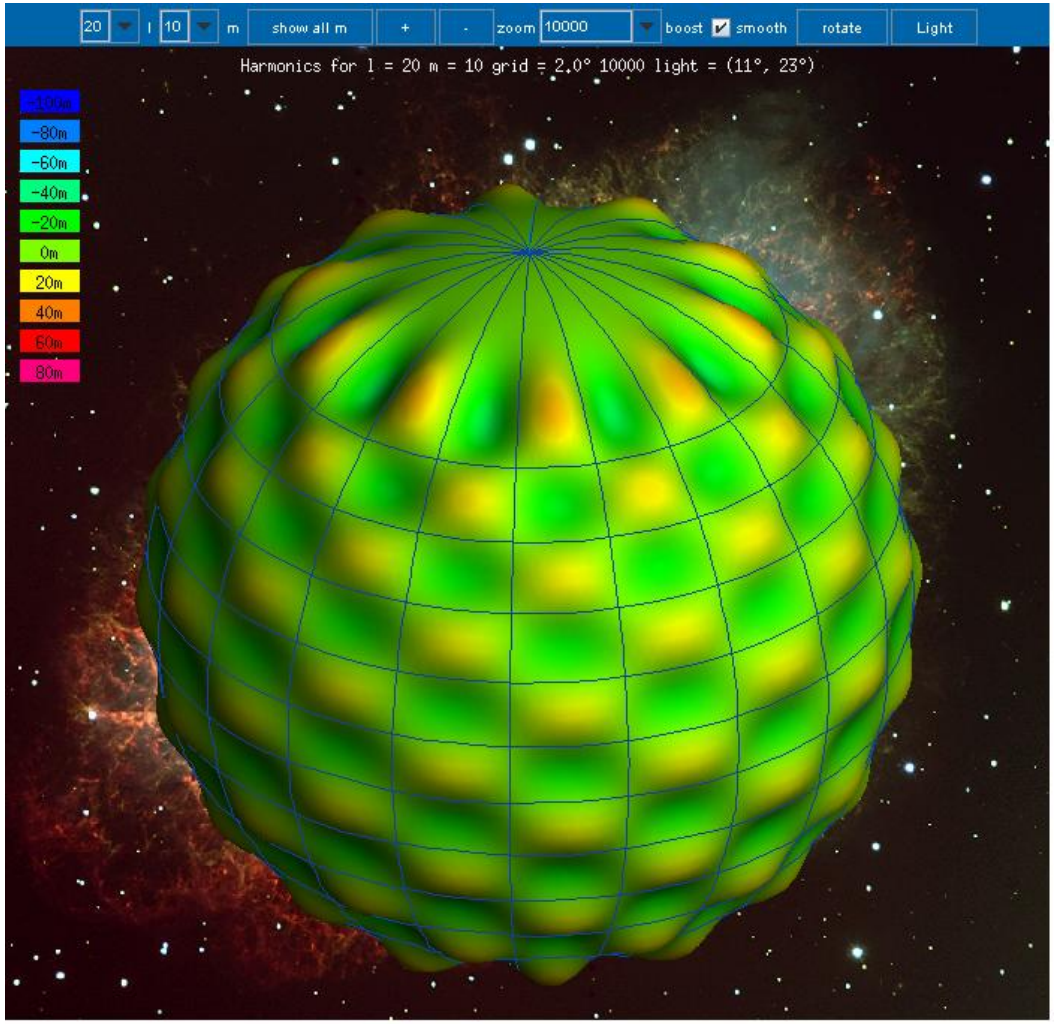
tzv. tesserálne sféricke fun.

http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM/ICGEM.html

normálne pole (g_n, γ)

$$U(R,\vartheta,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{R}\right)^{n+1}\sum_{m=0}^{n}(A_{nm}\cos m\lambda+B_{nm}\sin m\lambda)P_n^m(\cos\vartheta)$$

tzv. sférické funkcie (spherical harmonics)



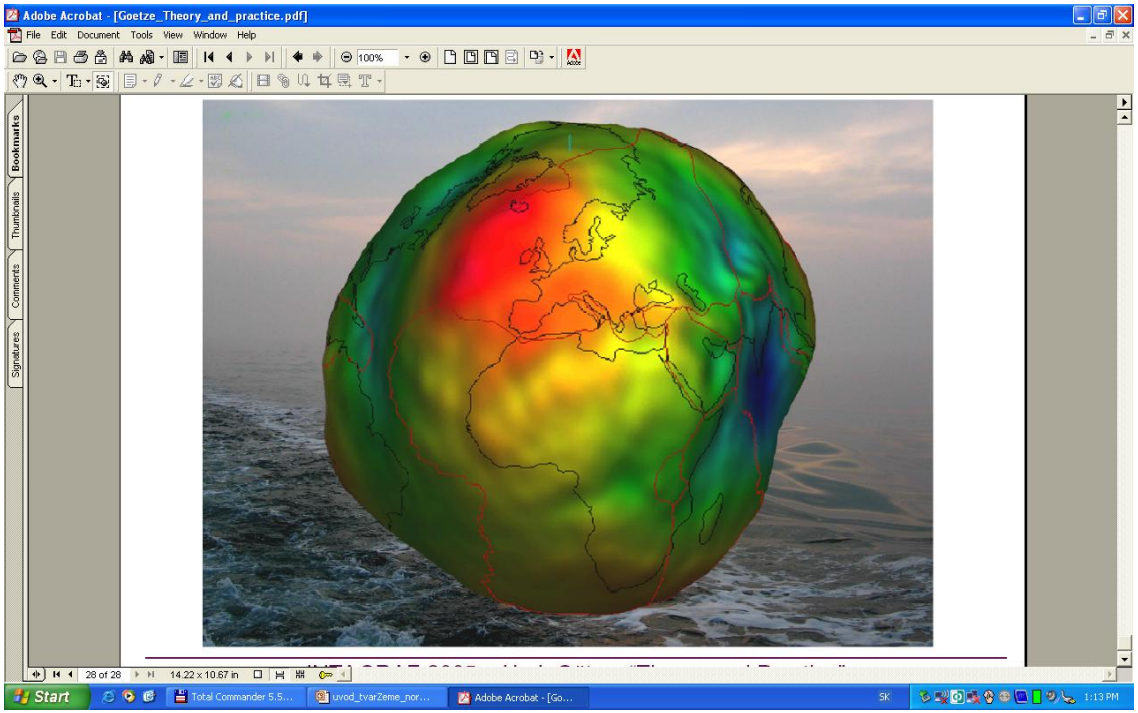
n = 20
m = 10

tzv. tesserálne sféricke fun.

http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM/ICGEM.html

normálne pole (g_n, γ)

$$U(R,\vartheta,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{R}\right)^{n+1}\sum_{m=0}^{n}(A_{nm}\cos m\lambda+B_{nm}\sin m\lambda)P_n^m(\cos\vartheta)$$



kvázigeoid (matematický popis geoidu cez rozvoj do sférických funkcií, n, m ≅ 300)
Hodnoty koeficientov A_{nm}, B_{nm} sú dnes určované najmä zo satelitných a pozemných meraní. Boli publikované rôzne sady – napr. EGM2008, EIGEN6C4, XGM2019,…

Tieto rozvoje sa zvyknú tiež nazývať ako globálne geopotenciálne modely (GGM).

normálne pole (g_n, γ)

„exaktnejšie“ odvodenie je spojené s riešením Laplaceovej rovnice vo sférických (elipsoidálnych) súradniciach

$$U(R,\vartheta,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{R}\right)^{n+1}\sum_{m=0}^{n}(A_{nm}\cos m\lambda+B_{nm}\sin m\lambda)P_n^m(\cos\vartheta)$$

pri vyjadrení koeficientov A_{mn} a B_{mn} sa dá zistiť, že mnohé z nich sú nulové (pre prípad, že ťažisko Zeme-gule je v počiatku súr. systému) alebo sa dajú zanedbať:

$$U(R,\vartheta,\lambda)=\frac{GM}{R}+\frac{G}{R^3}(A-C)P_2(\cos\vartheta)+A_{4,0}P_4(\cos\vartheta)+\ldots$$

kde:
R, ϑ, λ - sú sférické súradnice, a – polomer Zeme (pri guľovej aproximácii),
M – hmotnosť Zeme, A, C – hlavné momenty zotrvačnosti,

$P_2(\cos\vartheta) = (1/2)(3\cos^2\vartheta - 1)$, $P_4(\cos\vartheta) = (1/8)(35\cos^4\vartheta - 30\cos^2\vartheta + 3)$,

normálne pole (g_n, γ)

„exaktnejšie“ odvodenie je spojené s riešením Laplaceovej rovnice vo sférických (elipsoidálnych) súradniciach

$$U(R,\vartheta,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{R}\right)^{n+1}\sum_{m=0}^{n}(A_{nm}\cos m\lambda+B_{nm}\sin m\lambda)P_n^m(\cos\vartheta)$$

pri vyjadrení koeficientov A a B sa dá zistiť, že mnohé z nich sú nulové (pre prípad, že ťažisko Zeme-gule je v počiatku súr. systému) alebo sa dajú zanedbať:

$$U(R,\vartheta,\lambda)=\frac{GM}{R}+\frac{G}{R^3}(A-C)P_2(\cos\vartheta)+A_{4,0}P_4(\cos\vartheta)+\dots$$

$P_2(\cos\vartheta) = (1/2)(3\cos^2\vartheta - 1) = (1/2)(3\sin^2\varphi - 1)$ (φ - je zemepisná šírka)
- Clairautov sféroid

$P_4(\cos\vartheta) = (1/8)(35\cos^4\vartheta - 30\cos^2\vartheta + 3) = \sin^2\varphi - (0.5\sin 2\varphi)^2$
- Helmertov sféroid

normálne pole (g_n, γ)

zložitejší vzorec – tzv. Somigliana-Pizettiho
(riešenie Laplaceovej rovnice v **elipsoidálnych** súradniciach):

$$g_n = \frac{a g_e \cos^2 \varphi + c g_p \sin^2 \varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + c^2 \sin^2 \varphi}}$$

a, c – hlavná a vedľajšia poloos elipsoidu,
(6378137 m, 6356752.3 m)
g_e – tiažové zrýchlenie na rovníku (určené meraním),
(978032.68 mGal)
g_p – tiažové zrýchlenie na póle (určené meraním),
(983218.64 mGal)

referencia:
Somigliana, C., 1929: Teoria generale del campo gravitazionale dell' ellipsoide di rotazione, Mem. Soc. Astron. Ital., Vol.IV.
Pizetti, P., 1894: Sulla espressione della gravítá alla superfície del geoide, suposto ellissoidico. Atti R. Accad. Lincei, Ser. V, Vol. 3

normálne pole (g_n, γ)

Veľmi dôležité skutočnosti

Riešenie pre g_n spĺňa dve hlavné podmienky:

- hodnotovo zodpovedá priemernému tiažovému zrýchleniu na povrchu Zeme (v závislosti od zemepisnej šírky) ,
- tiažový potenciál vytvára (pre určitú dohodnutú hodnotu W_0) hladinovú (ekvipotenciálnu plochu), ktorá svojim tvarom aproximuje tvar Zeme.

Na druhej strane – nevieme teoreticky odvodiť pre aké rozdelenie hustôt platí toto pole, čiže nevieme pri jeho odpočítaní od meraného tiažového poľa Zeme určiť, ku akým (referenčným) hustotám máme získané prejavy nehomogenít vzťahovať... (to je dosť zlé...)

Konvenciou je dohodnuté, že prvé vrstvy od 0 po 10 km sú charakterizované hustotou 2.70 $g \cdot cm^{-3}$.

normálne pole (g_n, γ)

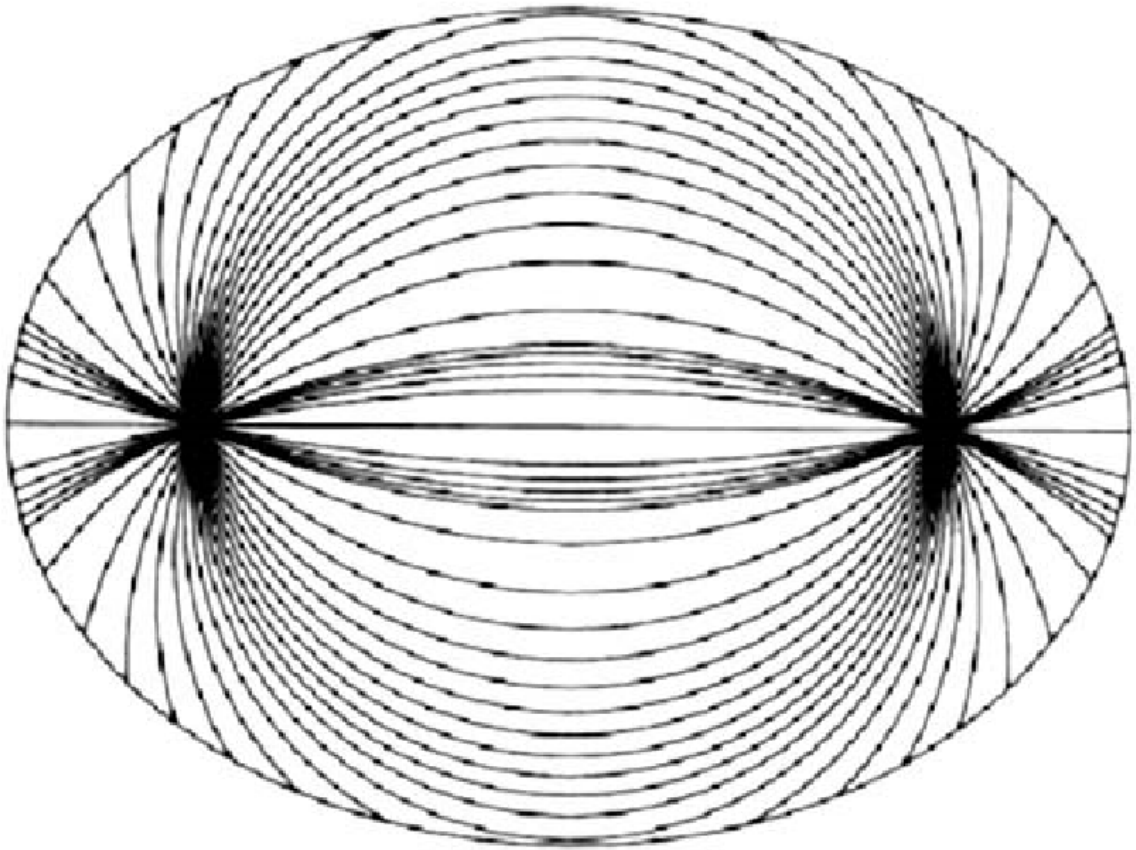
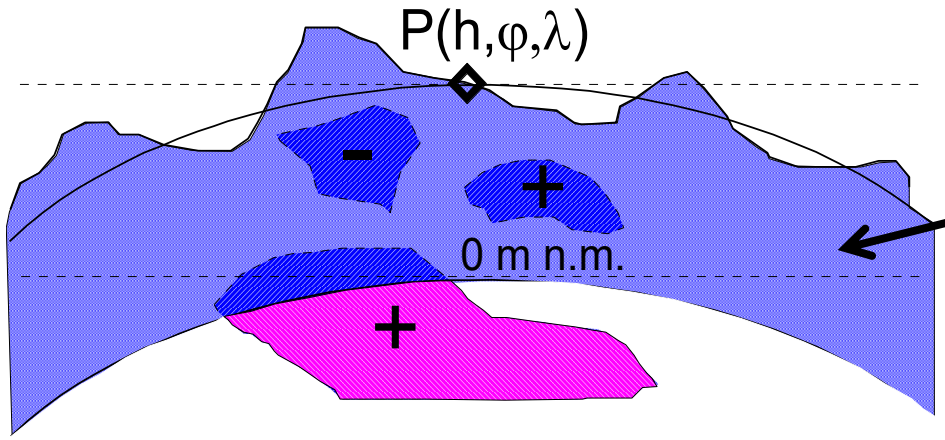


Figure 4.1 An example of one possible density distribution which would produce constant potential on the surface of ellipsoid, according to Conway (2000). Black lines stand for constant density surfaces which, in this cross-section, are represented by isodensity lines.

jedno z teoretických riešení pre rozdelenie hustôt v rotačnom elipsoide
(ano náhodou nezodpovedá predstavám o vrstevnatej stavbe Zeme zo seizmológie)

normálne pole (g_n, γ)

nevieme teoreticky odvodiť pre aké rozdelenie hustôt je toto pole, čiže nevieme pri jeho odpočítaní od meraného tiažového poľa Zeme určiť, ku akým (referenčným) hustotám máme získané prejavy nehomogenít vzťahovať... (to je dosť zlé...)



? (asi 2.70 g·cm^{-3})

hustotu týchto hmôt regulujeme pri výpočte ÚBA – tzv. redukčná alebo korekčná hustota (najčastejše 2.67 g·cm-^{3})

dôležité veci na záver

- prvé priblíženie tvaru Zeme – elipsoid (aký je rozdiel elipsoidu a gule, aproximujúcej Zem?)

- aký je rozdiel medzi elipsoidálnymi a ortometrickými (nadmorskými) výškami?

- skutočný tvar Zeme – geoid (jeho matematická verzia sa nazýva kvázigeoid)

- rozdiely medzi rotačným elipsoidom (WGS84) a aproximujúcou guľou sú max. prvé desiatky kilometrov (20 km)

- rozdiely medzi rotačným elipsoidom (WGS84) a geoidom (kvázigeoidom) sú max. prvé stovky metrov (200 m)

dôležité veci na záver

- normálne pole Zeme popisuje tiažové pole rotujúceho referenčného elipsoidu
  (aj s uvážením odstredivého zrýchlenia v dôsledku rotácie)

- najjednoduchšia aproximácia – tzv. Clairautov vzorec:

$$g_n = g_e(1 + \beta \sin^2\varphi)$$

  zložitejší vzťah – Helmertov vzorec:

$$g_n = g_e(1 + \beta \sin^2\varphi + \beta_1 \sin^2 2\varphi)$$

  v súčasnosti tzv. Somigliana-Pizzetiho vzťah:

$$g_n = \frac{a g_e \cos^2\varphi + c g_p \sin^2\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2\varphi + c^2 \sin^2\varphi}}$$

- u nás do cca 2000 roku používaný Helmertov vzťah pre výpočet normálneho poľa je postupne nahradzovaný Somigliana-Pizzetiho vzťahom (s parametrami GRS80),

- u nás používaný systém tiaže je 1995, prepojený na IGSN71

poznámka - slapy

slapy - „dýchanie Zeme“,

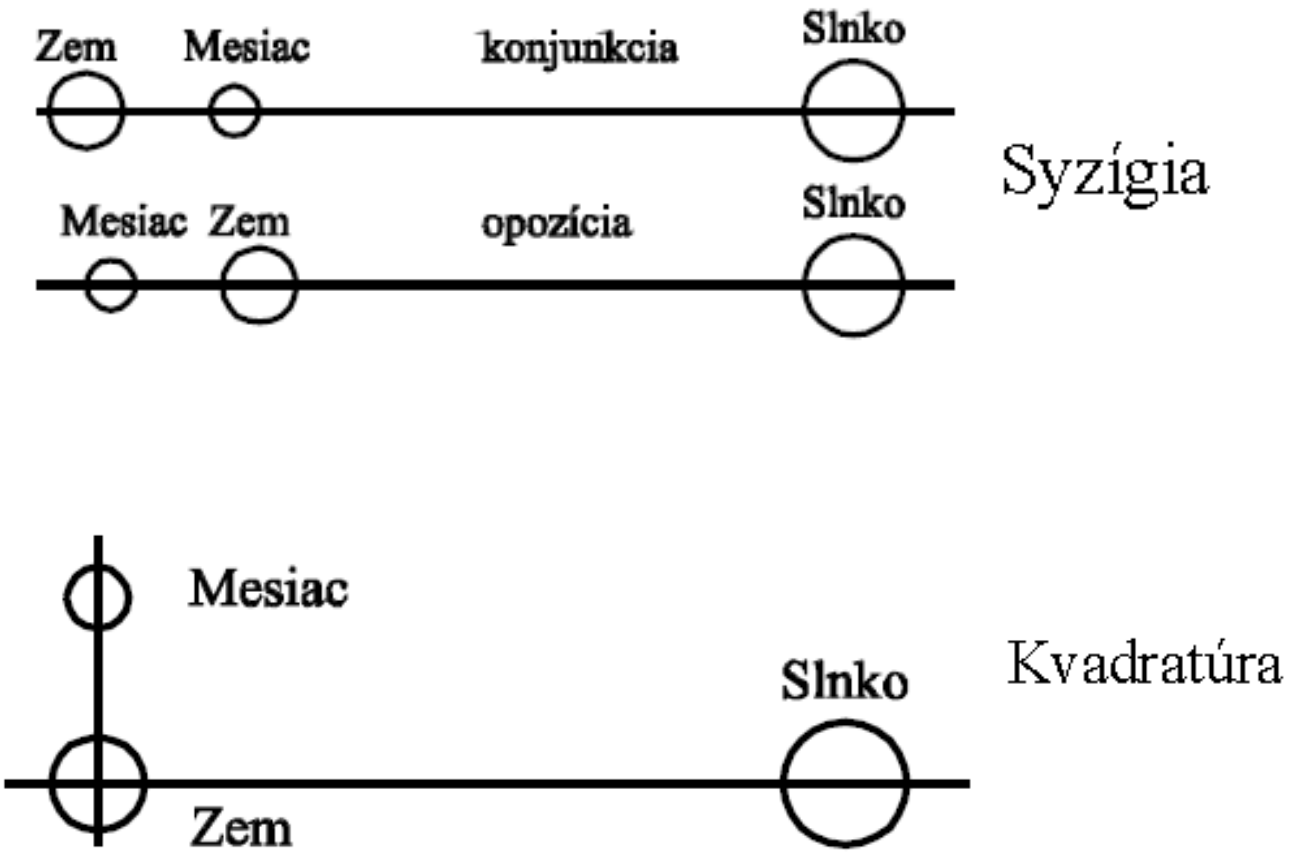
spôsobené gravitačným pôsobením Mesiaca a Slnka na Zem

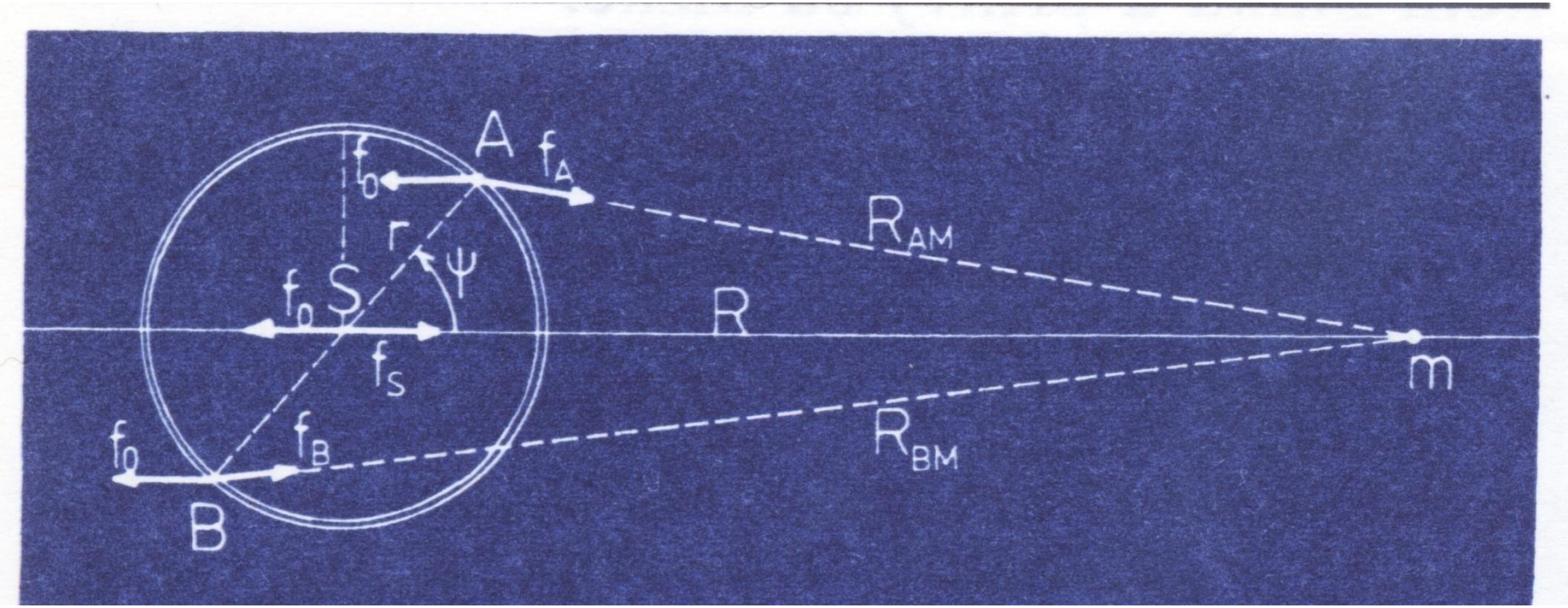
- interval: 12 hodín
- podobne, ako moria sa zdvíha aj pevná zem (cca. 50 cm)
- prvý krát vysvetlil I. Newton
- max. amplitúdy (v meranom tiažovom poli): 160 μGal
- je možné ich spočítať a dnešné moderné gravimetre (Scintrex CG3, CG5; ZLS Burris) ich z meraní odstraňujú
- používa sa často jednoduchší (tzv. Longmanov*) vzorec, ktorý má chybu okolo ±5 μGal

*Longman, I. M., 1959: Formulas for Computing the Tidal Accelerations Due to the Moon and Sun. Journal of Geophysical Research, Volume 64, No. 12., 2351 - 2355

slapy - „dýchanie Zeme“,

spôsobené gravitačným pôsobením Mesiaca a Slnka na Zem



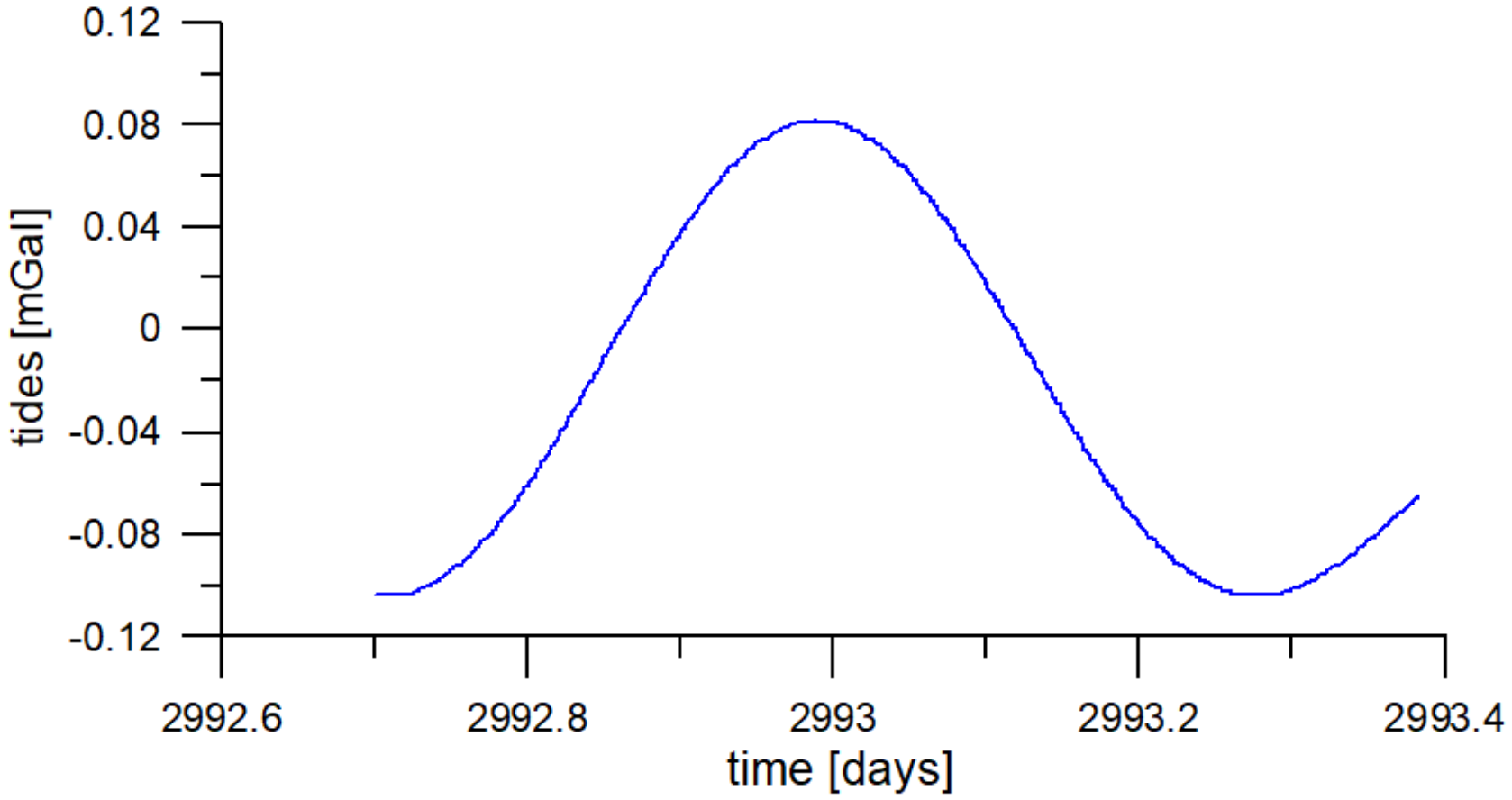


Z gravitačných zrýchlení je najväčšie $\mathbf{f}_A$ (bod A je najbližšie ku m) a najmenšie je $\mathbf{f}_B$ (bod B je najďalej od m). V každom z bodov A, S, B pôsobí aj odstredivé zrýchlenie $\mathbf{f}_0$ v dôsledku toho, že obe telesá sa podieľajú na rotácii jeden okolo druhého (mesiac okolo Zeme a Zem okolo Slnka. Výslednica vektorov $\mathbf{f}_B + \mathbf{f}_0$ v bode B je cca rovnaká, ale s opačným znamienkom ako výslednica $\mathbf{f}_A + \mathbf{f}_0$ v bode A – preto pôsobia slapy podobne na odvrátených poloviciach Zeme.

Toto vysvetlenie pochádza už od I. Newtona.

slapy - „dýchanie Zeme“,

spôsobené gravitačným pôsobením Mesiaca a Slnka na Zem



príklad - vypočítané slapové opravy (CG-5), dňa 25.10.2007